SVAR

Kapitel 1

1103 **A** *Lösning*:
42 är delbart med 14 om det finns ett heltal k sådant att
$42 = k \cdot 14$
$42 = 3 \cdot 14$
V.S.B.

B *Lösning*:
$x = 4$ ger
$VL = 6 \cdot 4 - 20 = 24 - 20 = 4$
$HL = 4$
$VL = HL$
Alltså har ekvationen roten $x = 4$.
V.S.B.

C *Lösning*:
Från början:
Basen b och höjden h.
Arean $A_1 = bh$
Efter förändring:
Basen $2b$ och höjden $2h$.
Arean $A_2 = 2b \cdot 2h = 4bh$
$A_2 = 4A_1$, dvs. arean blir fyra gånger så stor.
V.S.B.

D *Lösning*:
Det räcker med att hitta ett exempel.
$a^2 + b^2 = c^2$ och
$a = 3, b = 4, c = 5$ ger
$VL = 3^2 + 4^2 = 25$
$HL = 5^2 = 25$
$VL = HL$
V.S.B.

1104 **A** Sant påstående.

B Inget påstående eftersom det varken är sant eller falskt.

C Sant påstående.

D Falskt påstående.

E Sant påstående.
Lösning:
Det räcker att hitta ett exempel.
$a = 1$ och $b = 2$ ger
$a + b = 1 + 2 = 3$
och $ab = 1 \cdot 2 = 2$

1105 *Lösning*:
T.ex. har talen 1, 2, 4 och 6 summan $1 + 2 + 4 + 6 = 13$ som inte är delbart med 2.

1106 En rektangel är en fyrhörning med parvis parallella sidor, där alla vinklar är räta.

1107 *Lösning*:
$51 = 3 \cdot 17$
51 är alltså delbart med både 3 och 17.

1108 **A** *Lösning*:
$VL =$
$= (a + b)^2 = (a + b)(a + b) =$
$= a^2 + ab + ba + b^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2 = HL$
V.S.B.

B *Lösning*:
$VL = (a + b)(a - b) =$
$= a^2 - ab + ba - b^2 =$
$= a^2 - b^2 = HL$
V.S.B.

C *Lösning*:
$VL = 2^4 = 16$
$HL = 2^3 + 5 \cdot 2 = 8 + 10 = 18$
$VL < HL$
V.S.B.

1109 **A** Påståendet är falskt.
Lösning:
Kalla faktorerna a och b.
Deras produkt från början är då ab.
Om a ökar med 20 % och b minskar med 20 % blir den nya produkten
$1{,}2a \cdot 0{,}8b = 0{,}96ab$
Produkten har alltså minskat med 4 %.
Påståendet är motbevisat.

B Påståendet är sant.
Lösning:
Från början:
Täljaren a och nämnaren b.
Kvoten $= \dfrac{a}{b}$
Efter förändring:
Täljaren $1{,}2a$ och nämnaren $0{,}8b$.
Kvoten $= \dfrac{1{,}2a}{0{,}8b} = 1{,}5\dfrac{a}{b}$
Kvoten har ökat med 50 %.
V.S.B.

1110 *Lösning*:
Det räcker att visa att det finns *ett* tvåsiffrigt tal som påståendet stämmer för.
Prövning ger:
$x = 10$ ger $4 \cdot x + 12 = 52$.
Ej ett kvadrattal.
$x = 11$ ger $4 \cdot x + 12 = 56$.
Ej ett kvadrattal.
$x = 12$ ger $4 \cdot x + 12 = 60$.
Ej ett kvadrattal.
$x = 13$ ger $4 \cdot x + 12 = 64$.
Ett kvadrattal ($64 = 8^2$).
V.S.B.

1114 a) $\Rightarrow$
Motivering:
Om Kim bor i Malmö medför det att Kim bor i Sverige.
Om Kim bor i Sverige behöver det inte medföra att Kim bor i Malmö.

b) $\Leftarrow$
Motivering:
En likbent triangel har minst två men inte säkert tre vinklar som är lika stora.
En triangel där vinklarna är lika stora är alltid likbent.

c) Varken eller.
Motivering:
Ekvationen $x - 1 = 9$ har roten $x = 10$.
Ekvationen $8 - 2x = x - 7$ har roten $x = 5$.

d) $\Rightarrow$
Motivering:
$x > 0$ medför att $x^2 > 0$.
Omvändningen gäller inte eftersom $x^2 > 0$ också kan medföra att $x < 0$, t.ex. $9 = (-3)^2$

e) $\Leftrightarrow$
Motivering:
n är udda $\Rightarrow$ $n = 2k + 1$ och
$n = 2k + 1$ $\Rightarrow$ n är udda

f) $\Rightarrow$
Motivering:
$y = x + 2$ medför $y' = 1$.
Omvändningen gäller inte. Det finns flera funktioner vars derivata är 1, t.ex. $y = x + 1$.

g) $\Leftrightarrow$
Motivering:
$\lg x = 2 \Rightarrow x = 100$ och
$x = 100 \Rightarrow \lg x = 2$

1115 a) $3x + 7 = x + 1 \Rightarrow$
$2x = -6 \Rightarrow x = -3$

b) $x = -3 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow$
$3x = x - 6 \Rightarrow 3x + 7 = x + 1$

c) Ja.
$3x + 7 = x + 1 \Leftrightarrow x = -3$

1116 a) *Bevis*:
Ett jämnt tal: $2n$ (n heltal)
Ett udda tal: $2k + 1$ (k heltal)
Bevis:
$2n + 2k + 1 = 2(n + k) + 1 =$
$= 2m + 1$
(m är ett heltal eftersom n och k är heltal)
Summan är ett udda tal.

V.S.B.

b) *Bevis*:
Två udda tal:
$2n + 1$ och $2k + 1$
(n och k är heltal)
$(2n + 1)(2k + 1) =$
$= 4nk + 2n + 2k + 1 =$
$= 2(2nk + n + k) + 1 =$
$= 2p + 1$ ($p = 2nk + n + k$)

Produkten är ett udda tal.

V.S.B.

1117 a) *Lösning*:
Vi bevisar påståendet:

Ett jämnt tal kan skrivas $x = 2n$, där n är ett heltal.

Kvadraten på talet: $(2n)^2 = 4n^2$

$4n^2$ är delbart med 4 eftersom det innehåller faktorn 4.

V.S.B.

b) *Lösning*:
Det räcker att hitta ett motexempel.
Kvoten $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ är inte jämn.

1118 $A + B + C = 180°$
(vinkelsumma)
$A + B + 90° = 180°$
$A + B = 90°$
$\sin(A + B) = \sin 90° = 1$

V.S.V.

1119 a) Triangeltal: $n(n + 1)/2$
Kvadrattal: n^2

b) Slutsats: Summan av två på varandra följande triangeltal är ett kvadrattal.

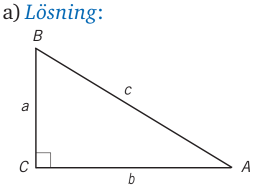
c) *Lösning*:
Summan av två på varandra följande triangeltal:

$$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} =$$
$$= \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

Summan är ett kvadrattal.

V.S.B.

1120 a) *Lösning*:

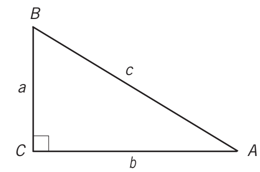


Om triangeln är rätvinklig ger cosinussatsen att

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C =$
$= a^2 + b^2 - 2ab \cos 90° =$
$= a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$

V.S.B.

b) *Lösning*:



Om Pythagoras sats är uppfylld, dvs. $c^2 = a^2 + b^2$, ger cosinussatsen

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
att $\cos C = 0$, dvs. $C = 90°$

V.S.B.

1121 *Lösning*:
Två på varandra följande jämna tal kan skrivas $2n$ och $2(n + 1)$, där n är ett heltal. Produkten blir:

$2n \cdot 2(n + 1) = 2 \cdot 2 \cdot n(n + 1) =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot m$

Den sista likheten motiveras av att antingen n eller $(n + 1)$ är ett jämnt tal.

$8m$ är delbart med 8.

V.S.B.

1122 Hon har rätt.
Lösning:
Om n är ett jämnt tal:
$n = 2k$, där k är ett heltal.

Uttrycket kan skrivas:
$(2k) + 7 \cdot 2k + 12 =$
$= 4k^2 + 14k + 12 =$
$= 2(2k^2 + 7k + 6)$

Det sista uttrycket är ett jämnt tal eftersom det innehåller faktorn 2.

Om n är ett udda tal:
$n = 2m + 1$, där m är ett heltal.
Uttrycket kan skrivas:
$(2m + 1)^2 + 7(2m + 1) + 12 =$
$= 4m^2 + 4m + 1 + 14m +$
$+ 7 + 12 = 4m^2 + 18m + 20 =$
$= 2(2m^2 + 9m + 10)$

Det sista uttrycket är ett jämnt tal eftersom det innehåller faktorn 2.

Lilis påstående stämmer för alla möjliga värden på n.

V.S.B.

1123 *Bevis*:
$n^3 - n = n(n^2 - 1) =$
$= n(n - 1)(n + 1)$

Uttrycket kan skrivas som en produkt av tre på varandra följande heltal varav ett måste vara delbart med tre. Därför måste hela uttrycket vara delbart med 3.

(Är $n = 0$ är uttryckets värde noll vilket är delbart med tre)

V.S.B.

1203 a) **B** och **E** är primtal.
Motivering:
Både 11 och 23 är positiva heltal större än 1 som bara är delbara med sig själva och ett.

b) **A** och **D** är sammansatta tal.
Motivering:
A $9 = 3 \cdot 3$
D $35 = 5 \cdot 7$

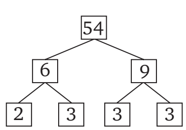
Kommentar:
C –12 är varken ett primtal eller ett sammansatt tal eftersom det är mindre än 1.

1204 Nej, det har han inte.
Motivering:
6 är inte ett primtal, det kan skrivas $6 = 2 \cdot 3$.

En fullständig uppdelning av 210 i primtalsfaktorer är:

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

1205 a)



b) $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

c) 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 och 54

1206 a) 11, 13, 17, 19, 23 och 29

b) 97

1207 **A** 15 är delare i 1 170.
Motivering:
1 170 innehåller alla faktorer i 15 ($= 3 \cdot 5$).

B 20 är inte delare i 1 170.
Motivering:
1 170 innehåller inte alla faktorer i 20 ($= 4 \cdot 5$).

C 30 är delare i 1 170.
Motivering:
1 170 innehåller alla faktorer i 30 ($= 2 \cdot 3 \cdot 5$).

D 39 är delare i 1 170.
Motivering:
1 170 innehåller alla faktorer i 39 ($= 3 \cdot 13$).

E 72 är inte delare i 1 170.
Motivering:
1 170 innehåller inte alla faktorer i 72 ($= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$).

