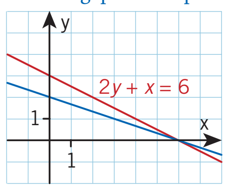
20 M = −3, A = 11, T = 16, H = −3
Ledtråd:
M + A = 8 och A + H = 8 ger
M = H
M + A = 8 och M + T = 13 ger
T = A + 5

21 a) Lösning saknas då $k = -0{,}5$.
b) $k \neq -0{,}5$
c) $k > -1/3$
Ledtråd:
Då $k = -1/3$ hamnar skärningspunkten på x-axeln.



22 $8\sqrt{x} + 8$

23 $(2a + b)^3 = (2a + b)(2a + b)^2 =$
$= (2a + b)(4a^2 + 4ab + b^2)$
Multiplicera parenteserna och förenkla.

24 $2 \cdot x \cdot x \cdot (5x + 1)(5x + 1) =$
$= (2x^2(5x + 1)^2)$

25 $a = 324$ och $b = 175$
Ledtråd:
$a = 182$ och $b = \sqrt{30625}$

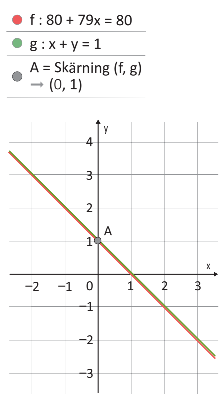
26 a) $r + 3b = 106$
b) En röd bok kostar 19 kr.
En blå bok kostar 29 kr.

27 a) x betyder antal hg billigt godis.
y betyder antal hg dyrt godis.
b) Den första ekvationen visar att Patrik köper totalt 5 hg godis.
Den andra ekvationen visar att han betalar totalt 30 kr för godiset.
c) Ja, det är möjligt.
Förklaring:
Patrik ska köpa 3,2 hg av det billigare godiset och 1,8 hg av det dyrare godiset.

28 a) $y = 59\,000x + 8\,432\,000$
y är befolkningen x år efter 1990.
b) Ca år 2060.
Ledtråd:
Lös ekvationen
$59\,000x + 8\,432\,000 =$
$= 12\,500\,000$

29 a) Blandningen ska vara på 10 liter.
b) Summan av mängden fett i lättmjölken och i standardmjölken är lika med fettmängden i blandningen.
c) De ska blanda 6 liter lättmjölk och 4 liter standardmjölk.

30 Nej, hon har fel.
Motivering:
Graferna kan se ut att vara identiska.
Med verktyget för skärning eller genom att zooma in får vi fram att linjerna har en skärningspunkt.



31 a) Nej, båda har fel.
Motivering:
Albin har fel:
Den anpassade linjen behöver inte gå genom någon av punkterna, inte heller origo.
Melsa har fel:
m-värdet är y-värdet då $x = 0$.
Melsa avläser $y = 7$ då $x = 5$.
b) m-värdet $= 0{,}83$
Ledtråd:
Gör en linjär regression.

32 *Lösning:*
Ledvis addition av de två första ekvationerna ger
$2x + 2z = 12$
som kan skrivas
$x + z = 6$
Den tredje ekvationen
$3x + 3z = 20$
kan skrivas
$x + z = 20/3$
$x + z$ kan inte vara lika med både 6 och 20/3.
Detta innebär att ekvationssystemet saknar lösning.

33 1: För alla värden på b och $a \neq -3$
2: För $a = -3$ och $b \neq 2$
3: För $a = -3$ och $b = 2$

34 a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$
c) Skärningspunkten är densamma.
d) Skärningspunkten mellan två linjer på formen
$ax + y + a - 5 = 0$
är alltid $(-1, 5)$.
e) Ekvationen
$ax + y + a - 5 = 0$
kan skrivas
$y = -a(x + 1) + 5$
Då $x = -1$ är $y = 5$ oberoende av värdet på a.

Kapitel 2

2102 a) $x = \pm 4$
b) $x = \pm 6$
c) $x = \pm 10$
d) Ekvationen saknar reell lösning.
Ledtråd:
Inget reellt tal har en negativ kvadrat.

2103 a) $x_1 = -5 \quad x_2 = 1$
b) $x_1 = 1 \quad x_2 = 3$
c) $x_1 = 0 \quad x_2 = 7$
d) $x_1 = 0 \quad x_2 = -3$

2104 a) $x_1 = 0 \quad x_2 = -8$
Ledtråd:
Bryt ut x och använd nollproduktmetoden.
b) $x_1 = 0 \quad x_2 = -7$
c) $x_1 = 0 \quad x_2 = 5$
d) $x_1 = 0 \quad x_2 = 10$

2105 a) $x = \pm\sqrt{\frac{28}{3}} \approx \pm 3{,}06$
b) $x_1 = 0 \;\; x_2 = \frac{3}{5} = 0{,}6$
Ledtråd:
$x = 0$ och $3 - 5x = 0$
c) $x_1 = 0 \quad x_2 = 1/3$
d) $x = \pm\sqrt{11} \approx \pm 3{,}32$

2106 a) $x_1 = 7 \quad x_2 = -13$
b) $x_1 = 12 \quad x_2 = 6$
c) $x_1 = 6 \quad x_2 = -8$

2107 För att produkten av två parenteser ska vara noll måste den första eller andra parentesen vara noll
a) $x = 5$ är en rot då det ger att första parentesen är noll.
$x = -3$ är en rot då det ger att andra parentesen är noll.
b) Båda parenteserna är noll om $x = 2$, dvs. ekvationen har endast en lösning, $x = 2$.

2108 a) $x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{1}{5} = 0{,}2$
b) $x = \pm\sqrt{5}$
c) $x_1 = -5 + \sqrt{2} \qquad x_2 = -5 - \sqrt{2}$
d) $x_1 = \frac{7}{3} \qquad x_2 = -\frac{5}{7}$

2109 a) T.ex. $x^2 = 4$ eller $(x - 2)(x + 2) = 0$
b) T.ex. $x(x - 12) = 0$ eller $x^2 - 12x = 0$
c) T.ex. $(x - 4)(x - 5) = 0$
d) T.ex. $(x + 1)(x - 3) = 0$

2110 Ekvationerna **A**, **D** och **E**.
Kommentar:
B och **C** är ekvationer av första graden. **F** är en tredjegradsekvation.

2111 a) $x = \pm 4$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas $4x^2 = 64$
b) $x_1 = 0 \qquad x_2 = 1$
c) $x = \pm\sqrt{1{,}5} \approx \pm 1{,}22$
d) $x_1 = 0 \qquad x_2 = 1{,}5$

2112 Roger har rätt.
Andragradsekvationer kan ha två rötter som är lika. Hans första exempel är korrekt, men det andra exemplet är felaktigt.
Motivering:
$x^2 = 5x$
$x^2 - 5x = 0$
$x(x - 5) = 0$
$x_1 = 0 \quad x_2 = 5$
Ekvationen har två olika rötter.

2113 a) *Lösning*:
Ekvation I:
Vi sätter in $x = 0$
$VL = \frac{0^2}{5} - 7 \cdot 0 = 0$
$HL = 0$
$VL = HL$, $x = 0$ är en rot.
Vi sätter in $x = 35$
$VL = \frac{35^2}{5} - 7 \cdot 35 = 0$
$HL = 0$
$VL = HL$, $x = 35$ är en rot.
Ekvation II:
Vi sätter in $x = -\frac{5}{9}$
$VL = \left(3 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) + 1\right)^2 =$
$= \left(-\frac{5}{3} + 1\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
$HL = \frac{4}{9}$
$VL = HL$, $x = -5/9$ är en rot.
Vi sätter in $x = -\frac{1}{9}$
$VL = \left(3 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) + 1\right)^2 =$
$= \left(-\frac{3}{9} + 1\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
$HL = \frac{4}{9}$
$VL = HL$, $x = -1/9$ är en rot.

b) *Lösning*:
Ekvation I:
$\frac{x^2}{5} - 7x = 0$
Vi multiplicerar med 5.
$x^2 - 35x = 0$
$x(x - 35) = 0$
$x_1 = 0$ och $x_2 = 35$
Ekvation II:
$(3x + 1)^2 = \frac{4}{9}$
Vi drar roten ur.
$3x + 1 = \pm\sqrt{\frac{4}{9}}$
$3x + 1 = \pm\frac{2}{3}$
$x_1 = \frac{2/3 - 1}{3} = \frac{-1/3}{3} = -\frac{1}{9}$
$x_2 = \frac{-2/3 - 1}{3} = \frac{-5/3}{3} =$
$= -\frac{5}{9}$

2114 $a_1 = 3 \;\; a_2 = -1$
Ledtråd:
Sätt in $x = 1$ och lös ekvationen.

