

# Innehåll

## 1. Bevis och talteori 8

Inledande aktivitet: Hittar du mönstret? 9

### 1.1 Matematiska bevis 10

Definition, sats och bevis 10

Direkta bevis 13

### 1.2 Talteori I 16

Delbarhet och primtal 16

Mer om delbarhet och primtal 20

Programmering: Collatz förmodan 22

Gemensamma och icke-gemensamma faktorer 24

Aktivitet: Räkna med rester – hur många blir över? 28

### 1.3 Talteori II 28

Kongruens och modulo 28

Modulär aritmetik – kongruensräkning 31

Historik: Diofantos, Fermat och Wiles –

Om difantiska ekvationer och Fermats stora sats 35

Tal i olika baser 37

Mer om tal i olika talbaser 39

Programmering: Byta talbas 41

Historik: 64 blev 8 blev ingenting 42

### 1.4 Talföljder 44

Inledning 44

Rekursiva talföljder 48

Aktivitet: Hur högt blir trädet? 51

Historik: Summan av en aritmetisk talföljd 52

Tema: Summan va en geometrisk talföljd 54

Historik: Fibonaccis talföljd 57

### 1.5 Mer om matematiska bevis 58

Motsägelsebevis och motexempel 58

Indirekta bevis 61

Induktionsbevis 63

Aktivitet: Sant eller falskt? 69

Sammanfattning 1 70

Kan du det här? 72

Testa dig själv 1 73

Blandade övningar 1 74

## 2. Kombinatorik och mängdlära 78

Inledande aktivitet: Hur många? 79

### 2.1 Kombinatorik 80

Multiplikations- och additionsprincipen 80

Permutationer och kombinationer 85

Formler för permutationer och kombinationer 89

Mer om kombinatorik 94

Tema: Poker och Yatzy 98

### 2.2 Binomialsatsen och lådprincipen 100

Binomialsatsen 100

Historik: Pascals triangel 104

Lådprincipen 106

### 2.3 Mängdlära 109

Mängder – några begrepp 109

Mängdoperationer och Venndiagram 113

Mer om mängder 117

Programmering: Mängder 122

Aktivitet: Sant eller falskt? 123

Sammanfattning 2 124

Kan du det här? 126

Testa dig själv 2 127

Blandade övningar 2 128

Blandade övningar 1–2 131

## 3. Differentialekvationer 134

Inledande aktivitet: Populationsförändring 135

### 3.1 Inledning 136

Repetition av primitiva funktioner 141

Differentialekvationer 144

Historik: Sir Isaac Newton 147

Enkla differentialekvationer 148

### 3.2 Differentialekvationer av första ordningen 151

Differentialekvationen  $y' + ay = 0$  151

Differentialekvationen  $y' + ay = f(x)$  154

Aktivitet: Riktningssfält 158

Riktningssfält 159

Eulers stegmetod 163

Historik: Numeriska lösningsmetoder 166

Programmering: Numerisk lösningsmetod 168

### 3.3 Tillämpningar med första ordningens differentialekvationer 170

Enkla förändringsmodeller 170

Tillväxt med begränsningar 173

Aktivitet: Populationsförändring 176

Blandningsproblem 177

Newtons avsvalningslag 179

Fall med luftmotstånd 182

Blandade tillämpningar 184

### 3.4 Differentialekvationer av andra ordningen 187

Differentialekvationen  $y'' + ay' + by = 0$  187

Blandade homogena differentialekvationer

av andra ordningen 193

Den inhomogena ekvationen  $y'' + ay' + by = f(x)$  194

Aktivitet: Olika lösningskurvor 196

Digitala verktyg och differentialekvationer 197

Svängning 198

Aktivitet: Sant eller falskt? 201

Sammanfattning 3 202

Kan du det här? 204

Testa dig själv 3 205

Blandade övningar 3 206

Blandade övningar 1–3 210

## 4 Fördjupning och omfångsrika problem 218

### 4.1 Derivata–fördjupning 220

Tangenter och linjär approximation 220

Approximation med polynom – Maclaurinutveckling 222

Numerisk ekvationslösning och

Newton-Raphsons metod 226

Integrerande faktor 233

### 4.2 Integraler–fördjupning 235

Repetition 235

Trapetsmetoden 239

Generaliserade integraler 244

Geometriska sannolikheter 246

Programmering: Programmera en slumpgenerator 247

Aktivitet: Geometriska sannolikheter – Buffons nål 248

Mer om volymbräkning med integraler 249

Partiell integration 253

### 4.2 Omfångsrika problemsituationer 255

Båglängder 263

## Repetitionsuppgifter 269

## Svar, ledtrådar och lösningar 274

## Register 333