1208 Jonna har fel.
Motivering:
T.ex. talet 20 är delbart med 4 och 10 men inte med 40.

1209 Det gäller för talen 12, 18, 24, 30, 36, 42 och 48.

1210 a) Ja, $2n - 1$ är udda.
Motivering:
$2n$ är ett jämnt tal om n är ett heltal, alltså är $2n - 1$ udda.

b) Ja, $2n - 2$ är jämnt.

c) Nej, det kan inte avgöras.
Motivering:
Om n är jämnt så är $n - 1$ udda. Om n är udda så är $n - 1$ jämnt.

d) Nej, det kan inte avgöras.

1211 *Lösning*:
Det finns flera möjliga svar eftersom $105 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
T.ex:
Två barn 7 år och 15 år eller tre barn 3 år, 5 år och 7 år eller fyra barn 1 år, 3 år, 5 år och 7 år.

1212 a) $116\,435 = 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 73$

b) –

1213 *Förklaring*:
Av tre på varandra följande tal är (minst) ett jämnt (delbart med 2) och ett delbart med 3. Produkten är därför delbar med $2 \cdot 3 = 6$.

1214 a) 11 och 13, 17 och 19, 29 och 31, 41 och 43, 59 och 61, 71 och 73

b) 617 och 619

1215 T.ex. 7 och 14
Ledtråd:
Talet måste innehålla 7 som en faktor.

1216 *Lösning*:
Anta att $x - y = 2n + 1$, där n är ett heltal.

Fall 1, x är jämnt:
Om x är jämnt kan det skrivas $x = 2k$, där k är ett heltal.

$x - y = 2n + 1$ kan då skrivas
$2k - y = 2n + 1 \Leftrightarrow$
$y = 2(k - n) - 1$
y måste vara udda.

Fall 2, x är udda:
Om x är udda kan det skrivas $x = 2k + 1$, där k är ett heltal.

$x - y = 2n + 1$ kan då skrivas
$2k + 1 - y = 2n + 1 \Leftrightarrow$
$y = 2(k - n)$
y måste vara jämnt.

Alltså måste ett tal vara jämnt och ett vara udda.

V.S.V.

1219 a) Ja

b) 78 har siffersumman 15.

c) Ja

d) $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$

1220 **C** 6 637 är ett primtal.
Motivering:
A och **D** har en siffersumma som är delbar med 3.

B är jämnt och därför delbart med 2.

1221 a) Sant.
Motivering:
710 slutar på noll och är därför delbart med 5.

b) Sant.
Motivering:
216 slutar på 16 som är delbart med 4.

c) Falskt.
Motivering:
402 är delbart med 3 eftersom siffersumma är 6 och alltså delbar med 3.

d) Falskt.
Motivering:
202 är ett jämnt tal, men siffersumman är inte delbar med 3.

1222 a)

n	$4n-1$
2	7
3	11
4	15
5	19
6	23
7	27

b) 7, 11, 19 och 23 är primtal.

c)

n	$4n+1$
2	9
3	13
4	17
5	21
6	25
7	29

d) 13, 17 och 29 är primtal.

e) $13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2$
$17 = 16 + 1 = 4^2 + 1^2$
$29 = 25 + 4 = 5^2 + 2^2$

1223 *Förklaring*:
101 är ej delbart med något av primtalen mindre än 11 (2, 3, 5, 7) Om 101 är ett sammanssatt tal så har det två primfaktorer större än 11 vars produkt är 101.

Detta är inte möjligt eftersom $11 \cdot 11 = 121$

1224 1, 2, 5, 10, 127, 254, 635 och 1 270

1225 *Lösning*:
$\frac{m^2-1}{8} = \frac{(8k+1)^2-1}{8} =$
$= \frac{64k^2+16k+1-1}{8} =$
$= 8k^2 + 2k = 2(4k^2 + k)$
vilket är jämnt eftersom $(4k^2 + k)$ är ett heltal.

1226 Talet har 12 431 024 siffror.
Lösning:
Ett tal A med n siffror kan skrivas
$A = a \cdot 10^n$ där $0{,}1 \le a < 1$.
$\sqrt{A} = \sqrt{a \cdot 10^n} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{10^n} =$
$= \sqrt{a} \cdot 10^{0{,}5n}$
vilket är ett tal vars heltalsdel har hälften så många siffror om n är jämnt.
$\frac{24862048}{2} = 12431024$

1227 *Lösning*:
Talet kan skrivas
$a + 10b + 100c + 1000d + \ldots$
osv. där $a, b, c, d, \ldots$ är heltal.

Om $a + 10b = 4n$, där n är ett heltal, kan talet skrivas $4(n + 25c + 250d + \ldots.)$ vilket innebär att talet är delbart med 4.

1228 *Lösning:*
Det räcker med ett motbevis:
$p = 11$ ger
$m = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$

Dvs. m är inte ett primtal.

1229 *Lösning*:
$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
$p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$

Eftersom p är ett primtal > 3 så måste p vara udda och både $p + 1$ och $p - 1$ vara jämna.

Båda talen är alltså delbara med två, och ett av dem är delbart med 4 eftersom varannat jämnt tal är delbart med 4.

Ett av talen $(p + 1)$ och $(p - 1)$ är delbart med 3, eftersom vart tredje tal är delbart med 3 och p är ett primtal.

$(p + 1)(p - 1)$ är därför delbart med $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

1230 *Lösning*:
Faktorisera $4^n - 1$ med konjugatregeln:
$4^n - 1 = \left((2^n)^2 + 1\right)\left((2^n)^2 - 1\right)$
Faktorerna $\left((2^n)^2 + 1\right)$ och $\left((2^n)^2 - 1\right)$ är båda heltal större än 1 när $n > 1$.

1233 a) 2, 3 och 6

b) SGF(12, 30) = 6

c) MGM(12, 30) = 60

1234 a) SGF(45, 75) = 15

b) MGM(45, 75) = 225

c) SGF(27, 36) = 9

d) MGM(27, 36) = 108

1235 Den 75:e kunden.
Lösning:
Vi söker det minsta tal som innehåller både 15 och 25 som en faktor, dvs. MGM(10, 25).
$15 = 3 \cdot 5$
$25 = 5 \cdot 5$
MGM(15, 25) = $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$

1236 300 s
Ledtråd:
Bestäm MGM(50, 60).

1237 a) Nej.
Motivering:
Nämnaren och täljaren saknar gemensamma faktorer.

b) $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$
$110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$
$\frac{66}{110} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 11}{2 \cdot 5 \cdot 11} = \frac{3}{5}$

1238 a) 68 år
Ledtråd:
MGM(4, 17)

b) 102 år

c) De minskar till 16 resp. 48 år.

d) De minskar till 36 resp. 18 år.

Kommentar:
Cikadornas livscykel är ett primtal vilket ger fördelar för deras överlevnad.

1239 a) SGF(7, 31) = 1

b) MGM(7, 31) = 217

c) SGF(12, 18, 30) = 6

d) MGN(12, 18, 30) = 180

1240 *Lösning*:
Det räcker att hitta ett motexempel.
SGF(4, 9) = 1
Varken 4 eller 9 är primtal.

1241 MGN(20, 21, 30) = 420

$$\frac{7}{20}+\frac{4}{21}-\frac{7}{30}=\frac{147+80-98}{420}=$$
$$=\frac{129}{420}=\frac{129/3}{420/3}=\frac{43}{140}$$

1242 Två tal är relativt prima om de saknar gemensamma faktorer förutom 1. T.ex. är talen 6 och 35 relativt prima.

1243 a) $6a$ b) $12a^2b$

1244 17 rövare

1245 a) $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
$15 = 3 \cdot 5$
SGF(12, 15) = 3
MGM(12, 15) =
$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
SGF(12, 15) · MGM(12, 15) =
$= 3 \cdot 60 = 180$ och
$12 \cdot 15 = 180$

b) $10 = 2 \cdot 5$
13 är ett primtal
SGF(10, 13) = 1
MGM(10, 13) =
$=2 \cdot 5 \cdot 13 = 130$
SGF(10, 13) · MGM(10, 13) =
$= 1 \cdot 130 = 130$ och
$10 \cdot 13 = 130$

c) Ja, hon har rätt.
Motivering:
$a = g \cdot k$ och $b = g \cdot m$
där g är den största gemensamma faktorn i a och b.
SGF(a, b) · MGM(a, b) =
$= (g) \cdot (k \cdot g \cdot m) = ab$

1246 Möjliga värden på n är 143, 1 287, 7 007 och 63 063.

1247 T.ex. $x = 1$ eller $x = 2$

1248 *Ledtråd*:
Utnyttja att a och b samt a och c inte har några gemensamma faktorer.

1304 a) 1
Ledtråd
$7 = 4 \cdot 4 + 1$
b) 4
c) 0
d) 11
Ledtråd:
$147 = 8 \cdot 17 + 11$

1305 a) $41 = 8 \cdot 5 + 1$
$16 = 3 \cdot 5 + 1$
Både 41 och 16 har resten 1 vid division med 5.
b) $64 = 5 \cdot 12 + 4$
$40 = 3 \cdot 12 + 4$
Både 64 och 40 har resten 4 vid division med 12.

1306 a) I ”8-klockan” hamnar 8 vid 0 och 9 (= 8 + 1) vid 1, dvs. 9 och 1 ger båda resten 1 vid division med 8.
9 är kongruent med 1 modulo 8.
b) 16 motsvarar 0 i ”8-klockan” då $16 = 2 \cdot 8$.
16 är kongruent med 0 modulo 8, dvs. 16 är delbart med 8.
c) 19 och 11 motsvarar båda ”klockan 3” i figuren, dvs. 19 är kongruent med 11 modulo 8.
d) –1 ligger ett steg moturs från 0 i ”8-klockan” vilket också 7 gör.
–1 är kongruent med 7 modulo 8.
Kommentar:
Observera att två tal är kongruenta modulo 8 om differensen är delbar med 8.

1307 a) $15 \equiv 3 \pmod 6$
b) $32 \equiv 0 \pmod 8$
c) $35 \equiv 17 \pmod 2$

1308 a) Ja
Motivering:
Både 1 125 och 319 har resten 7 vid division med 13.
b) Nej
Motivering:
1 669 har resten 5 vid division med 13.
1 759 har resten 4 vid division med 13.