2115 $b = -3 \qquad c = 2$

2118 a) $\triangle = 5 \qquad \square = 25$
b) $\triangle = -3 \qquad \square = 9$
c) $\triangle = 6 \qquad \square = 36$

2119 a) $x_1 = 1 \qquad x_2 = -3$
b) $x_1 = 9 \qquad x_2 = 1$
c) $x_1 = 4 \qquad x_2 = -1$

2120 a) Nollproduktmetoden
$x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$
b) Kvadratrotsmetoden
$x = \pm\sqrt{6} \approx \pm 2{,}45$
c) Kvadratkomplettering
$x_1 = 7 \qquad x_2 = -1$

2121 a) Saknar reella lösningar.
Lösning:
Vi väljer metoden med kvadratkomplettering.
$x^2 - 8x + 20 = 0$
$x^2 - 8x = -20$
$x^2 - 8x + 4^2 = -20 + 4^2$
$(x - 4)^2 = -4$
En kvadrat kan inte vara negativ. Ekvationen saknar reella lösningar.
b) $x_1 = x_2 = -6$
(kallas dubbelrot)

2122 a) $x_1 = \sqrt{5} - 5$
$x_2 = -\sqrt{5} - 5$
b) $x_1 = x_2 = -5$
c) Ekvationen saknar reell lösning.

2123 *Metod 1*:
Pröva lösningarna.
$x_1 = 1/2$ ger:
$VL = (1/2)^2 - 2 \cdot 1/2 + 3/4 =$
$= 1/4 - 1 + 3/4 = 0 = HL$
$x_2 = 3/2$ ger:
$VL = (3/2)^2 - 2 \cdot 3/2 + 3/4 =$
$= 9/4 - 3 + 3/4 = 0 = HL$
Metod 2:
Lös ekvationen.
$x^2 - 2x + 3/4 = 0$
$x^2 - 2x = -3/4$
$x^2 - 2x + 1 = -3/4 + 1$
$(x - 1)^2 = 1/4$
$x - 1 = \pm 1/2$
$x = 1 \pm 1/2$
$x_1 = 3/2 \qquad x_2 = 1/2$

2124 a) $x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = -\frac{3}{2}$
Ledtråd:
Komplettera båda leden med 1/4.
b) $x_1 = 2 \qquad x_2 = -1$
Ledtråd:
Komplettera båda leden med 1/4.

2125 $x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$
Ledtråd:
Dividera först båda leden med 2 och lös sedan $x^2 - 3x + 2 = 0$.

2126 För $a > 49$ saknas reell lösning.
Ledtråd:
Kvadratkomplettering ger
$x = 7 \pm \sqrt{49 - a}$

2127 a) $x_1 = -2 + \sqrt{4 - q}$
$x_2 = -2 - \sqrt{4 - q}$
b) $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

2131 a) $x_1 = 5 \qquad x_2 = 1$
b) $x_1 = -1 \qquad x_2 = -5$
c) $x_1 = 2 \qquad x_2 = -6$
d) $x_1 = 1 \qquad x_2 = -7$

2132 a) $x_1 = x_2 = 5$ (dubbelrot)
b) Ekvationen saknar reella lösningar.
c) $x_1 = 3 \qquad x_2 = -1$
d) $x_1 = 0{,}5 \qquad x_2 = -7{,}5$

2133 $y^2 + 3y - 4 = 0$
$y = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$
$y = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}}$
$y = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$
$y = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$
$y_1 = 1 \qquad y_2 = -4$

2134 a) Nille har rätt.
b) $x_1 = 1 \qquad x_2 = -2$

2135 a) T.ex. $x^2 = 16$ eller $(x - 1)^2 = 4$
b) T.ex. $(x - 2)(x - 5) = 0$ eller $x^2 - x = 0$
c) T.ex. $x^2 - 18x - 19 = 0$

2136 a) $x_1 = 2{,}73 \qquad x_2 = -0{,}73$
b) $x = 1 \pm \sqrt{3}$

2137 a) $x_1 = 3 \qquad x_2 = -1$
Ledtråd:
Dividera båda leden med 5.
b) $x_1 = 5 \qquad x_2 = 3$
c) $z_1 = z_2 = 0{,}5$ (dubbelrot)
Ledtråd:
Multiplicera både leden med 2.
d) $y_1 = 9 \qquad y_2 = 1$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas
$y^2 - 10y + 9 = 0$

2138 a) Allmänt kan en andragradsekvation skrivas $ax^2 + bx + c = 0$ där a, b och c är konstanter och $a \neq 0$.
I Kvadratrotsmetoden ($b = 0$)
II Nollproduktmetoden eller lösningsformeln ($c = 0$)
III Lösningsformeln (ingen av konstanterna är noll)
IV Nollproduktmetoden är enklast (lösningsformeln om man skriver om vänster led)
V Kvadratrotsmetoden är enklast (lösningsformeln om man skriver om ekvationen)
b) **I** $x = \pm 3$
II $x_1 = 0$ och $x_2 = -9$
III $x_1 = 1$ och $x_2 = -9$
IV $x_1 = 8$ och $x_2 = -7$
V $x_1 = -2$ och $x_2 = -8$

2139 a) Lösningsformeln:
$y_1 = 5 + \sqrt{20}$
$y_2 = 5 - \sqrt{20}$
b) Nollproduktmetoden:
$x_1 = 0 \qquad x_2 = 14$
c) Kvadratrotsmetoden:
$x_1 = 1{,}25 \qquad x_2 = 0{,}75$

2140 a) *Lösning*:
$VL = \sqrt{\frac{6}{25} + \frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{6}{25} + \frac{10}{25}} =$
$= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = HL$
b) *Lösning*:
$VL = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} =$
$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} =$
$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = HL$

2141 Ekvation **1** och lösning **B**
Ekvation **2** och lösning **C**
Ekvation **3** och lösning **A**

2142 a) $a_1 = -5 \qquad a_2 = -3$
b) $a_1 = -0{,}5 \qquad a_2 = 0{,}5$
c) $a_1 = 3 - \sqrt{6} \qquad a_2 = 3 + \sqrt{6}$

06_Facit 2c_220117.indd 270 2022-01-17 18:39

2143 a) $x_1 = -1{,}5 + \sqrt{4{,}75} \approx 0{,}68$
$x_2 = -1{,}5 - \sqrt{4{,}75} \approx -3{,}68$
b) $x_1 = 5 \quad x_2 = -1$
c) $x = 1 \pm \sqrt{2}$

2144 a) $a > 4$
Ledtråd:
Kvadratrotsmetoden ger
$x = \pm\sqrt{4 - a}$
b) $a > 36$

2145 a) $x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$
b) $x_1 = \frac{4}{5} \qquad x_2 = -\frac{2}{5}$
Lösning:
$$x^2 - \frac{2x}{5} - \frac{8}{25} = 0$$
$$x^2 - \frac{2}{5}\cdot x - \frac{8}{25} = 0$$
$$x = \frac{1}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{8}{25}}$$
$$x = \frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{9}{25}}$$
$$x = \frac{1}{5} \pm \frac{3}{5}$$
$$x_1 = \frac{4}{5} \qquad x_2 = -\frac{2}{5}$$
c) $x_1 = 5 \;\; x_2 = -\frac{5}{3}$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas om till
$$x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{25}{3} = 0$$

2146 a) $p > 3$ b) $p < 3$ c) $p = 3$

2147 Nej, båda har fel.
Förklaring:
Ekvationen $x^2 + px + q = 0$
har rötterna
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
Ekvationen saknar reella rötter
om diskriminanten
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ dvs.
$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$
$$\frac{p^2}{4} < q$$
Både Pone och Hanna har fel.

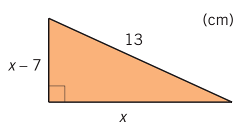
2148 a) *Lösning:*
$ax^2 + bx + c = 0$
Division med a ger
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
pq-formeln ger:
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} =$$
$$= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} =$$
$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
b) $x_1 = 12 \qquad x_2 = -5$
c) $6x^2 - 12x - 90 = 0$

2149 De ska lösa $x^2 - 5x - 6 = 0$
Motivering:
Indras ekvation $(x + 6)(x - 1) = 0$
som kan skrivas $x^2 + 5x - 6 = 0$
Fannys ekvation
$(x - 2)(x - 3) = 0$ som kan
skrivas $x^2 - 5x + 6 = 0$

2152 a) $x(x + 6) = 280$
b) Sidorna är 14 cm och 20 cm.

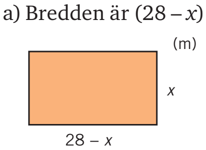
2153 a) $x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 5\,547$ eller
$x^2 - (0{,}5x)^2 = 5\,547$
b) $x = 86 \quad (x > 0)$
c) Talen är 86 och 43.

2154 Arean är 30 cm^2.



Ledtråd:
Använd Pythagoras sats.

2155 a) Bredden är $(28 - x)$ m



Ledtråd:
Längden + bredden =
= halva omkretsen
b) Sidorna är 10 m och 18 m.

2156 Det jämna talet är 34.
Ledtråd:
Lös ekvationen
$x(x + 2) = 1\,155$
Sökt tal $= x + 1$

2157 $x = -1$
Ledtråd:
Sätt in $x = 2$ och $c = 2b$ i
ekvationen: $2^2 - 2b - 2b = 0$

2158 $h < 1 + \sqrt{41}$

2159 Remsans bredd är 4,5 m.
Ledtråd:
Lös ekvationen
$(18 + 2x)(27 + 2x) = 2 \cdot 18 \cdot 27$

2160 Talen är 7 och 34.

2161 a) $n = 3$ ger $a = 7$,
$b = 24$ och $c = 25$
$7^2 + 24^2 = 25^2$
$n = 4$ ger $a = 9$,
$b = 40$ och $c = 41$
$9^2 + 40^2 = 41^2$
b) Vi ska visa att
$(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 =$
$= (2n^2 + 2n + 1)^2$
VL =
$= 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1$
HL =
$= (2n^2 + 2n + 1)(2n^2 + 2n +$
$+ 1) =$
$= 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 =$
= VL
VSV
c) T.ex. 6, 8 och 10
Ledtråd:
Formlerna ger alltid att a är
udda och att $c = b + 1$

Historik: Ekvationer och lösningsformler

1. 6 shekel/säckar
2. Astronomin innehåller flera komplicerade beräkningar.
3. $x = 2$
4. Grad 4
5. a) $k = 557/27 \approx 20{,}630$
   b) $x \approx 1{,}229$
6. $x \approx 2{,}144 \quad (x^3 + x = 12)$

2164 a) $x = 49$

b) Ekvationen saknar lösning.

Förklaring:

$\sqrt{49} \neq -7$

2165 a) $x = 7$

b) Lösning saknas.

Förklaring:

Kvadratroten ur ett tal är alltid ett positivt tal eller 0.

c) $x = 2$

($x = -1$ är en falsk rot.)

d) $x = 10$

2166 a) $x = 16$

Lösning:

$5\sqrt{x} - \sqrt{x} = 16$

$4\sqrt{x} = 16$

$\sqrt{x} = 4$

$x = 16$

b) $x = 0{,}09$

2167 a) $x = 4$

b) $x = 2$

c) $u = 7$

d) $x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$

2168 En falsk rot är en lösning som uppkommer vid omformning av ekvationen (t.ex. en kvadrering), men som inte är en lösning till den ursprungliga ekvationen.

2169 a) $x = -49$

Lösning:

$\sqrt{-x} = 7$

Vi kvadrerar båda leden.

$-x = 7^2$

$x = -49$

Kontroll:

$\sqrt{-(-49)} = \sqrt{49} = 7$

b) Ekvationen saknar lösning.

Förklaring:

$\sqrt{-(-49)} \neq -7$

2170 a) $x = 4$

b) $x = 4$

c) $x = 4$

Lösning:

$x - 2 = \sqrt{x}$

$(x-2)^2 = x$

$x^2 - 4x + 4 = x$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$x = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 4}$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = 1$

Kontroll av rötterna:

$x = 4$:

VL $= 4 - 2 = 2$

HL $= 2$

VL = HL, $x = 4$ är en rot

$x = 1$:

VL $= 1 - 2 = -1$

HL $= 1$

VL ≠ HL, $x = 1$ är en falsk rot.

2171 a) $x_1 = -\sqrt{5} \qquad x_2 = \sqrt{7}$

Ledtråd:

Nollproduktmetoden.

b) $x = 36$

c) $x_1 = 0 \qquad x_2 = 7$

d) $x = 4$

2172 $x = 4$

Ledtråd:

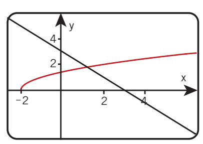
Skriv om till $\sqrt{x} = 6 - x$ och kvadrera sedan.

2173 a) *Lösning*:

Vi ritar grafen till

$y = \sqrt{x+2}$ och $y = 3 - x$

i samma koordinatsystem.



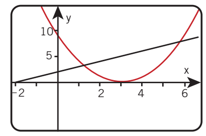
Graferna har *en* skärningspunkt vilket innebär att ekvationen har *en* rot.

b) *Lösning*:

Vi ritar grafen till

$y = x + 2$ och $y = (3 - x)^2$

i samma koordinatsystem.



Graferna har *två* skärningspunkter vilket innebär att ekvationen har *två* rötter.

2174 a) $x_1 = 16 \qquad x_2 = 81$

b) $x_1 = 16 \qquad x_2 = 81$

Ledtråd:

Rita graferna till $y = 13\sqrt{x}$ och $y = x + 36$ i samma koordinatsystem och avläs x–värdet i skärningspunkterna.

2175 a) $t = \frac{4}{9}$

b) $x = 9$

c) $x_1 = 0 \qquad x_2 = -1$

d) $x = 3$

Ledtråd:

Börja med att lösa ut rotuttrycket. Avsluta med att pröva rötterna.

2176 a) $x = -17$

Ledtråd:

Kvadrera två gånger.

b) $x = 3$

2177 a) Den negativa roten är falsk.

b) *Motivering*:

Kvadratroten ur ett tal, VL, är alltid ett positivt tal.

VL ≠ HL och roten är falsk.

2178 a) $t = 16$
Ledtråd:
Skriv om till $\sqrt{t+9} = 1 + \sqrt{t}$.
Kvadrera och lös sedan ut kvarvarande rotuttryck $2\sqrt{t}$ och kvadrera igen.
b) $s = 3$
c) $x = 6$

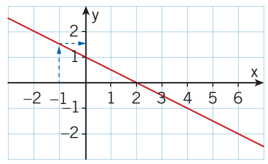
2179 a) $x = \dfrac{z^2 y}{1 - z^2}$
b) $a = \dfrac{b(N^2 + n^2)}{N^2 - n^2}$

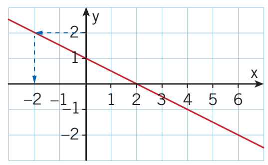
2180 $x = 6$
Ledtråd:
Börja med att multiplicera båda leden med de två nämnarna.