1309 Nej.
Sana kommer fram kl. 19 och Idriss kommer fram kl. 7.
Motivering:
91 är inte kongruent med modulo 24.

1310 a) 5 b) 1

1311 $x = –2$ och $x = 7$

1312 $x = a \cdot n \cdot m + r$, där a och r är heltal och $0 \le r < n$

1317 a) $7 + 10 \equiv 2 + 0 = 2 \pmod 5$
b) $21 + 15 + 38 \equiv 1 + 0 + 3 = 4 \pmod 5$
c) $13 \cdot 11 \equiv 3 \cdot 1 = 3 \pmod 5$
d) $101 \cdot 12 \equiv 1 \cdot 2 = 2 \pmod 5$

1318 a) $122 – 9 \equiv 2 – 0 = 2 \pmod 3$
b) $98 – 37 + 105 \equiv 8 – 1 + 6 = 13 \equiv 4 \pmod 9$
c) $27 \cdot 18 \equiv 3 \cdot 2 = 6 \equiv 2 \pmod 4$
d) $70 \cdot 25 \equiv 10 \cdot 1 = 10 \pmod{12}$

1319 a) *Lösning*:
$22^3 \equiv 2^3 = 8 \pmod{10}$
b) *Lösning*:
$22^2 \equiv 2^2 = 4 \equiv 0 \pmod 4$

1320 a) $x = 2$ b) $x = 13$

1321 a) T.ex. $x = 2$ b) T.ex. $x = 8$

1322 a) T.ex. $x = 6$ och $x = 13$
b) T.ex. $x = 1$ och $x = 4$

1323 *Lösning*:
$12^5 – 1 \equiv 1^5 – 1 = 0 \pmod{11}$

1324 a) 1

Lösning:
$2^{30} \equiv (-1)^{30} = 1 \pmod 3$

eller

$2^{30} \equiv (2^2)^{15} = 4^{15} \equiv 1^{15} =$
$= 1 \pmod 3$

b) –1

c) 4

Lösning:
$3^{40} = (3^2)^{20} \equiv 2^{20} = (2^3)^6 \cdot 2^2 =$
$= 8^6 \cdot 4 \equiv 1^6 \cdot 4 = 4 \pmod 7$

d) 0

Lösning:
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \equiv$
$\equiv 1 + 0 + 3 + 0 \equiv 0 \pmod 4$

Summan
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 100^3$
är kongruent med
$25(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \pmod 4$

1325 *Lösning:*
$(6a + 3)^2 = 36a^2 + 36a + 9 \equiv$
$\equiv 0a^2 + 0a + 3 = 3 \pmod 6$

1326 För $p = 31$ och $p = 61$

1327 *Lösning:*
$75\,700 + 32 \equiv 0 + 0 \pmod 4$

75 732 är kongruent med 0 modulo 4, vilket betyder att 75 732 är delbart med 4.

1328 *Lösning:*
$abcd = 1\,000a + 100b + 10c +$
$+ d = (999 + 1)a + (99 + 1)b +$
$+ (9 + 1)c + d \equiv$
$\equiv a + b + c + d \pmod 9$

Om siffersumman $a + b + c + d$ är delbar med 9, dvs. $9|(a + b + c + d)$, måste $a + b + c + d \equiv 0 \pmod 9$

Alltså måste $abcd$ vara delbart med 9.

V.S.V.

1329 a) Ja, $x = 7$ och $x = 22$.

Ledtråd:
Pröva dig fram.

b) Nej.

1330 a) *Lösning:*
$34^4 - 19^4 \equiv (-1)^4 - (-1)^4 =$
$= 1 - 1 = 0 \pmod 5$

b) *Lösning:*
$34^7 - 19^7 \equiv (-1)^7 - (-1)^7 =$
$= (-1) - (-1) = 0 \pmod 5$

c) *Lösning:*
Om n är jämnt:
$34^n - 19^n \equiv (-1)^n - (-1)^n =$
$= 1 - 1 = 0 \pmod 5$

Om n är udda:
$34^n - 19^n \equiv (-1)^n - (-1)^n =$
$= (-1) - (-1) = 0 \pmod 5$

1331 *Lösning:*
$7^{2n} - 1 \equiv (-1)^{2n} - 1 =$
$= ((-1)^2)^n - 1 =$
$= 1^n - 1 = 0 \pmod 8$

1332 a) b) *Ledtråd:*
$k \cdot d + r_1 \equiv r_1 \pmod d$

1333 *Lösning:*
$649\,117 = 649 \cdot 10^3 + 117$ och
$10^3 \equiv -1 \pmod 7$ vilket ger att

$649\,117 \equiv 649 \cdot (-1) + 117 \equiv$
$\equiv 0 \pmod 7$
om $649 - 117 \equiv 0 \pmod 7$

1334 *Lösning:*
$a \equiv b \pmod c$ ger att
$a - b = k \cdot c$, där k är ett heltal.

$ma - mb = m(a - b) = m \cdot kc$
dvs. $ma \equiv mb \pmod c$

1335 *Lösning:*
$a_1 \equiv a_2 \Leftrightarrow a_1 - a_2 \equiv 0 \pmod c$
dvs. $a_1 - a_2$ är delbart med c.

$c|(a_1 - a_2)$ och $c|(a_2 - a_3)$ ger
$a_1 - a_2 = k \cdot c$ och $a_2 - a_3 = l \cdot c$,
där k och l är heltal.

Vi kan skriva
$a_1 = a_2 + k \cdot c$ och $a_3 = a_2 - l \cdot c$
vilket ger
$a_1 - a_3 = (a_2 + k \cdot c) - (a_2 - l \cdot c) =$
$= c(k + l)$

Vi ser att
$c|(a_1 - a_3) \Leftrightarrow a_1 \equiv a_3 \pmod c$

V.S.B.

1336 *Lösning:*
999 999 kan skrivas $10^6 - 1$.

Använd $10 \equiv 3 \pmod 7$
$10^6 \equiv 3^6 = (3^2)^3 = 9^3 \pmod 7$

Använd $9 \equiv 2 \pmod 7$
$9^3 \equiv 2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$.

Alltså $10^6 \equiv 1 \pmod 7$.
$999\,999 = 10^6 - 1 \equiv$
$\equiv 1 - 1 = 0 \pmod 7$
vilket innebär att 999 999 är delbart med 7.

V.S.V.

Historik: Diofantos, Fermat och Wiles

1 a) T.ex. $x = 2$, $y = -1$

b) T.ex. $x = 14$, $y = 10$

c) T.ex. $x = 3$, $y = 2$

d) T.ex. $x = 3$, $y = 2$

e) T.ex. $x = 9$, $y = 4$

f) T.ex. $x = 2$, $y = 4$, $z = 72$

2 84 år

3 T.ex. $x = 2$ och $y = 3$ ger $z = \sqrt[3]{35}$, vilket är en reell lösning.

4 a) En heltalslösning till ekvationen $y^2 = x^3 + 1$ är $x = 2$ och $y = 3$

b) En heltalslösning till ekvationen $y^2 = x^3 - x^2 + x$ är $x = 1$ och $y = 1$

c) En heltalslösning till ekvationen $y^2 = x^3 + x^2$ är $x = 3$ och $y = 6$

5 a) $x = 43$ ger $y^2 = 43^3 + 17 =$
$= 79\,524$ och $y = \pm 282$

b) $x = 2$ ger $y^2 = 2^3 + 17 = 25$
och $y = \pm 5$

$x = 4$ ger $y^2 = 4^3 + 17 = 81$
och $y = \pm 9$

$x = 8$ ger $y^2 = 8^3 + 17 = 527$
och $y = \pm 23$

1339 a) 7 siffror: 0, 1, 2, 3, 4, 5 och 6

b) 3 siffror: 0, 1 och 2

1340 a) $9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 1$

b) $1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1$

1341 a) $132_{\text{fem}} = 42_{\text{tio}}$

b) $110011_{\text{två}} = 51_{\text{tio}}$

c) $323_{\text{fyra}} = 59_{\text{tio}}$

d) $1202_{\text{tre}} = 47_{\text{tio}}$

1342 a) X = 1 b) X = 0

1343 a) Det krävs 9 siffror.

b) Det krävs 11 siffror.

1344 a) 1030_{fyra}

Lösning:
Basen fyra har 1-tal, 4-tal, 16-tal, 64-tal, osv.

76 räcker till 1 st 64-tal och 3 st 4-tal dvs.

$1 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 1 =$
$= 76$

b) 201_{sju}

1345 a) 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20
b) 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101

1346 a) Udda
Ledtråd:
Omvandla till bas 10.
b) Udda

1347 Nils har fel.
T.ex. $100\,000_{\text{tio}} = 303240_{\text{åtta}}$

1348 *Lösning:*
Vi väljer att skriv om till basen 10.
$32_{\text{fyra}} = 3 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 14_{\text{tio}}$
$23_{\text{fyra}} = 2 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 11_{\text{tio}}$
$14_{\text{tio}} + 11_{\text{tio}} = 25_{\text{tio}}$
$25_{\text{tio}} = 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 40 =$
$= 121_{\text{fyra}}$
Summan är ett tresiffrigt tal.
V.S.V.

1352 a) $101000_{\text{två}}$ c) 55_{sju}
b) 130_{fem} d) 34_{tolv}

1353 a) 37_{tio} c) 11_{sexton}
b) 43_{tio} d) $1F_{\text{sexton}}$

1354 a) ☺ ¤ ¤ ¤ ◊
b) ¤ ¤ ¤ ¤ ¤
c) ¤ ¤ ¤ ◊

1355 a) $31_{\text{fyra}} = 16_{\text{sju}}$
b) $31_{\text{sju}} = 112_{\text{fyra}}$

1356 a) $1011001100_{\text{två}} = 1314_{\text{åtta}}$
b) $413_{\text{åtta}} = 100001011_{\text{två}}$

1357 $FFF_{\text{sexton}} = 4\,095_{\text{tio}}$

1358 a) X = 2 b) X = 2

1359 a) 3202_{fem} b) $2B7_{\text{tolv}}$

1360 a) $b = 6$ b) $b = 9$

1361 a) 954_{sexton}
b) $10110100011_{\text{två}}$

1362 a) 810_{tio}
b) $1452_{\text{åtta}}$
c) $32A_{\text{sexton}}$

1363 X = 6 Y = 6
Ledtråd:
Finn X < 12 och Y < 7 så att
$X \cdot 12^2 + 5 \cdot 12 + 4 =$
$= 2 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + Y \cdot 7 + 4$

1364 x = fem och y = två

1365 Regeln gäller bara de baser n där $n \equiv 1 \pmod 3$, t.ex. 4, 7, 10, 13 osv.
Jämför med löst uppgift 1314.

1366 a) 8 (mod 10)
Ledtråd:
Beräkna summan i bas tio eller skriv i utvecklad form och använd räkneregler för kongruenser.
b) 2 (mod 5)

1367 $1000000_{\text{två}}$
Ledtråd:
Utnyttja att $1_{\text{två}} + 1_{\text{två}} = 10_{\text{två}}$

Historik:
64 blev 8 blev ingenting

1 a) nm c) lto
b) lln d) llfm

2 a) 39 c) 77
b) 153 d) 52

3 a) 42 c) 1 793
b) 448 d) 299 593

4 Talet 10 går bara att halvera en gång innan man får decimaltal. 8 respektive 64 går att halvera tre respektive sex gånger.

5 –

1404 a) 5, 8, 11, 14, 17
b) –10, –5, 0, 5, 10
c) 12, 6, 4, 3, 12/5
d) 5, 8, 13, 20, 29

1405 a) 45, 55, 65, 75, 85
b) $a_{20} = 235$

1406 $a_n = 2 \cdot n$

1407 a) 8, 24, 72, 216, 648
b) 80, 40, 20, 10, 5
c) 16, 24, 36, 54, 81

1408 $a_3 = 3^2 + 3 = 12$
$b_3 = 2^3 + 4 = 12$

1409 a) Nr 16
Ledtråd:
Lös ekvationen
$8n + 4 = 132$
b) Nr 12

1410 a) $a_n = 6n$ d) $a_n = n^3$
b) $a_n = 3^{n-1}$ e) $a_n = n^2 + 1$
c) $a_n = 2 - 3n$ f) $a_n = (-1)^n$

1411 Nej.
Lösning:
De tre första talen är 1, 2, 4 i båda talföljderna. Det fjärde talet är inte lika, $a_4 = 7$ och $b_4 = 8$.

1412 a) Nej.
Motivering:
Lösningen till
$12n + 28 = 850$
ger inte ett heltal.
b) Ja, det 24:e elementet är 850.

1413 80 av talen är mindre än 50.

1414 $x = 3$

1415 a) $a_n = \dfrac{3+n}{2+n}$ b) $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

1416 $\frac{5}{4}$, 5, 20, 80, 320, 1 280

1417 $v_n = \dfrac{180°(n-2)}{n}$

1418 $a = 0{,}5$ och $b = -1{,}5$
Formeln kan skrivas
$D_n = 0{,}5n^2 - 1{,}5n = \dfrac{n^2 - 3n}{2}$

1419 $a_n = 29 + (n-1) \cdot (-1) =$
$= 29 + (1-n) = 30 - n$
$a_{55} = -25$

1423 $a_2 = 9 \quad a_3 = 17$

1424 a) 6, 15, 33, 69, 141
b) 5, 6, 8, 11, 15
Ledtråd:
$a_2 = 5 + 1 = 6$
c) 2, 2, 2, 2, 2

1425 a) $a_1 = 10$ och $a_{n+1} = a_n + 3$
b) $a_1 = 5$ och $a_{n+1} = a_n \cdot 3$
c) $a_1 = 20$ och $a_{n+1} = a_n - 5$

1426 a) $a_5 = 23$
Ledtråd:
$a_3 = 1 + 2 \cdot 3 = 7$
b) $a_5 = 866$

1427 $a_1 = 4$ och $a_{n+1} = a_n \cdot 1{,}5$

1428 $a_2 = 10 \quad a_3 = 30$

1429 a) $a_n = 2^n$
Ledtråd:
Beräkna de första talen i talföljden för att lättare hitta formeln.
b) $a_n = 3^{n-1}$
c) $a_n = 5 \cdot n$
d) $a_n = 3^n + 1$

1430 Explicit formel:
$a_n = n^2$

Rekursionsformel:
$a_1 = 1$ och $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$

1431 a) $a_3 = 14$ och $a_4 = 30$
b) $a_{100} = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 +$
$+ \ldots + 100^2$

a_{100} är alltså summan av kvadraterna på alla positiva heltal t.o.m. 100.

1432 $a_1 = 7$
Ledtråd:
$a_5 + a_6 = 59$
där $a_6 = a_5 + 5$

1433 a) $a_3 = 3{,}464\,28\ldots$
$\sqrt{12} = 3{,}46410\ldots$
De tre första decimalerna överensstämmer.
b) $a_{n+1} = \sqrt{12}$ om $a_n = \sqrt{12}$
c) $a_{n+1} = 0{,}5\left(\dfrac{23}{a_n} + a_n\right)$
och $a_1 = 4$
d) $\sqrt{23} \approx 4{,}80$

1434 $a_{n+1} = 3a_n + 1$ där $a_1 = 0$

1435 a) $p_1 = 12{,}66\ldots$
$p_2 = 15{,}59\ldots$
$p_3 = 18{,}58\ldots$
b) $p_n \to 30$ då $n \to \infty$
Ledtråd:
Uttrycket i parentesen går mot 1.

Historik: Summan av en aritmetisk talföljd

1 a) 140 b) 1 850

2 a) 1 548 b) 2 900

3 a) $a_{n+1} = a_n + 2$ där $a_1 = 1$
b) $a_n = 2n - 1$
c) $\sum_{k=1}^{100} (2k-1) = 10\,000$

4 $\sum_{k=1}^{11} (9 + 3k) = 297$

5 a) Antal primtal under 50: 15
$\dfrac{50}{\ln 50} \approx 13$
b) Antal primtal under 100: 25
$\dfrac{100}{\ln 100} \approx 22$
c) Antal primtal under 1 000: 168
$\dfrac{1\,000}{\ln 1\,000} \approx 145$
Satsen stämmer i alla tre fall.
Kommentar:
Satsen bevisades först flera år efter Gauss död.

Tema: Summan av en geometrisk talföljd

1 a) 160
Ledtråd:
$a_1 = 10,\ k = 1{,}02$ och $n = 14$
b) 4 161
Ledtråd:
$a_1 = 1000,\ k = 0{,}8$ och $n = 8$

2 a) 320 mg (324,8)
b) 330 mg (333,1 …)

3 Ca $2{,}6 \cdot 10^{47}$
Ledtråd:
$a_1 = 1$ och $k = 3$

4 Nej, det är inte möjligt.
Motivering:
Antal korn $= 2^{64} - 1 \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}$
Ett korn väger 0,03 g.
Alla korn väger $5{,}5 \cdot 10^{14}$ kg $=$
$= 5{,}5 \cdot 10^{11}$ ton $=$
$=$ 550 miljarder ton

5 Total sträcka är 35,6 m.
Ledtråd:
Sammanlagt 10 fallsträckor och 9 sträckor som bollen rör sig uppåt.

6 Hon ska skriva ut 20 g.

7 Mängden närmar sig 40 mg.
Motivering:
Mängden ges av
$\dfrac{20(0{,}5^n - 1)}{0{,}5 - 1} = -40(0{,}5^n - 1)$
Uttrycket närmar sig 40, då n blir oändligt stort.

8 Efter 13,5 år.

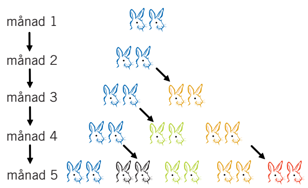
Historik: Fibbonaccis talföljd

1 a) Det trettonde elementet är 233. Det fjortonde elemntet är är 377.

b) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$,
$a_1 = 1, \ a_2 = 1$

2

Månad	Kaninpar
1	1
2	1
3	1 + 1 = 2
4	1 + 2 = 3
5	2 + 3 = 5



3 Kvoterna

$\frac{13}{8} = 1{,}625$ $\qquad \frac{21}{13} \approx 1{,}6154$

$\frac{34}{21} \approx 1{,}6190$ $\qquad \frac{55}{34} \approx 1{,}6176$

verkar närma sig Gyllene snittet,

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180$

4 a) 1 5 10 10 5 1

b) Diagonalernas summa blir Fibonaccis talföljd.

1503 a) *Lösning*:
Anta att påståendet är falskt vilket innebär att det finns trianglar med två trubbiga vinklar.

Det innebär att två vinklar är större än 90°.

Det är dock omöjligt eftersom vinkelsumman då blir större än vinkelsumman för en triangel, 180°.

Antagandet stämmer inte. Det ursprungliga påståendet är alltså sant, det finns inga trianglar med två trubbiga vinklar.

V.S.B.

b) *Lösning*:
Anta att påståendet är falskt vilket innebär att a och b har samma tecken.

Om båda talen är positiva, dvs. $a > 0$ och $b > 0$, måste $a + 5b > 0$.

Om båda talen är negativa, dvs. $a < 0$ och $b < 0$, måste $a + 5b < 0$.

Alltså är det ursprungliga påståendet är alltså sant, talen måste ha olika tecken.

V.S.B.

c) *Lösning*:
Anta att påståendet är falskt vilket innebär att det finns rätvinkliga trianglar där sidorna förhåller sig som 5 : 6 : 8.

Sätt sidornas längd till $5x$, $6x$ och $8x$.

Om triangeln är rätvinklig måste Pythagoras sats gälla.

$(5x)^2 + (6x)^2 =$
$= 25x^2 + 36x^2 = 61x^2$

$(8x)^2 = 64x^2$

Pythagoras sats gäller inte, alltså stämmer inte antagandet.

Det ursprungliga påståendet måste vara sant.

V.S.B.

1504 a) *Lösning*:
$x = 4$ ger
$\text{VL} = 4^2 - 2 \cdot 4 - 8 =$
$= 16 - 8 - 8 = 0 = \text{HL}$

Alltså finns det heltal som löser ekvationen.

V.S.B.

b) *Lösning*:
Till exempel har ekvationen $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0$ lösningarna $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ och $x_3 = -3$.

V.S.B.

1505 a) $n = 1$ ger $4n - 1 = 3$.
Ett primtal.

$n = 3$ ger $4n - 1 = 11$.
Ett primtal.

$n = 5$ ger $4n - 1 = 19$.
Ett primtal.

b) *Lösning*:
Det räcker att hitta ett motexempel för att visa att påståendet är falskt.

$n = 7$ ger $4n - 1 = 27$.
Inte ett primtal!

Påståendet är alltså falskt.

V.S.B.

1506 *Lösning*:
Om termen 94 ingår i summan, måste termen kunna skrivas $2k + 7$, där k är ett heltal.
$2k + 7 = 94$
$2k = 87$
$k = 43{,}5$

k är inte ett heltal, alltså ingår inte termen i summan.

V.S.B.

1507 *Förklaring*:
Talet $n = 211$ är inte delbart med 2, 3, 5 eller 7. Vi får med alla divisioner en rest 1.
Det måste då vara ytterligare ett primtal, vilket motsäger vårt antagande som alltså är fel.

1508 *Lösning*:
Talföljden kan skrivas med en explicit formel:

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Om talet 87 406 ingår i talföljden måste ekvationen

$3 \cdot 2^{n-1} = 87\,406$ ha en heltalslösning.

Ett digitalt verktyg ger
$n \approx 15{,}83$

Ekvationen har inte en heltal-slösning, alltså ingår inte talet 87 406 i talföljden.

V.S.B.

1509 a) *Lösning*:
Det räcker att hitta ett exempel på heltal sådana att $x^2 = 4y^2$.

Eftersom produkten 4 finns i HL måste x^2 vara delbart med 4.

Vi testar $x = 2$ och $y = 1$:

$VL = 2^2 = 4$
$HL = 4 \cdot 1^2 = 4$
$VL = HL$

Alltså finns det heltal som löser ekvationen.

V.S.B.

b) *Lösning*:
Anta att påståendet är falskt vilket innebär att det finns heltal x och y sådana att $x^2 = 6y^2$.

Om $x^2 = 6y^2$ måste $\frac{x^2}{y^2} = 6$

Vi drar roten ur båda leden.

$\frac{x}{y} = \pm\sqrt{6}$

Detta är en motsägelse till att x och y är heltal eftersom $\pm\sqrt{6}$ är ett irrationellt tal som inte kan skrivas som kvoten av två heltal.

Det ursprungliga påståendet ”Det finns inga heltal x och y sådana att $x^2 = 6y^2$.” är alltså sant.

V.S.B.

1510 Från n hörn kan man dra en diagonal till $(n - 3)$ andra hörn.

Antalet diagonaler N i en n-hörning

$N = \frac{n(n-3)}{2}$

Gör ett motsägelsebevis.

Anta att det finns en n-hörning med 200 diagonaler och visa att ekvationens lösning är en motsägelse till att n är ett heltal.

1511 a) *Förklaring:*
$2b^2$ är jämnt, då måste även a^2 vara jämnt.Om a^2 är jämnt måste även a vara det.

b) Om både a och b går att dela med 2 motsäger det att a/b är förkortat så långt det går.