2181 a) $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 16$
Lösning:
Vi sätter $\sqrt{x} = t$.
Ekvationen kan då skrivas
$t^2 - 5t + 4 = 0$
$t = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 4}$
$t_1 = 4 \quad t_2 = 1$
Dessa värden sätts in i $\sqrt{x} = t$
$\sqrt{x} = 4$ ger $x = 16$
$\sqrt{x} = 1$ ger $x = 1$
b) $x = 1/625$
c) $x_1 = -3 \quad x_3 = 1$
$x_2 = -1 \quad x_4 = 3$
d) $x_1 = 8 \quad x_2 = 27$
Ledtråd:
Sätt $t = x^{1/3}$
e) $x = 16$

2204 a) $f(2) = 4$
b) $f(-2) = 16$
c) $f(2a) = 10 - 6a$
Ledtråd:
Ersätt x i $f(x) = 10 - 3x$ med $2a$.

2205 a) $x = 4$
Ledtråd:
Lös ekvationen
$5x - 12 = 8$
b) $x_1 = -3 \quad x_2 = 3$

2206 a) $f(4) = -1$
b) $f(-1) = 1{,}5$
Lösning:


c) $x = -2$
Lösning:


d) $x = 6$
e) $x > 2$

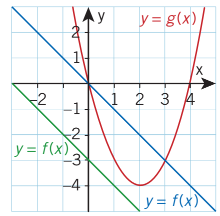
2207 a) $f(x) = x^2 + 3$
b) $f(x) = (x - 3)^2$

2208 a) $x = -1$ och $x = 5$
b) $1 < x < 3$
c) $x \leq -1$ och $x \geq 5$

2209 a) $f(2) = 400$
b) $x = 10$
c) Efter 2 minuter har Anna sprungit 400 m.
Det tar 10 minuter att springa 2 000 m.

2210 Definitionsmängd: $0 \leq x \leq 2$
Värdemängd: $0 \leq y \leq 4$

2211 T.ex. $f(x) = 2x + 14$
och $f(x) = x^2 + 6$

2212 a) $g(4) - f(4) = 4$
Lösning:
$g(4) - f(4) = 0 - (-4) = 4$
b) $x = 0$ och $x = 3$
c) $0 < x < 3$
d) $x \leq 0$ och $x \geq 3$
e) Ja, hon har rätt.
Motivering:
För x–värden i intervallet $-3 \leq x \leq 5$ saknar ekvationen lösning, eftersom grafen till $g(x)$ och grafen till $f(x) - 3$ saknar skärningspunkter.


2213 a) $k = 0{,}5$
Ledtråd:
$f(x) = kx + 3$ och
$f(4) = 5$ ger
$k \cdot 4 + 3 = 5$
b) $k = -6$

2214 a) $f(-3a) = -15a - 18a^2$
Lösning:
$f(x) = 5x - 2x^2$
$f(-3a) = 5 \cdot (-3a) - 2 \cdot (-3a)^2 =$
$= -15a - 2 \cdot 9a^2 = -15a - 18a^2$
b) $f(f(3)) = -33$
Lösning:
$f(x) = 5x - 2x^2$
$f(3) = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = -3$
$f(f(3)) = f(-3) =$
$= 5 \cdot (-3) - 2 \cdot (-3)^2 =$
$= -15 - 18 = -33$

2215 $y = 12x - 2x^2$
Definitionsmängd: $0 < x < 6$
Värdemängd: $0 < y \leq 18$
Ledtråd:
Rännans botten är $12 - 2x$.
Arean är störst då $x = 3$.

2216 a) $f(x) \cdot g(x) = 15x^2 + 10x$

b) $f(2x + 6) = 6x + 20$

c) $f(g(x)) = 15x + 2$

d) $g(f(x)) = 15x + 10$

e) $g(2x)/g(-2) = -x$

f) $g(x^2) \cdot (g(x))^2 = 125x^4$

2217 $a = 1,\ b = 0{,}5$
Ledtråd:
$f(ax + b) = x + 1$ leder till
$a^2 = 1$.
Lösningen $a = 1$ ger $b = 0{,}5$.
Lösningen $a = -1$ ger en motsägelse.

2218 a) $x \approx 1{,}5$ och $x \approx -3{,}5$

b) $-0{,}5 < x < 0$ och $2 < x < 3$

c) $x = 0$ och $x = 3$

d) $h(a) = 3$ eller $h(a) \approx 5{,}3$

2221 a) Minimipunkt.
Ledtråd:
Är koefficienten för x^2-termen positiv eller negativ?

b) Maximipunkt.

c) Maximipunkt.

d) Minimipunkt.

2222 a) Nollställen: $x = 2$ och $x = 6$
Symmetrilinje: $x = 4$
Extrempunkt: $(4, -1)$
Minsta värde: -1

b) Nollställen: $x = -1$ och $x = 1$
Symmetrilinje: $x = 0$ (y-axeln)
Extrempunkt: $(0, 1)$
Största värde: 1

c) $f(0) - h(0) = 2$
Lösning:
$f(0) - h(0) = 3 - 1 = 2$

2223 a) Minsta värdet är -4

b) Symmetrilinjen är $x = 1$

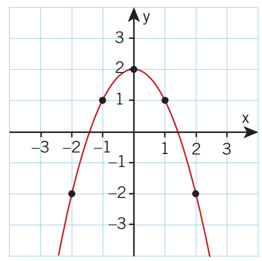
c) B:s koordinater är $(3, 0)$
Ledtråd:
Punkterna A och B har samma y-värde.
De ligger på samma avstånd från symmetrilinjen.

d) P:s koordinater är $(-2, 5)$
Ledtråd:
P ligger på samma avstånd från symmetrilinjen som Q.

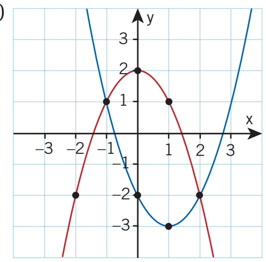
2224 a) Värdetabell

x	y
–2	–2
–1	1
0	2
1	1
2	–2

Graf

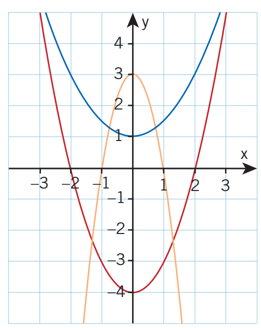


b)



c) Skärningspunkterna är $(-1, 1)$ och $(2, -2)$.

2225 a) Alla graferna är parabler. De är också symmetriska runt y-axeln.



b) De beskriver andragradsfunktioner. Alla tre kan skrivas $y = ax^2 + c$, dvs. $b = 0$ i den allmänna formeln $y = ax^2 + bx + c$

2226 Formel I och Graf A
Motivering:
Formel I har negativ x^2-term.
Funktionen har en maximipunkt.

Formel II och Graf B
Formel IV och Graf C
Motivering:
Båda graferna har y-axeln som symmetrilinje.
Vi kan skilja graferna åt t.ex. genom att sätta in $x = 2$ i formlerna vilket ger $y = 2$ respektive $y = 0$.

Formel III och Graf D
Motivering:
Grafen har inte y-axeln som symmetrilinje.
I formeln $y = ax^2 + bx + c$ gäller att $b \neq 0$.

2227 a) Det andra nollstället är $x = 7$.

b) Det andra nollstället är $x = -1$.

c) Det finns endast ett nollställe.

d) Det andra nollstället är $x = -7$.

2228 I punkten $(0, 7)$

2229 a) Den skär både x-axeln och y-axeln.

b) Den skär inte x-axeln, men y-axeln.

2230 a) $y = f(x)$
Nollställe: $x = 1$
En punkt på grafen: $(6, -4)$

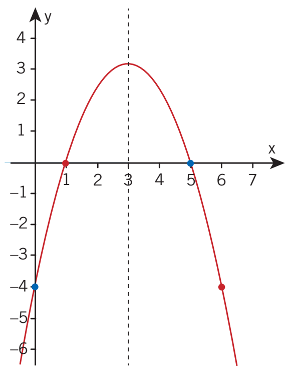
$y = g(x)$
Skärning med y-axeln: $y = -2$
Nollställe: $x = -5$

$y = h(x)$
Skärning med y-axeln: $y = -7$
Symmetrilinje: $x = -3$

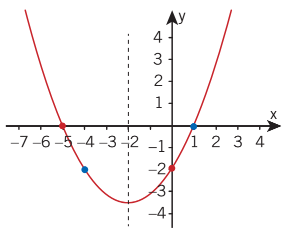
$y = c(x)$
En punkt på grafen: $(10, 8)$

b) *Lösning*:
De blå punkterna anges i uppgiften och de röda får man av symmetrin.