1512 *Lösning*:
Produkt: $x \cdot y$
x ökar med a procent och
y minskar med a procent.

Ny produkt:

$$\left(1+\frac{a}{100}\right)x \cdot \left(1-\frac{a}{100}\right)y =$$

$$= \left(1-\frac{a^2}{10\,000}\right)xy$$

Eftersom $a > 0$ kommer den nya produkten att vara mindre än xy.

V.S.B.

1514 a) $\neg P$: $x + y < 4$

b) $\neg P$: $a^2 + b^2 \neq c^2$

c) $\neg P$: Vi spelar inte fotboll.

d) $\neg P$: Ekvationen har minst en reell rot.

1515 a) $x > 8 \Rightarrow 0{,}5x + 2 > 6$

b) $x > 8$ Multiplicera båda leden med 0,5.

$0{,}5x > 4$ Addera 2 till båda leden.

$0{,}5x + 2 > 6$

$x > 8 \Rightarrow 0{,}5x + 2 > 6$, alltså
$\neg Q \Rightarrow \neg P$
Detta ger $P \Rightarrow Q$

V.S.B.

1516 Vi spelar inte fotboll vilket medför att det inte är sommar.

1517 *Lösning*:
P: x är ett heltal
Q: $2x - 5$ kan inte ha värdet 6

Vi ska visa $P \Rightarrow Q$ men visar istället $\neg Q \Rightarrow \neg P$

$2x - 5$ har värdet 6.
$2x - 5 = 6$
$2x = 11$
$x = 5{,}5$
x är inte ett heltal.

V.S.B.

1518 *Lösning*:
P: $3n + 2$ är udda
Q: n är udda

Vi ska visa $P \Rightarrow Q$ men visar i stället $\neg Q \Rightarrow \neg P$, dvs.
n är jämnt $\Rightarrow 3n + 2$ är jämnt.
n är jämnt och kan skrivas $2k$, där k är ett heltal.

$3n + 2 = 3 \cdot 2k + 2 = 2(3k + 1)$

$2(3k + 1)$ är ett jämnt tal eftersom det innehåller faktorn 2.

$\neg Q \Rightarrow \neg P$

Detta ger $P \Rightarrow Q$

V.S.B.

1519 Antagande: P
Slutsats: Q

I ett direkt bevis visar man att $P \Rightarrow Q$ genom att utgå från P och visa att slutsatsen Q är sann.

I ett indirekt bevis visar man att $P \Rightarrow Q$ genom att istället visa att $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

1520 a) Om två positiva reella tal båda är mindre än eller lika med 10 medför det att produkten av dessa är mindre än eller lika med 100.

b) $\neg Q$: $0 < x \leq 10$ och
$0 < y \leq 10$
$\neg P$: $xy \leq 100$

c) $0 < x \leq 10$ och
$0 < y \leq 10 \Rightarrow xy \leq 100$
Vi har därmed bevisat att
$xy > 100 \Rightarrow x > 10$
och/eller $y > 10$

1521 a) *Lösning*:
P: $ab < 0$
Q: a eller b är negativ

Vi ska visa $\Rightarrow$ men visar i stället $\neg Q \Rightarrow \neg P$

Om både a och b positiva eller båda är negativa kommer produkten att vara positiv, dvs. $ab > 0$.

V.S.B.

b) *Lösning*:
P: $x^2 = x$
Q: $x \geq 0$

Vi ska visa $P \Rightarrow Q$ men visar istället $\neg Q \Rightarrow \neg P$

$\neg Q$: $x < 0$

$\neg P$: $x^2 \neq x$

Om $x < 0$ är $x^2 > 0$.
Alltså måste $x^2 \neq x$.

V.S.B.

1522 a) *Lösning*:
P: $7a + 1$ är ett jämnt tal
Q: a är ett udda tal

Vi ska visa $P \Rightarrow Q$ men visar i stället $\neg Q \Rightarrow \neg P$

a är ett jämnt tal och kan skrivas $a = 2n$, där n är ett heltal.

$7 \cdot 2n + 1 = 14n + 1$ vilket är udda eftersom n är ett heltal.

V.S.B.

b) *Lösning*:
P: $a^2 - 2a + 7$ är ett jämnt tal
Q: a är ett udda tal

Vi ska visa $P \Rightarrow Q$ men visar i stället $\neg Q \Rightarrow \neg P$

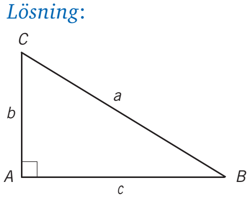
a är ett jämnt tal och kan skrivas $a = 2n$, där n är ett heltal.

$(2n)^2 - 2 \cdot 2n + 7 =$
$= 4n^2 - 4n + 6 + 1 =$
$= 2(2n^2 - 2n + 3) + 1 =$
$= 2k + 1$

vilket är udda eftersom k är ett heltal.

V.S.B.

1523 *Lösning*:



P: Triangeln är rätvinklig
Q: $a^2 = b^2 + c^2$

$\neg P$: Triangeln är inte rätvinklig
$\neg Q$: $a^2 \neq b^2 + c^2$

Visar satsen indirekt, dvs. att $\neg Q \Rightarrow \neg P$

Cosinussatsen gäller alla trianglar, dvs.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Om $a^2 \neq b^2 + c^2$ ger det att $2bc \cos A \neq 0$ vilket medför att $A \neq 90°$ eftersom $\cos 90° = 0$, dvs. triangeln är inte rätvinklig.

V.S.B.

1524 *Lösning*:
P: $x^3 + 3x^2 + 7x + 2 = 0$
Q: $x < 0$

Vi ska visa $P \Rightarrow Q$ men visar i stället $\neg Q \Rightarrow \neg P$

$x \geq 0$ ger att alla termer i uttrycket $x^3 + 3x^2 + 7x$ är större eller lika med noll och $x^3 + 3x^2 + 7x + 2 \geq 2$.

Detta visar att
$x^3 + 3x^2 + 7x + 2 \neq 0$.

V.S.V.

1525 *Lösning*:
P: a och b är heltal
Q: $a^2 - 4b \neq 2$

Vi ska visa $P \Rightarrow \neg Q$ ger en motsägelse.

a och b är heltal
$a^2 - 4b = 2$
$a^2 = 4b + 2$
$a^2 = 2(2b + 2)$

a^2 är ett jämnt tal eftersom det innehåller faktorn 2.

Om a^2 är ett jämnt tal så är även a ett jämnt tal (se uppgift 1513)

$a = 2n$ och $a^2 - 4b = 2$ ger
$4n^2 - 4b = 2$
$2n^2 - 2n = 1$
$2(n^2 - n) = 1$

VL är ett jämnt tal och HL är 1 vilket är en motsägelse.

V.S.B.

1528 a) *Lösning:*
För $n = 1$ får vi
VL = 2
HL = 1(1 + 1) = 2
VL = HL dvs. formeln gäller för $n = 1$.

b) Induktionsantagandet säger att formeln gäller för $n = p$, alltså att

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2p =$
$= p(p + 1)$

Vi visar nu att formeln i så fall även gäller för $n = p + 1$, alltså att

$2 + 4 + 6 + \ldots +$
$+ 2p + 2(p + 1) =$
$= (p + 1)(p + 2)$

Bevis
$\text{VL} = 2 + 4 + 6 +$
$+ \ldots + 2p + 2(p + 1) =$
$= p(p + 1) + 2(p + 1) =$
$= p^2 + 3p + 2 =$
$= (p + 1)(p + 2) = \text{HL}$

V.S.V.

1529 a) $s_n = \dfrac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$

b) *Lösning:*

1. För $n = 1$ får vi
   $\text{VL} = 2^1 = 2$ och
   $\text{HL} = 2^{1+1} - 2 = 2$

   VL = HL d.v.s. formeln gäller för $n = 1$

2. Induktionsantagande (formeln gäller för $n = p$)

   $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^p =$
   $= 2^{p+1} - 2$

3. Induktionssteget, visa att formeln i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att

   $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^p +$
   $+ 2^{p+1} = 2^{p+2} - 2$

   Bevis:
   $\text{VL} = 2 + 4 + 8 + \ldots$
   $+ 2^p + 2^{p+1} =$
   $= 2^{p+1} - 2 + 2^{p+1} =$
   $= 2 \cdot 2^{p+1} - 2 = 2^{p+2} - 2 =$
   $= \text{HL}$

   V.S.V.

1530 a) $6^2 = 36$ $\quad 6^3 = 216$

$6^4 = 1\,296$

b) 6^n, där n är ett heltal, slutar på siffran 6.

c) *Lösning:*

1. $n = 1$ ger $6^1 = 6$

2. Induktionsantagandet:
6^p har slutsiffran 6
dvs. $6^p = m \cdot 10 + 6$,
där m är ett heltal.

3. Induktionssteget, visa att
6^{p+1} slutar på siffran 6
Bevis:
$6^{p+1} = 6^p \cdot 6^1 =$
$= (m \cdot 10 + 6) \cdot 6 =$
$= 6 \cdot m \cdot 10 + 36 =$
$= 6m \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 6 =$
$= (6m + 3) \cdot 10 + 6$

6^{p+1} är ett tal som slutar på 6.

Vi har visat att om det gäller för 6^p så gäller det också för 6^{p+1}
vilket innebär att det gäller för samtliga fall.

V.S.B.

1531 *Lösning:*

1. För $n = 1$ får vi
$VL = 6 \cdot 1 - 3 = 3$ och
$HL = 3 \cdot 1^2 = 3$

$VL = HL$, dvs. formeln gäller för $n = 1$.

2. Induktionsantagande
(formeln gäller för $n = p$)

$3 + 9 + 15 + \ldots +$
$+ (6p - 3) = 3p^2$

3. Induktionssteget, visa att formeln i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att

$3 + 9 + 15 + \ldots +$
$+(6p - 3)+(6(p + 1)-3) =$
$= 3(p + 1)^2$

Bevis:
$VL = 3 + 9 + 15 + \ldots +$
$+(6p - 3)+(6(p + 1)-3) =$
$= 3p^2 + (6(p + 1) - 3) =$
$= 3p^2 + 6p + 3 =$
$= 3(p + 1)^2 = HL$

V.S.V.

1532 *Lösning:*

1. Formeln ska gälla för $n = 1$
vilket ger
$VL = 1 \cdot (3 \cdot 1 - 1) = 2$
$HL = 1^2 \cdot (1 + t) = 2$
$t = 1$

2. Induktionsantagande
(formeln gäller för $n = p$)
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots +$
$+ p(3p - 1) = p^2(p + 1)$

3. Induktionssteget, visa att formeln
i så fall gäller för $n = p + 1$,
alltså att
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots +$
$+p(3p-1)+(p+1)(3(p+1)-1) =$
$= (p + 1)^2(p + 2)$

Bevis:
$VL = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots +$
$+p(3p-1)+(p+1)(3(p+1)-1) =$
$= p^2(p + 1) + (p + 1)(3p + 2) =$
$= (p + 1)(p^2 + 3p +2) =$
$= (p + 1)(p + 1)(p + 2)$
$= (p + 1)^2(p + 2) = HL$

V.S.V.

1533 *Lösning*:

1. För $n = 1$ får vi $VL = 3$ och
$$HL = \frac{3^{1+1} - 3}{2} = \frac{9 - 3}{2} = 3$$
$VL = HL$, dvs. formeln gäller för $n = 1$.

2. Induktonsantagande
(formeln gäller för $n = p$)
$$3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^p = \frac{3^{p+1} - 3}{2}$$

3. Induktionssteget, visa att formeln i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att
$$3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^p + 3^{p+1} = \frac{3^{(p+1)+1} - 3}{2}$$
Bevis:
$VL = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots +$
$+ 3^p + 3^{p+1} =$
$$= \frac{3^{p+1} - 3}{2} + 3^{p+1} =$$
$$= \frac{3^{p+1} - 3 + 2 \cdot 3^{p+1}}{2} =$$
$$= \frac{3 \cdot 3^{p+1} - 3}{2} = \frac{3^{p+2} - 3}{2} =$$
$$= \frac{3^{(p+1)+1} - 3}{2} = HL$$
V.S.V.

1534 Mönstret är $1 + 4 + 7 + \ldots +$
$$+ 3n - 2 = \frac{n(3n - 1)}{2}$$
Lösning:

1. För $n = 1$ får vi $VL = 1$ och
$$HL = \frac{1(3 \cdot 1 - 1)}{2} = 1$$
$VL = HL$, dvs. formeln gäller för $n = 1$.

2. Induktionsantagande
(formeln gäller för $n = p$)
$$1 + 4 + 7 + \ldots + 3p - 2 = \frac{p(3p - 1)}{2}$$

3. Induktionssteget, visa att formeln i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att
$1 + 4 + 7 + \ldots +$
$+ 3p - 2 + 3(p + 1) - 2 =$
$$= \frac{(p + 1)(3(p + 1) - 1)}{2}$$
Bevis:
$VL = 1 + 4 + 7 + \ldots +$
$+ 3p - 2 + 3(p + 1) - 2 =$
$$= \frac{p(3p - 1)}{2} + 3(p + 1) - 2 =$$
$$= \frac{3p^2 - p + 6p + 6 - 4}{2} =$$
$$= \frac{3p^2 + 5p + 2}{2}$$
$$HL = \frac{(p + 1)(3(p + 1) - 1)}{2} =$$
$$= \frac{3p^2 + 5p + 2}{2}$$
$VL = HL$

V.S.V.

1535 a) **A** $\dfrac{8n - 6}{2}$ är inte en formel för summan.
Motivering:
$n = 1$ ger $s_1 = 1$ Stämmer
$n = 2$ ger $s_2 = 5$ Stämmer
$n = 3$ ger $s_3 = 9$ Stämmer inte

B $\dfrac{n(n + 2)}{3}$ är inte en formel för summan.
Motivering:
$n = 1$ ger $s_1 = 1$ Stämmer
$n = 2$ ger $s_2 = 8/3$
Stämmer inte

c $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ verkar vara en formel för summan.

Motivering:

$n = 1$ ger $s_1 = 1$ Stämmer

$n = 2$ ger $s_2 = 5$ Stämmer

$n = 3$ ger $s_3 = 14$ Stämmer

b) *Lösning*:

1. För $n = 1$ får vi

   $VL = 1$

   $HL = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$

   $VL = HL$ dvs. formeln gäller för $n = 1$.

2. Induktionsantagande (formeln gäller för $n = p$)

   $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{2}$

3. Induktionssteget, visa att formeln i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att

   $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + p^2 + (p+1)^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6}$

   Bevis:

   $VL = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + p^2 + (p+1)^2 =$

$$= \frac{p(p+1)(2p+1)}{2} + (p+1)^2 =$$

$$= \frac{p(p+1)(2p+1) + 6(p+1)^2}{2} =$$

$$= \frac{(p+1)(p(2p+1) + 6(p+1))}{6} =$$

$$= \frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6} =$$

$$= \frac{(p+1)\cdot 2(p+2)(p+1{,}5)}{6} =$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6} =$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6} =$$

$= HL$

V.S.V.

1536 a) *Ledtråd*:

Utveckla $(p+1)^2 + 5(p+1) + 1$ och ersätt $p^2 + 5p + 1$ i utvecklingen med $2n$.

Visa att en faktor 2 kan brytas ut ur utvecklingen.

b) Det gäller inte för något p.

Kommentar:

Om vi antar att ett falskt påstående är sant så kan det leda till att ett annat falskt påstående verkar sant.

1537 a) Formel: $s_n = n(n+1)(n+2)$

Lösning:

Vi vill visa att

$1\cdot 6 + 2\cdot 9 + 3\cdot 12 + \ldots + n(3n+3) = n(n+1)(n+2)$

1. För $n = 1$ får vi

   $VL = 1\cdot 6 = 6$

   $HL = 1(1+1)(1+2) = 6$

   $VL = HL$ dvs. formeln gäller för $n = 1$.

2. Induktionsantagande (formeln gäller för $n = p$)

   $1\cdot 6 + 2\cdot 9 + 3\cdot 12 + \ldots + p(3p+3) = p(p+1)(p+2)$

3. Induktionssteget, visa att formeln i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att

   $1\cdot 6 + 2\cdot 9 + 3\cdot 12 + \ldots + p(3p+3) + (p+1)(3(p+1)+3) = (p+1)(p+2)(p+3)$

   Bevis:

   $VL = 1\cdot 6 + 2\cdot 9 + 3\cdot 12 + \ldots + p(3p+3) + (p+1)(3(p+1)+3) =$

   $= p(p+1)(p+2) + (p+1)(3p+6) =$

   $= (p+1)(p(p+1) + 3p + 6) =$

   $= (p+1)(p^2+4p+3) =$

   $= (p+1)(p+2)(p+3) =$

   $= HL$

   V.S.B.

b) Formel: $s_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Lösning:

Vi vill visa att

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

1. För $n = 1$ får vi

   $VL = 1^3 = 1$

   $HL = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$

   $VL = HL$ dvs. formeln gäller för $n = 1$.

2. Induktionsantagande (formeln gäller för $n = p$)

   $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$

3. Induktionssteget, visa att formeln i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att

   $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 + (p+1)^3 = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4}$

   Bevis:

   $VL = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 + (p+1)^3 =$

   $= \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3 =$

   $= \frac{p^2(p+1)^2 + 4(p+1)^3}{4} =$

   $= \frac{(p+1)^2(p^2+4p+4)}{4} =$

   $= \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4} = HL$

   V.S.B.

1540 *Lösning*:

1. För $n = 1$ får vi
$VL = 6 \cdot 1 - 2 = 4$ och
$HL = 1 \cdot (3 \cdot 1 + 1) = 4$

$VL = HL$, dvs. formeln gäller för $n = 1$.

2. Induktionsantagande (formeln gäller för $n = p$)

$4 + 10 + \ldots + (6p - 2) =$
$= p(3p + 1)$

3. Induktionssteget, visa att formeln i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att

$4 + 10 + \ldots + (6p - 2) +$
$+ (6(p + 1) - 2) =$
$= (p + 1)(3(p + 1) + 1)$

Bevis:
$VL = 4 + 10 + \ldots +$
$+ (6p - 2) + (6(p + 1) - 2) =$
$= p(3p + 1) + (6(p + 1) - 2) =$
$= 3p^2 + p + 6p + 4 =$
$= 3p^2 + 7p + 4 =$
$= (p + 1)(3p + 4) =$
$= (p + 1)(3(p + 1) + 1) =$
$= HL$

V.S.V.

1541 *Lösning*:

1. För $n = 1$ får vi

$$VL = \frac{1}{(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{3}$$

$$HL = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$VL = HL$ dvs. formeln gäller för $n = 1$.

2. Induktionsantagande (formeln gäller för $n = p$)

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{(2p - 1)(2p + 1)} = \frac{p}{2p + 1}$$

3. Induktionssteget, visa att formeln i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{(2p - 1)(2p + 1)} +$$
$$+ \frac{1}{(2(p + 1) - 1)(2(p + 1) + 1)} =$$
$$= \frac{p + 1}{2(p + 1) + 1}$$

Bevis:

$$VL = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{(2p - 1)(2p + 1)} +$$
$$+ \frac{1}{(2(p + 1) - 1)(2(p + 1) + 1)} =$$
$$= \frac{p}{2p + 1} + \frac{1}{(2p + 1)(2p + 3)} =$$
$$= \frac{p(2p + 3) + 1}{(2p + 1)(2p + 3)} =$$
$$= \frac{2p^2 + 3p + 1}{(2p + 1)(2p + 3)}$$
$$HL = \frac{p + 1}{2(p + 1) + 1} =$$
$$= \frac{(p + 1)(2p + 1)}{(2p + 3)(2p + 1)} =$$
$$= \frac{2p^2 + 3p + 1}{(2p + 1)(2p + 3)}$$

$VL = HL$

V.S.V.

1542 a) $a_n = 12 + (n - 1)10 = 10n + 2$

b) $s_n = \dfrac{n(12 + 10n + 2)}{2} =$
$= n(7 + 5n)$

c) *Ledtråd*:
Visa att
$12 + 22 + 32 + \ldots +$
$+ (10n + 2) = n(7 + 5n)$

1543 *Lösning*:

1. För $n = 1$ får vi $2^{2 \cdot 1} - 1 = 3$ som är delbart med 3.

Påståendet gäller för $n = 1$.

2. Anta att det gäller för $n = p$.

$2^{2p} - 1$ är delbart med 3.

3. *Påstående*:
$2^{2(p + 1)} - 1$ är delbart med 3 vilket kan skrivas
$2^{2(p + 1)} - 1 = 3 \cdot m$,
där m är ett heltal.

Bevis:
$2^{2(p + 1)} - 1 = 2^{2p + 2} - 1 =$
$= 2^{2p} \cdot 2^2 - 1 = 4 \cdot 2^{2p} - 1 =$
$= 3 \cdot 2^{2p} + 2^{2p} - 1 =$
$= 3 \cdot 2^{2p} + 3 \cdot m = 3(2^{2p} + m)$

Det betyder att $2^{2(p + 1)} - 1$ är delbart med 3.

V.S.V.

1544 a) *Lösning*:

1. För $n = 1$ får vi
$VL = (1 + 1)^2 = 4$ och
$HL = 1 + 1^2 = 2$

$VL \geq HL$, dvs. olikheten gäller för $n = 1$.

2. Induktionsantagande (olikheten gäller för $n = p$)

$(1 + p)^2 \geq 1 + p^2$

3. Induktionssteget, visa att olikheten i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att

$(1 + (p + 1))^2 \geq 1 + (p + 1)^2$

Bevis:
$VL = (1 + (p + 1))^2 =$
$= 1 + 2(p + 1) + (p + 1)^2 \geq$
$\geq 1 + 2(p + 1) + 1 + p^2 =$
$= p^2 + 2p + 1 + 3 =$
$= (p + 1)^2 + 3 \geq$
$\geq 1 + (p + 1)^2 = HL$

$VL \geq HL$

Påståendet är sant och olikheten gäller alltså för $n = 1, 2, 3, \ldots$

V.S.V.

b) *Lösning*:

1. För $n = 4$ får vi
$VL = 4^2 = 16$ och
$HL = 2^4 = 16$ $\quad VL = HL$

För $n = 5$ får vi
$VL = 5^2 = 25$ och
$HL = 2^5 = 32$ $\quad VL < HL$

$VL \leq HL$, dvs. formeln gäller för $n = 4$ och $n = 5$.