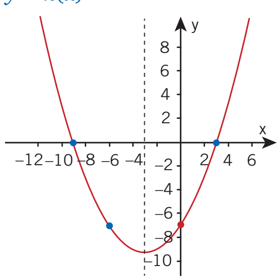
$y = f(x)$



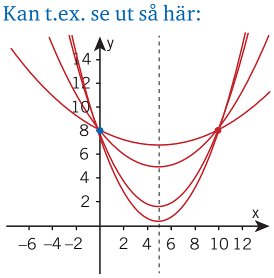
$y = g(x)$



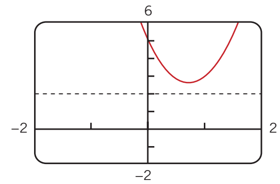
$y = h(x)$



$y = c(x)$
Kan t.ex. se ut så här:



2231 *Förklaring*:



Funktionens minsta värde är större än 2, dvs. det finns inget x-värde som ger $y = 2$.

2232 Punkterna (2, 8) och (–2, 24) ligger också på kurvan.

2233 a) $f(-1) = -4$

b) Funktionens nollställen är $x = -0{,}5$ och $x = 3$

2234 a) Ekvationen $2x^2 - 4x = 6$ har samma lösning som ekvationen
$2x^2 - 4x + 3 = 6 + 3$
Grafiskt kan vi lösa ekvationen $2x^2 - 4x + 3 = 9$ genom att avläsa x-värdet i skärningspunkterna mellan grafen till $y = 2x^2 - 4x + 3$ och $y = 9$.
Ekvationens lösning är $x_1 = -1$ och $x_2 = 3$.

b) Ekvationen $2x^2 - 4x + 3 = 3$ har lösningen $x_1 = 0$ och $x_2 = 2$.
Ekvationen kan skrivas $2x^2 - 4x = 0$.

2235 a) $c = -1$

b) $a = 1, b = 2$
Ledtråd:
Värdet på c och punkterna ger $\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = -1 \end{cases}$

2236 a) T.ex. $y = -6$

b) T.ex. $y = 0{,}5x^2 - 6$

2240 a) Minimipunkt.

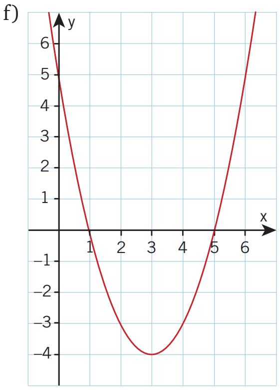
b) Nollställena är $x = 1$ och $x = 5$

c) Symmetrilinjen är $x = 3$.

d) Extrempunkten är en minimipunkt med koordinaterna (3, –4).

e) Minsta värde är –4.
Största värde saknas.

f)



2241 a) Minsta värdet är –4.
Ledtråd:
Funktionen har ett minsta värde och det är y-värdet på symmetrilinjen $x = -2$.

b) Största värdet är 3.
Ledtråd:
Symmetrilinjen är $x = -1$

c) Minsta värdet är 1.

d) Största värdet är 10.

2242 Funktionens största värde är maximipunktens y-koordinat.

2243 a) Koordinaterna för P är (0, 2).

b) Punkten M har koordinaterna (2, 6).

c) Koordinaterna för Q är (4, 2).

2244 a) Symmetrilinjen är $x = -3$.

b) Symmetrilinjen är $x = -1$.
Lösning:
$y = (x + 1)^2$
$y = 0$ ger funktionens nollställen. Funktionen har endast ett nollställe, $x = -1$.
Symmetrilinjen är $x = -1$.

2245 a) Extrempunkten (en maximipunkt) är (1,25; 62,5).

b) Extrempunkten (en minimipunkt) är (1; 0,5).

c) Extrempunkten (en minimipunkt) är (–0,6; –0,144).

2246 a) $a = 1$
Nollstället är $x = 1$.

b) Funktionen saknar nollställen då $a > 1$.

2247 a) Sant.
Motivering:
Omskrivning av $y = 0$ till formen
$x^2 + px + q = 0$ ger
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
Symmetrilinjen
$x = -\frac{p}{2}$ motsvaras då av
$y = -\frac{b\,/\,a}{2} = -\frac{b}{2a}$

b) Falskt.
Motivering:
Om vi multiplicerar $y = f(x)$ med en konstant a ($\neq 1$) så kommer alla y-värden att ändras till $y = a \cdot f(x)$. Symmetrilinjens ekvation samt eventuella nollställen är oförändrade.

2248 $y = x(x - 6) + 8$
Både $x = 0$ och $x = 6$ ger att $y = 0 + 8 = 8$.
Symmetrilinjen är $x = 3$, dvs. mitt emellan 0 och 6.

2249 a) $y = (x + 4)^2 + 6$

b) Minsta värdet är 6.

2250 a) $x = 2$ b) $a = 9$

2251 a) T.ex.
$f(x) = (x + 3)^2 - 5$
Motivering:
Minsta värdet fås då kvadraten $(x + 3)^2$ är noll, dvs. då $x = -3$.

b) T.ex.
$f(x) = (x - 2)^2 + 10$
Motivering:
Minsta värdet 10 får vi då $x = 2$, eftersom kvadraten $(x - 2)^2$ är noll.

c) T.ex.
$f(x) = -(x - 3)^2$
Motivering:
Funktionen har nollstället $x = 3$ som också är x-koordinaten för funktionens maximipunkt. Funktionen skär y-axeln för $y = -9$.

2252 a) $(b + x)^2$ kan inte vara negativt. Därför får funktionen sitt största värde när $(b + x)^2 = 0$, dvs. då $f(x) = 29$

b) $y \leq 29$

c) $(-b, 29)$

2253 a) $a = -2$, $b = 4$ och $c = 6$

b) Värdena byter tecken, dvs. $a = 2$, $b = -4$ och $c = -6$
Förklaring:
Om vi multiplicerar med –1 så blir alla positiva värden negativa och tvärtom, dvs. grafen speglas i x-axeln.

c) $a = -2$, $b = -4$ och $c = 6$

2255 a) T.ex.
$y = (x - 4)(x + 4)$
och
$y = 2(x - 4)(x + 4)$
Ledtråd:
En andragradsfunktion med nollställena $x = a$ och $x = b$ kan skrivas $y = k(x - a)(x - b)$

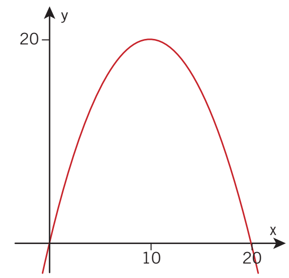
b) T.ex.
$y = (x + 2)(x - 8)$
och
$y = 3(x + 2)(x - 8)$

2256 a) $y = 0{,}5x^2 - 3x - 4$

b) $y = 3x^2 - 8x + 102$

2257 a) $y = -\frac{1}{5}(x - 10)(x + 10)$
Ledtråd:
En andragradsfunktion med nollställena $x = a$ och $x = b$ kan skrivas
$y = k(x - a)(x - b)$
Bestäm k med hjälp av skärningspunkten med y-axeln.

b) $y = -\frac{1}{5}x(x - 20)$
Ledtråd:



2258 Metod 1 kan användas då nollställena och ytterligare en punkt är känd.

Metod 2 kan användas då tre punkter är kända, varav en med fördel är skärningspunkten med y-axeln. Detta ger ett ekvationssystem.

Metod 3 kan användas när tre punkter är kända och man har tillgång till ett digitalt verktyg.

2259 a) $y = -x^2 + 2x + 6$
Ledtråd:
$x = 1$, $y = 7$ insatt i
$y = ax^2 + bx + 6$
ger en ekvation.

b) $y = -x^2 + 2x + 6$

2260 Nej.
Motivering:
$x = 9$ insatt i funktionen
$y = 3x^2 - 4x + 12$ ger $y = 219$.

2261 a) $y = -0{,}0390625x^2 + 2{,}5x$

b) Ja, med ca 1 dm marginal.