2. Anta att olikheten gäller för $n = p$.

$p^2 \leq 2^p$ för $p = 4, 5, 6, \ldots$

Olikheten kan skrivas
$2^p - p^2 \geq 0$

3. *Påstående*:
(Olikheten gäller för $n = p + 1$)

$2^{p + 1} - (p + 1)^2 \geq 0$

Bevis:
$VL = 2^{p + 1} - (p + 1)^2 =$
$= 2 \cdot 2^p - p^2 - 2p - 1 =$
$= 2 \cdot 2^p - 2p^2 +$
$+ p^2 - 2p - 1 =$
$= 2(2^p - p^2) + p^2 - 2p - 1$

$VL \geq 0$ eftersom
$2^p - p^2 \geq 0$ för $p = 4, 5, 6, \ldots$
(enligt antagandet)
och för positiva p gäller
$(p^2 - 2p - 1) \geq 0$ för
$p \geq 1 + \sqrt{2}$

Påståendet är alltså sant
för $p = 4, 5, 6\ldots$
vilket innebär att
$n^2 \leq 2^n$ för $n = 4, 5, 6, \ldots$

V.S.V.

1545 a) För $n = 1$:

$VL = 1(1 + 2) = 3$

$$HL = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+7)}{6} =$$

$$= \frac{2\cdot 9}{6} = 3$$

$VL = HL$

b) För $n = 4$:

$VL = 1(1 + 2) + 2(2 + 2) +$
$+ 3(3 + 2) + 4(4 + 2) =$
$= 3 + 8 + 15 + 24 = 50$

$$HL = \frac{4(4+1)(2\cdot 4+7)}{6} =$$

$$= \frac{4\cdot 5\cdot 15}{6} = 50$$

$VL = HL$

c) *Ledtråd*:
Första steget är redan genomfört i a).

1546 *Lösning*:
Vi vill visa att $y = x^n$ har derivatan
$y' = n \cdot x^{n-1}$ där $n = 1, 2, 3, \ldots$

1. För $n = 1$ får vi
$y = x^1$ vilket ger
$y' = 1 \cdot x^0 = 1$
Stämmer.

2. Induktionsantagande
(formeln gäller för $n = p$)
$y = x^p$ vilket ger $y' = px^{p-1}$

3. Induktionssteget, visa det i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att
$y = x^{p+1}$ vilket ger
$y' = (p + 1)x^p$
Bevis:
$y = x^{p+1} = x \cdot x^p$
Derivatan av en produkt ger
$y' = 1 \cdot x^p + x \cdot p \cdot x^{p-1} =$
$= x^p + p \cdot x^p = (p + 1)x^p$
V.S.B.

1547 *Lösning*:

1. För $n = 1$ får vi
$7^{2\cdot 1-1} + 17^{1-1} =$
$= 7^1 + 17^0 = 8$
Det gäller för $n = 1$.

2. Induktionsantagande
(gäller för $n = p$)
$7^{2p-1} + 17^{p-1} = 8k$
där k är ett heltal.

3. Induktionssteget, visa att det i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att
$7^{2(p+1)-1} + 17^{(p+1)-1} =$
$= 7^{2p-1+2} + 17^{p-1+1} =$
$= 7^2 \cdot 7^{2p-1} + 17 \cdot 17^{p-1} =$
$= 32 \cdot 7^{2p-1} + 17 \cdot 7^{2p-1} +$
$+ 17 \cdot 17^{p-1} =$
$= 32 \cdot 7^{2p-1} +$
$+ 17 \cdot (7^{2p-1} + 17^{p-1}) =$
$= 8 \cdot 4 \cdot 7^{2p-1} + 17 \cdot 8k =$
$= 8(4 \cdot 7^{2p-1} + 17k)$
Vi har brutit ut faktorn 8 och alltså visat att det stämmer för $n = p + 1$.
V.S.B.

Testa dig själv 1

1 a) $\Leftrightarrow$
Motivering:
$3x + 7 = x - 1$ har lösningen
$x = -4 \Rightarrow 2x = -8$
$2x = -8$ har lösningen
$x = -4 \Rightarrow 3x + 7 = x - 1$

b) $\Leftarrow$
Motivering:
$2x - 6 = 0$ har lösningen
$x = 3 \Rightarrow x > 0$
Omvändningen gäller inte eftersom det finns flera positiva x.

2 a) *Lösning*:
Kalla den jämna faktorn $2m$ och den udda faktorn $2n + 1$, där m och n är heltal.
Produkten $2m \cdot (2n + 1)$ har faktorn 2 och är därför ett jämnt tal.
V.S.B.

b) *Lösning*:
Det räcker att hitta ett motexempel.
T.ex. $8 = 2 \cdot 4$

3 $3\,060 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$
Lösning:
3 060 är ett jämnt tal: $2 \cdot 1\,530$
1 530 är ett jämnt tal: $2 \cdot 2 \cdot 765$
765 slutar på 5: $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 153$
153 har siffersumman 9:
$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 17$
9 är delbart med 3:
$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$

4 a) Sant.
Motivering:
23 är en delare till 575.

b) Sant.
Motivering:
17 är inte en delare till 341.

5 a) $SGF(128, 152) = 8$
$MGM(128, 152) = 2\,432$

b) $SGF(66, 325) = 1$
$MGM(66, 325) = 21\,450$

6 T.ex. $a = 36$ och $b = 120$
Ledtråd:
Dela upp 12 och 360 i primfaktorer och använd begreppen gemensamma och icke-gemensamma faktorer.

7 a) Falskt.
Motivering:
14 dividerat med 12 ger resten 2.
28 dividerat med 12 ger resten 4.
14 är alltså inte kongruent med 28 (mod 12).

b) Sant.
Motivering:
Vi kan t.ex. visa att det är sant genom
$16 \equiv 0 \pmod 4$
$82 \equiv 2 \pmod 4$
$16 + 82 \equiv 0 + 2 = 2 \pmod 4$

8 a) $6 \pmod 8$

b) $2 \pmod 7$

c) $1 \pmod 3$

9 $x = 4$ $\quad x = 17$ $\quad x = 30$

10 a) 45_{tio} b) 117_{tio} c) $144_{\text{åtta}}$

11 a) 2, 6, 10, 14

b) $a_{n+1} = a_n + 4 \qquad a_1 = 2$

12 a) 71 element

Ledtråd:
Lös olikheten
$500 > 5 + 7\,(n - 1)$

b) 34 element

Ledtråd:
Lös olikheten

$$500 > \left(\frac{6}{5}\right)^n$$

13 a) $5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 = 90$

b) $4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^7 = 21\,845$

14 a) $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$

b) $a_{n+1} = a_n \cdot 3 \qquad a_1 = 5$

15 Summan är 130.

16 *Lösning*:
Anta motsatsen, alltså att $x < 3$.

Detta ger att
$2x + 3 < 2 \cdot 3 + 3 = 9$

Vilket ger en motsägelse eftersom $2x + 3 \geq 9$.

Antagandet att $x < 3$ är felaktigt, dvs. $x \geq 3$.

V.S.B.

17 *Lösning:*

1. För $n = 1$ får vi

   $VL = 1(3 + 1) = 4$ och
   $HL = 1(1 + 1)^2 = 4$

   VL = HL, dvs. formeln gäller för $n = 1$.

2. Induktionsantagande (formeln gäller för $n = p$)
   $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + p(3p + 1) = p(p + 1)^2$

3. Induktionssteget, visa att formeln i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att

   $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + p(3p + 1) + (p + 1)(3(p + 1) + 1) = (p + 1)(p + 2)^2$

Bevis:
$VL = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + p(3p + 1) + (p + 1)(3(p + 1) + 1) =$
$= (p(p + 1)^2 + (p + 1)(3p + 4) =$
$= (p + 1)(p(p + 1) + 3p + 4) =$
$= (p + 1)(p^2 + 4p + 4) =$
$= (p + 1)(p + 2)^2 = HL$
V.S.V.

Blandade övningar 1

1 $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

2 $SGD(42, 90) = 6$

3 Summan är 32.

4 $a = 5$

5 a) 258_{tio}

b) $1001011_{\text{två}}$

c) 63_{sexton}

6 a) De första åtta talen är
5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47

35 är inte ett primtal.

b) 11
Motivering:
$a_{11} = 65 = 5 \cdot 13$

c) $a_{12} = 71$ och $a_{14} = 83$ är primtal.

7 $a_3 = 17$

8 a) $a|b$ utläses ”*a är en delare till b*”

Det betyder att $b = n \cdot a$ för något heltal n.

T.ex. $4|24$
4 är en delare till 24 vilket också kan skrivas $24 = n \cdot 4$.

b) SGF(a, b) utläses ”*största gemensamma faktor till a och b*”.
Det betyder produkten av alla gemensamma primfaktorer i talen a och b.
T.ex. $SGF(12, 20) = 2 \cdot 2 = 4$ eftersom $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ och $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$.

c) MGM(a, b) utläses ”*minsta gemensamma multipel till a och b*”.
Det betyder det minsta talet som är en multipel av både a och b.

T.ex. $MGM(12, 20) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

d) $a \equiv b \pmod{n}$ utläses ”*a är kongruent med b modulo n*”.

Det betyder att talen a och b ger samma rest om man dividerar dem med talet n.

T.ex. $27 \equiv 15 \pmod{12}$ eftersom både 27 och 15 ger resten 3.

9 *Lösning*:
Om k och n är heltal kan differensen skrivas
$2k + 1 - (2n + 1) = 2k - 2n = 2(k - n)$ vilket är ett jämnt tal eftersom $k - n$ är ett heltal.

V.S.B.

10 a) *Lösning*:
$m^2 - 2 = (4k + 2)^2 - 2 =$
$= 16k^2 + 16k + 4 - 2 =$
$= 4(4k^2 + 4k) + 2$

Talet är inte delbart med 4.

V.S.V.

b) *Lösning*:
$m^2 - 4 = (4k + 2)^2 - 4 =$
$= 16k^2 + 16k + 4 - 4 =$
$= 8(2k^2 + 2k)$

Talet är delbart med 8.

V.S.V.

11 a) Talföljden är geometrisk.
Motivering:
Kvoten mellan talen är konstant, $k = 2$.

b) $a_{n+1} = a_n \cdot 2 \qquad a_1 = 2$

c) 8 190
Ledtråd:
Beräkna

$$s_{12} = \frac{2(2^{12} - 1)}{2 - 1}$$

utan räknare.

12 a) $88 \cdot 75 \equiv 7 \cdot 3 = 21 \equiv 3 \pmod{9}$

b) $8^6 \cdot 7^8 \equiv 2^6 \cdot 1^8 = 64 \equiv 4 \pmod{6}$

c) $9^4 + (-6)^4 \equiv 2^4 + 1^4 = 17 \equiv 3 \pmod{7}$

13 $a_{n+1} = 2a_n + 2 \qquad a_1 = 1$

14 Nej, $a^2 - 3$ är inte delbart med 3.
Motivering:
Det räcker med ett motexempel som bevis:
$n = 2$ ger $a = 5$ och $a^2 - 3 = 22$ vilket inte är delbart med 3.