2262 a) T.ex.
$y = x(1\,200 - x) = 1\,200x - x^2$

b) Ja.
Motivering:
Nollställena förändras inte om funktionen multipliceras med en konstant så t.ex.
$y = 2x(1\,200 - x) =$
$= 2\,400x - 2x^2$
beskriver en annan projektilbana med samma nedslagsplats.

2264 a) Stenen är 45 m över marken.
Lösning:
$h(1) = 50 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = 45$

b) Stenen når sin högsta höjd efter 5 s.
Lösning:
$h(t) = 0$
$50t - 5t^2 = 0$
$5t(10 - t) = 0$
$t_1 = 0$ och $t_2 = 10$
Symmetrilinjen är $t = 5$
Största värdet ligger på symmetrilinjen.

c) Stenens högsta höjd är 125 m.
Lösning:
$h(5) = 50 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 = 125$

d) Stenen är 80 m över marken efter 2 s och efter 8 s.
Lösning:
$h(t) = 80$
$50t - 5t^2 = 80$
$t^2 - 10t + 16 = 0$
$t = 5 \pm \sqrt{5^2 - 16}$
$t = 5 \pm 3$
$t_1 = 2$ och $t_2 = 8$

2265 a) $(24 - x)$ cm

b) $A = x(24 - x)$

c) $x_1 = 0 \quad x_2 = 24$

d) Största arean är 144 cm^2.

e) Definitionsmängd: $0 < x < 24$
Värdemängd: $0 < A \leq 144$

2266 a) Stoppsträckan är 150 m.
(148,5)

b) Högst 39 km/h.

2267 a) Avståndet är ca 38 m.

b) Högsta höjden är ca 7,0 m.

c) $x = 0$ ger $y = 0$, dvs. höjden är 0 m från början.

2268 a) Triangelns area är 22,5 a.e.
Ledtråd:
Basen $= 5$ l.e.
Höjden $= 1{,}8 \cdot 5$ l.e.

b) $a \approx 9{,}43$

2269 A $(-605, 182)$
B $(0, 56)$
C $(605, 182)$

2270 a) $y = x(300 - 2x) = 300x - 2x^2$

b) $0 < x < 150$

c) Maximala arean är 11 250 m^2
Värdemängd: $0 < y \leq 11\,250$

2271 a) Höjden är 3,2 m.

b) Högsta höjden är 5,0 m.

c) Tiden i luften är 1,6 s.

2272 a) $10 < x < 40$

b) Största vinsten är 90 miljoner kronor.

2302 a) Efter 5 år finns det 89 mg kvar, efter 20 år finns det 63 mg och efter 100 år 9,8 mg.

b) Mängden minskar med 2,3 % per år.
Ledtråd:
$a = 0{,}977$ är en förändringsfaktor.

c) 100 mg

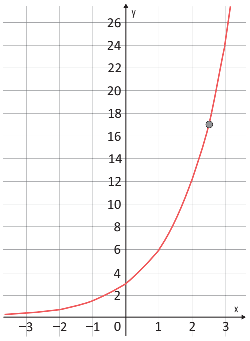
2303 a) Funktionerna **A**, **D** och **E** är exponentialfunktioner.
Motivering:
Alla kan skrivas på formen
$y = Ca^x$
$y = 3^x$ där $C = 1$ och $a = 3$
$y = 3 \cdot 10^x$ där $C = 3$ och $a = 10$
$y = 0{,}1^x$ där $C = 1$ och $a = 0{,}1$

b) Funktionerna **A** och **D**.
Motivering:
$a > 1$ motsvarar en exponentiell ökning.

c) Funktionen **E**.
Motivering:
$a < 1$ motsvarar en exponentiell minskning.

d) Ja, **B** och **C** är potensfunktioner och **F** är en linjär funktion.
Ledtråd:
Potensfunktioner kan skrivas $y = Cx^a$

2304 a)



b) Se markering i grafen ovan.

c) $f(2{,}5) \approx 17$

d) $x \approx 7{,}64$

e) $x < 2{,}74$
Ledtråd:
Rita graferna till $y = 3 \cdot 2^x$ och $y = 20$.

2305 Ja, det stämmer.
Motivering:
Det tar 6,6 år för ett värde att halveras om det minskar med 10 % per år.
Det tar 7,3 år för ett värde att dubbleras om det ökar med 10 % per år.
Ledtråd:
Ekvationen $C \cdot 0{,}9^x = 0{,}5C$ kan skrivas $0{,}9^x = 0{,}5$.
Lös ekvationerna grafiskt eller med prövning.

2306 a) Det finns ca 180 sniglar.
Ledtråd:
En ökning med 30 % motsvarar förändringsfaktorn 1,30.Funktionen kan skrivas $y = 80 \cdot 1{,}30^x$

b) Det tar ca 9 veckor.
Ledtråd:
Rita graferna till $y = 80 \cdot 1{,}30^x$ och $y = 800$.

c) Det tar ca 13 veckor.

2307 a) Graf C.
Motivering:
Formeln beskriver en rät linje.

b) Jag sätter in t.ex. $x = 2$ i formeln och beräknar y.
Det ger $y = 1\,800$.
Graf A beskrivs med formeln.

c) $C = 800$ och $a = 1{,}26$
Lösning:
$y = C \cdot a^x$
$C = 800$ ("startvärdet")
$y = 800 \cdot a^x$
Punkten (3, 1 600) ligger på grafen.
Vi sätter in $x = 3$, $y = 1\,600$ för att beräkna a.
$1\,600 = 800 \cdot a^3$
$2 = a^3$
$a = 2^{1/3} \approx 1{,}26$
Formeln är $y = 800 \cdot 1{,}26^x$

2308 a) Halten är 39,8 g/m^3.
Ledtråd:
$t = 0{,}25$ h

b) $y = 40 \cdot 0{,}696^t$
Ledtråd:
Halten minskar med ca 30,4 % per dygn.

2309 $y = 12\,000 \cdot 1{,}06^t$
Ledtråd:
Lös ekvationen
$12\,000 \cdot a^4 = 15\,200$

2310 a) $f(x) = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3})^x$
b) $f(0) = \sqrt{3}$ $f(7) = 81$

2313 a) $x = 5$
Ledtråd:
Skriv högerledet som en potens med basen 10.

b) $x = 2$

c) $x = -5$

d) $x = -2$

2314 a) $x = \lg 5 \approx 0{,}699$

b) $x = \lg 13 \approx 1{,}114$

c) $x = \lg 5\,000 \approx 3{,}699$

d) $x = \lg 0{,}045 \approx -1{,}347$

2315 a) A $x \approx 0{,}3$
B $x \approx 0{,}9$
C $x \approx -0{,}3$
Ledtråd:
Avläs x-värdet då $y = 2$, $y = 8$ respektive $y = 0{,}5$.

b) A $x \approx 0{,}30$
B $x \approx 0{,}90$
C $x \approx -0{,}30$

2316 a) $x = \lg 24$

b) $x = \lg 3$

c) $x = \dfrac{\lg 50}{2}$

d) $x = \dfrac{4}{3}$

2317 a) $x \approx 1{,}85$

b) $x \approx 1{,}85$

2318 a) $10^{2,5} > 100$
Motivering:
$10^2 = 100$
$10^3 = 1\,000$
$10^{2,5}$ är ett tal mellan 100 och 1 000.
$10^{2,5}$ är alltså större än 100.

b) $10^{-1,5} < 0{,}15$
Motivering:
$10^{-1} = 0{,}1 = 0{,}10$
$10^{-2} = 0{,}01$
$10^{-1,5}$ är ett tal mellan 0,01 och 0,10.
$10^{-1,5}$ är alltså mindre än 0,15.

c) $2 \cdot 10^{-4} = \dfrac{2}{10^4}$
Motivering:
Vi använder potenslagen
$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
$2 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot \dfrac{1}{10^4} = \dfrac{2}{10^4}$

d) $10^{-3,5} < 0{,}001$
Motivering:
$10^{-3} = 0{,}001$
$10^{-4} = 0{,}0001$
$10^{-3,5}$ är ett tal mellan 0,0001 och 0,001.
$10^{-3,5}$ är alltså mindre än 0,001.

2319 a) $3 < x < 4$
Lösning:
$10^3 = 1\,000$
$10^4 = 10\,000$
$10^3 < 4\,100 < 10^4$

b) $4 < x < 5$

c) $-2 < x < -1$

d) $-4 < x < -3$

2320 a) $x = \dfrac{\lg 60}{3} \approx 0{,}59$

b) $x = \lg 4 \approx 0{,}60$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas
$2 \cdot 10^x = 8$

c) $x = 1{,}5$

d) $x = \lg 50 \approx 1{,}70$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas
$0{,}8 \cdot 10^x = 40$

2325 a) $\lg 100\,000 = 5$
Ledtråd:
lg 100 000 är exponenten då 100 000 skrivs med basen 10.

b) $\lg 0{,}01 = -2$

c) $\lg 10 = 1$

d) $\lg 1 = 0$

e) $\lg 10^3 = 3$

f) $\lg \dfrac{1}{1\,000} = -3$

2326 a) $\lg 3 \approx 0{,}477$

b) $\lg 150 \approx 2{,}176$

c) $\lg 0{,}3 \approx -0{,}523$

d) $\lg -150$ saknar värde.
Logaritmer är bara definierade för positiva tal.

2327 a) $x = 100$
Lösning:
$\lg x = 2$
$x = 10^2$
$x = 100$

b) $p = 100\,000$

c) $x = 0{,}001$
Lösning:
$\lg x = -3$
$x = 10^{-3}$
$x = 0{,}001$

d) $p = 0{,}1$

2328 a) $\lg 2 \approx 0{,}3$

Ledtråd:
$\lg 2$ är x-värdet i den punkt på kurvan $y = 10^x$ där $y = 2$

b) $\lg 8 \approx 0{,}9$

c) $\lg 0{,}5 \approx -0{,}3$

d) $a \approx 3{,}2$

2329 a) $x = 10^{1,2} \approx 15{,}85$

b) $y = 10^{1/4} \approx 1{,}78$

c) $a = 10^{1,9} \approx 79{,}43$

d) $x = 10^{-3,2} \approx 6{,}31 \cdot 10^{-4}$

2330 Ja, hon har rätt.
Motivering:
$\lg 100 = 2$ och $\lg 1\,000 = 3$
$100 < 400 < 1\,000$ ger att
$2 < \lg 400 < 3$
$\lg x$ ökar alltid om x ökar.

2331 a) $x = 4$ b) $x = 0$

2332 $\lg 0{,}2$ 10^{-3} $\lg 95$ $\lg 10^5$
Motivering:
$\lg 95 \approx \lg 100 = 2$
$10^{-3} = 0{,}001$
$\lg 10^5 = 5$
$\lg 0{,}2 \approx \lg 0{,}1 = -1$

2333 10^x kan bara bli positiva tal, $10^x > 0$.
Det finns inga reella tal x som ger $10^x = 0$ eller $10^x = -1$.
Därför saknas värde för $\lg 0$ och $\lg -1$.
Kommentar:
Om din räknare ger svar, så är den inställd på räkning med komplexa tal.

2334 a) *Lösning*:
$\lg 2 \approx 0{,}3$
$\lg 20 \approx 1{,}3$
$\lg 200 \approx 2{,}3$
$\lg 2\,000 \approx 3{,}3$
När talet ökar med en faktor 10 så ökar tiologaritmen för talet med $\lg 10 = 1$

b) $\lg 20\,000 \approx 4{,}3$
$\lg 0{,}2 \approx -0{,}7$

2335 Det största talet är 4 och det minsta talet är $\lg 10^{-4}$

2336 a) $0{,}1 = 10^{\lg 0,1} = 10^{-1}$
$2 = 10^{\lg 2}$

b) $0{,}1 = \lg 10^{0,1}$
$2 = \lg 10^2 = \lg 100$

2337 a) $x \approx 3{,}981$

b) $x \approx 0{,}706$
Lösning:
Metod 1:
$\lg 2x = 0{,}15 \Leftrightarrow 2x = 10^{0,15}$
$$x = \frac{10^{0,15}}{2} \approx 0{,}706$$
Metod 2:
$\lg 2x = 0{,}15$
$10^{\lg 2x} = 10^{0,15}$
$2x = 10^{0,15}$
$$x = \frac{10^{0,15}}{2} \approx 0{,}706$$

c) $x \approx 3{,}162$

d) $x \approx 0{,}287$

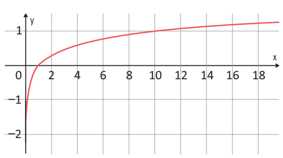
e) $x \approx -50{,}119$

f) $x = 500$

2338 a)

x	0,1	1	10	100	1 000
$y = \lg x$	–1	0	1	2	3

b)



2339 a) $x = \dfrac{\lg 8 - 4}{3}$
Lösning:
Metod 1:
$10^{4+3x} = 8 \Leftrightarrow 4 + 3x = \lg 8$
$$x = \frac{\lg 8 - 4}{3}$$
Metod 2:
$10^{4+3x} = 8$
Logaritmera båda leden.
$\lg 10^{4+3x} = \lg 8$
$4 + 3x = \lg 8$
$$x = \frac{\lg 8 - 4}{3}$$

b) $x = \dfrac{\lg 60 + 1}{3}$

c) $x = 2$

d) $x = -\lg 5$

2340 $x = \lg 1$ kan vara lösningen till en ekvation.
Man kan tolka tiologaritm för 1 som exponenten då 1 skrivs med basen 10.
$1 = 10^0$ och $\lg 1 = 0$
$\lg x = 1$ är en ekvation som vi kan lösa och få fram ett värde på x.
Lösningen är $x = 10^1 = 10$.

2341 a) $\text{pH} \approx 2{,}2$

b) *Lösning*:
$\text{pH} = -\lg\,[H^+]$
$-\text{pH} = \lg\,[H^+]$
$10^{-\text{pH}} = 10^{\lg[H^+]}$
$10^{-\text{pH}} = [H^+]$

c) $[H^+] \approx 0{,}032$ mol/dm^3

d) Vätejonkoncentrationen är 1 000 gånger högre i en lösning med pH = 2 än i en lösning med pH = 5.
Ledtråd:
pH = 5 motsvarar
$[H^+] = 10^{-5}$ mol/dm^3 =
= 0,000 01 mol/dm^3

2342 a) $x = 33$ b) $x = 10^{0,1}$

2343 Definitionsmängd: $x > 0$
Värdemängd: Alla y

2344 $x = \dfrac{\lg 5}{2 \lg 2}$
Ledtråd:
$(10^{\lg 2})^{2x} = 5$

2348 a) Talet är 77.

b) Talet är 77.

c) Talet är 23.

d) Talet är 8.
Ledtråd:
$56 = 7 \cdot 8$

2349 a) $x = \dfrac{\lg 8}{\lg 5} \approx 1{,}292$

b) $x = \dfrac{\lg 12}{\lg 3} \approx 2{,}262$

c) $x = \lg 250 \approx 2{,}398$

d) $x = \dfrac{\lg 2}{\lg 1{,}05} \approx 14{,}207$

2350 a) $x = 30$

b) $x = 5$

c) $x = 15$

Lösning:
$\lg 2x = \lg 6 + \lg 5$
Logaritmlag (1) ger
$\lg 2x = \lg 6 \cdot 5$
$\lg 2x = \lg 30$
$2x = 30$
$x = 15$

d) $x = 8$

2351 a) $x \approx 4$

b) $x = \dfrac{\lg 5}{\lg 1{,}5}$

c) $x \approx 3{,}97$

2352 a) $x = \dfrac{\lg(14/3)}{\lg 1{,}08} \approx 20{,}02$

Lösning:
$3 \cdot 1{,}08^x = 14$
$1{,}08^x = 14/3$
$\lg 1{,}08^x = \lg(14/3)$
$x \cdot \lg 1{,}08 = \lg(14/3)$