15 *Ledtråd*:
Anta att $\frac{1}{1 + x^2} > 1$
och visa att det ger
$x^2 < 0$ vilket är omöjligt.

16 a) $\neg P$: $x < 2$
$\neg Q$: $2x + 3 < 7$

b) *Ledtråd*:
Visa att $2x + 3 < 7$ ger att $x < 2$.

17 a) $x \geq 3$ ger att
$6(x + 1) \geq 6 \cdot (3 + 1) = 24$

b) *Ledtråd*:
Visa att $6(x + 1) < 24$ ger $x < 3$.

18 a) $\text{SGF}(2p, 6q) = 2$

b) $\text{MGM}(2p, 6q) = 6pq$

19 a) $s_n = n + n^2$

b) $s_n = \frac{(-1)^n - 1}{2}$

Ledtråd:
$s_n = \frac{-1((-1)^n - 1)}{-1 - 1}$

20 a) $b = 5$ b) $b = 7$

21 2 (mod 5)

22 a) 1 1 2 3 5 8 13

b) *Lösning*:
1. För $n = 0$ får vi
$VL = a_0 = 1$ och
$HL = a_2 - 1 = a_1 + a_0 - 1 =$
$= 1 + 1 - 1 = 1$
$VL = HL$, dvs. formeln gäller för $n = 0$.
2. Induktionsantagande (formeln gäller för $n = p$)
$\sum_{k=0}^{p} a_k = a_{p+2} - 1$
3. Induktionssteget, visa formeln i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att
$\sum_{k=0}^{p+1} a_k = a_{p+3} - 1$
Bevis:
$VL = \sum_{k=0}^{p+1} a_k = \sum_{k=0}^{p} a_k + a_{p+1} =$
$= a_{p+2} - 1 + a_{p+1} =$
$= a_{p+3} - 1 = HL$
V.S.V.

23 *Lösning*:
$x = 6,\ y = 8,\ z = 10$ är en lösning eftersom $6^2 + 8^2 = 10^2$
$x = 6a,\ y = 8a,\ z = 10a$ är en lösning för alla $a \in \mathbb{Z}^+$ eftersom $(6a)^2 + (8a)^2 = (10a)^2$

24 a) *Lösning:*
a delbart med 4 ger att
$1\,200 + a = 4 \cdot 300 + 4k =$
$= 4(300 + k)$
vilket är delbart med 4.

b) *Ledtråd:*
Visa att, om $k = 2n + 1$, så är $3k$ delbart med 3 men inte med 2.

25 *Ledtråd*:
$a^2 + 3 = (a - 1)(a + 1) + 4$
Motivera varför HL är delbar med 4.

26 *Lösning*:
1. För $n = 1$ får vi
$VL = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$
$HL = \frac{n^2}{n + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$
$VL = HL$
För $n = 2$ får vi
$VL = \frac{1}{1 + 1} + \frac{2}{2 + 1} = \frac{7}{6}$
$HL = \frac{2^2}{2 + 1} = \frac{4}{3}$
$VL < HL$
dvs. olikheten gäller för $n = 1$ och $n = 2$.
2. Induktionsantagande (olikheten gäller för $n = p$)
$\sum_{k=1}^{p} \frac{k}{k + 1} \leq \frac{p^2}{p + 1}$
3. Induktionssteget, visa att olikheten i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att
$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{k + 1} \leq \frac{(p + 1)^2}{(p + 1) + 1}$
Bevis:
$VL = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{k + 1} =$
$= \sum_{k=1}^{p} \frac{k}{k + 1} + \frac{p + 1}{p + 2} \leq \frac{p^2}{p + 1} + \frac{p + 1}{p + 2} =$
$= \frac{p^2(p + 2)}{(p + 1)(p + 2)} + \frac{(p + 1)^2}{(p + 1)(p + 2)} =$
$= \frac{p^3 + 2p^2 + p^2 + 2p + 1}{(p + 1)(p + 2)} =$
$= \frac{p^3 + 3p^2 + 2p + 1}{(p + 1)(p + 2)}$
$HL = \frac{(p + 1)^2}{(p + 1) + 1} = \frac{(p + 1)^2}{p + 2} =$
$= \frac{(p + 1)^2(p + 1)}{(p + 2)(p + 1)} =$
$= \frac{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}{(p + 2)(p + 1)}$
$\frac{p^3 + 3p^2 + 2p + 1}{(p + 1)(p + 2)} \leq \frac{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}{(p + 2)(p + 1)}$
eftersom $p > 0$.
Alltså är $VL \leq HL$
V.S.B.

27 *Ledtråd*:
Gör ett indirekt bevis och visa att om n är ett jämnt tal så är n^3 ett jämnt tal.

28 a) 1 (mod 4)

b) 4 (mod 9)

c) 0 (mod 9)

d) 11 (mod 13)

29 a) $a_1 = 57$

b) $a_2 = 172$
$a_3 = 517$
$a_4 = 1\,552$
$a_5 = 4\,657$
1 575 är inte ett element.

30 a) 1, 2, 3 och 6

b) $1 + 2 + 3 = 6$

c) Ja, summan av divisorerna är lika med talet.

d) Ja, 28 och 496, men inte 342.
Motivering:
$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$
Summan av divisorerna:
$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$

$496 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 31$
Summan av divisorerna:
$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 +$
$+ 62 + 124 + 248 = 496$

$342 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19$
Summan av divisorerna:
$1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 + 19 +$
$+ 38 + 57 + 114 + 171 = 438$

31 a) 65
Ledtråd:
Differensen mellan två på varandra följande tal är konstant.

b) 25 eller −25
Ledtråd:
Kvoten kan vara 5 eller −5.

32 a) 13 element
Ledtråd:
Lös ekvationen
$$\frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 1\,594\,322$$

b) 80 element
Ledtråd:
$a_n = 2 + 4(n - 1)$
Använd formeln för aritmetisk summa.

33 173 och 179

34 0,625

35 Efter 11 dygn.
Ledtråd:
Bestäm MGM$(24 \cdot 60, 24 \cdot 55)$

36 a)

n	a_n
1	41
2	43
3	47
4	53
5	61
6	71
7	83
8	97
9	113
10	131

Samtliga tal i högra kolumnen är primtal.

b) $n = 41$ ger
$a_{41} = 41^2 - 41 + 41 = 41^2 =$
$= 41 \cdot 41$
som är ett sammansatt tal.

37 *Lösning*:
1. För $n = 1$ får vi
$VL = 6 + 4 \cdot 1 = 10$
$HL = 2 \cdot 1 \cdot (1 + 4) = 2 \cdot 5 = 10$
dvs. formeln gäller för $n = 1$.

2. Induktionsantagande (formeln gäller för $n = p$)
$10 + 14 + 18 + \ldots +$
$+ (6 + 4p) = 2p(p + 4)$

3. Induktionssteget, visa att formeln i så fall gäller för $n = p + 1$, alltså att
$10 + 14 + 18 + \ldots +$
$+ (6 + 4p) + (6 + 4(p + 1)) =$
$= 2(p + 1)((p + 1) + 4)$

Bevis:
$VL = 10 + 14 + 18 + \ldots +$
$+ (6 + 4p) + (6 + 4(p + 1)) =$
$= 2p(p + 4) + (6 + 4(p + 1)) =$
$= 2p^2 + 8p + 6 + 4p + 4 =$
$= 2p^2 + 12p + 10$

$HL = 2(p + 1)((p + 1) + 4) =$
$= 2(p + 1)(p + 5) =$
$= 2(p^2 + 6p + 5) =$
$= 2p^2 + 12p + 10$

VL = HL

V.S.V.

38 a) 8 klossar

b) $s_8 = 83$ cm (83,22…)

c) $s_{30} = 100$ cm (99,87…)
$s_{50} = 100$ cm (99,99…)
När antalet klossar $\to \infty$
går $s_n \to 100$ cm

39 a) 2 diagonaler i en 4-hörning.
5 diagonaler i en 5-hörning.
14 diagonaler i en 7-hörning.

b) 35 diagonaler.

c) $d_n = 0{,}5n^2 - 1{,}5n$

d) Antalet diagonaler i en fyrhörning $d_4 = 2$ och
$d_n = d_{n-1} + (n - 2)$

40 0,004 0,02 0,1 0,5 2,5 12,5 …
Lösning:
En geometrisk talföljd kan skrivas
$a,\ ak,\ ak^2,\ ak^3,\ \ldots$
$t_4 + t_5 = 3$ och $t_9 + t_{10} = 9\,375$
kan skrivas
$ak^3 + ak^4 =$
$= 3$ och $ak^8 + ak^9 = 9\,375$.

$ak^8 + ak^9 = 9\,375$ ger
$ak^8(1 + k) = 9\,375$

$ak^3 + ak^4 = 3$ ger $ak^3(1 + k) = 3$

Vi får ekvationssystemet
$$\begin{cases} ak^8(1 + k) = 9\,375 \\ ak^3(1 + k) = 3 \end{cases}$$

Vi dividerar ledvis
$k^5 = 9\,375/3 = 3\,125$
$k = 5$

$ak^3(1 + k) = 3$ kan då skrivas
$a \cdot 5^3 \cdot 6 = 3$ vilket ger
$a = 0{,}004$

41 a) $10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \ldots$

b) $\frac{100}{9}$
Kommentar:
Oändligt många termer kan ha en ändlig summa.

42 a) T. ex.
$a = 5$ och $b = 2$ ger
$(5-2)|(5^2-2^2) \Rightarrow 3|21$
$a = 3$ och $b = 10$ ger
$(3-10)|(3^2-10^2) \Rightarrow -7|-91$

b) T.ex.
$a = 5$ och $b = 2$ ger
$(5-2)|(5^3-2^3) \Rightarrow 3|117$
$a = 8$ och $b = 6$ ger
$(8-6)|(8^3-6^3) \Rightarrow 2|296$

c) *Lösning:*

1. $n = 1$ ger
$a^n - b^n = a^1 - b^1 = a - b$
$a - b$ är delbart med $a - b$
dvs. delbarhet gäller för
$n = 1$.

2. Induktionsantagande
Delbarhet gäller för $n = p$
dvs. $a^p - b^p = m(a-b)$,
där m är ett positivt heltal.

3. Induktionssteget, visa att
sambandet i så fall gäller
för $n = p + 1$, alltså att
delbarhet gäller för
$n = p + 1$ dvs.
$a^{p+1} - b^{p+1} = k(a-b)$,
där k är ett positivt heltal.

Bevis:
VL =
$= a^{p+1} - b^{p+1} = a^p \cdot a - b^p \cdot b =$
$= a^p \cdot a - a^p \cdot b + a^p \cdot b - b^p \cdot b =$
$= a^p(a-b) + b(a^p - b^p) =$
$= a^p(a-b) + bm(a-b) =$
$= (a^p + bm)(a-b) =$
$= k(a-b) =$ HL
V.S.V.