$x = \dfrac{\lg(14/3)}{\lg 1{,}08} \approx 20{,}02$

b) $x = \dfrac{\lg(38/82)}{\lg 0{,}65} \approx 1{,}79$

c) $x = \dfrac{\lg 4{,}5}{5\lg 2} \approx 0{,}43$

Lösning:
$32 \cdot 2^{5x} = 144$
$2^{5x} = 4{,}5$
$\lg 2^{5x} = \lg 4{,}5$
$5x \cdot \lg 2 = \lg 4{,}5$

$x = \dfrac{\lg 4{,}5}{5\lg 2} \approx 0{,}43$

d) $x = -\dfrac{\lg(305/67)}{0{,}6 \cdot \lg 0{,}5} \approx 3{,}64$

2353 a) Logaritmlagen
$\lg x - \lg y = \lg \dfrac{x}{y}$ ger

$\lg 37 - \lg 8 = \lg \dfrac{37}{8}$ $(\approx 0{,}665)$

Pierres svar $\dfrac{\lg 37}{\lg 8} \approx 1{,}74$

b) Fia tänker nog att det står $\lg(5x)^2$ som kan skrivas $2\lg 5x$.

Logaritmlag (3) ger
$\lg x^p = p \cdot \lg x$ ger att
$\lg 5x^2 = \lg 5 + \lg x^2 =$
$= \lg 5 + 2\lg x$

2354 a) *Lösning*:
$\lg 7 - \lg 70 =$

$= \lg\left(\dfrac{7}{70}\right) = \lg 0{,}1 = -1$

b) *Lösning*:
$\lg 250 + \lg 8 - \lg 2 =$
$= \lg(250 \cdot 8) - \lg 2 =$
$= \lg 2\,000 - \lg 2 =$

$= \lg\left(\dfrac{2\,000}{2}\right) = \lg 1\,000 = 3$

2355 a) *Lösning*:
$\lg 4^2 = 2 \cdot \lg 4 \approx$
$\approx 2 \cdot 0{,}60 = 1{,}20$

b) *Lösning*:
$\lg 25 = \lg 5^2 = 2 \cdot \lg 5 \approx$
$\approx 2 \cdot 0{,}70 = 1{,}40$

c) *Lösning*:
$2\lg 49 = 2\lg 7^2 = 4 \cdot \lg 7 \approx$
$\approx 4 \cdot 0{,}85 = 3{,}40$

2356 a) *Lösning*:
$x = 3$ prövas
$VL = 2 \cdot \lg 3 \approx 0{,}954$
$HL = \lg 9 \approx 0{,}954$
$x = 3$ är en rot.

$x = -3$ prövas
$VL = 2 \cdot \lg(-3)$
kan ej beräknas.
$x = -3$ är inte en rot.

b) Andys svar är fel. Han kontrollerar inte rötterna. $x = -3$ är en falsk rot eftersom vi endast kan beräkna $\lg x$ då x är ett positivt tal.

2357 a) $a = 0{,}1$

b) $a = 0{,}01$

Ledtråd:
$\lg 0{,}5a + \lg 2a$ kan skrivas
$\lg(0{,}5a \cdot 2a) = \lg a^2$

2358 a) $x = 72$

Ledtråd:
Högerledet kan skrivas
$\lg 3^2 + \lg 2^3$

b) $x = 125$

Ledtråd:
Högerledet kan skrivas
$3 \cdot \lg 5$

c) $x = 0{,}3$

Ledtråd:
Högerledet kan skrivas
$\lg 30 - \lg 100$

2359 a) Uttrycket kan förenklas till 0.

b) $\lg a^{10}$ eller $10\lg a$.

c) Uttrycket kan förenklas till
$-0{,}5\lg x = -\lg x^{0{,}5} = -\lg\sqrt{x}$

Lösning:
$\lg\sqrt{x} + \lg\left(\dfrac{1}{x}\right) =$

$= \lg x^{0{,}5} + \lg 1 - \lg x =$
$= 0{,}5\lg x - \lg x =$
$= -0{,}5\lg x = -\lg\sqrt{x}$

d) $\lg 10a^{15}$

2360 a) $\lg 2\,000 \approx 3{,}3$

Ledtråd:
$\lg 2\,000 = \lg 2 + \lg 1\,000$

b) $\lg 8 \approx 0{,}9$

Ledtråd:
$\lg 2^3 = 3\lg 2$

2361 a) $x = 2$

Lösning:
$2\lg x = \lg 2x$

Alternativ 1
$\lg x^2 = \lg 2x$
$x^2 = 2x$
$x = 2$ ($x = 0$ falsk rot)

Alternativ 2
$2\lg x = \lg 2 + \lg x$
$\lg x = \lg 2$
$x = 2$

b) $x = \pm\,0{,}5$

Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas
$\lg(1 - x^2) = \lg 0{,}75$

c) $x = 16$

Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas

$\lg\dfrac{x^2}{4} = \lg(3x + 16)$ $(x > 0)$

2362 a) $x = \dfrac{\lg 2}{\lg(4/3)} \approx 2{,}41$

Ledtråd:
Logaritmlagarna ger
$\lg 2 + x\lg 3 = x\lg 4$
som kan skrivas om till
$\lg 2 = x(\lg 4 - \lg 3)$

b) $x = \dfrac{\lg(5/7)}{\lg(4/3)} \approx -1{,}17$

2363 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$

Ledtråd:
$\lg x + \lg y = 1$ ger
$\lg (xy) = 1 \Leftrightarrow xy = 10$
Eftersom talen x och y är positiva heltal finns det fyra möjliga alternativ. Testa alternativen i den andra ekvationen, $x \lg(2y) = 2$.

2364 $x_1 = 10 \qquad x_2 = 100$
Ledtråd:
Logaritmera båda leden och sätt $\lg x = t$.

2404 a) $x = \pm 3$

b) $x = \pm 2$

c) $x \approx 3{,}27$
Ledtråd:
Beräkna $35^{1/3}$ eller $\sqrt[3]{35}$

d) $x \approx 0{,}63$

2405 a) $2x^5 = 45$ är en potensekvation.
$x = 22{,}5^{1/5} \approx 1{,}86$

b) $2^x = 45$ är en exponentialekvation.
$x = \dfrac{\lg 45}{\lg 2} \approx 5{,}49$

c) $5x^2 = 45$ är en potensekvation och en andragradsekvation.
$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

2406 Talet är 55.

2407 a) $a = 74^{1/7} \approx 1{,}85$
Ledtråd:
Använd potenslag.

b) $y = \pm\sqrt{80} \approx \pm 8{,}94$

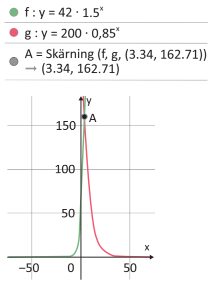
c) $a = 128^{1/3} \approx 5{,}04$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas
$(a^3)/64 = 2$.

d) $y = (0{,}896^{1/5})/4 \approx 0{,}974$

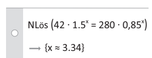
2408 a) $x = \dfrac{\lg 5}{\lg 2} \approx 2{,}32$

b) $x = \dfrac{\lg 4}{\lg 7} \approx 0{,}71$

2409 a) $x \approx 3{,}34$
Rita grafen till $y = 42 \cdot 1{,}5^x$ och grafen till $y = 280 \cdot 0{,}85^x$
Lösningen ges av x-värdet i skärningspunkten.



b) $x \approx 3{,}34$
Skriv
Lös$(42 \cdot 1{,}5^x = 280 \cdot 0{,}85^x)$
och välj ett ungefärligt (approximativt) svar
eller skriv
NLös$(42 \cdot 1{,}5^x = 280 \cdot 0{,}85^x)$
direkt.



2410 a) $x \approx 6{,}53$
Ledtråd:
Upphöj båda leden till $\dfrac{1}{1{,}19}$

b) $x \approx 1{,}95$
Ledtråd:
Upphöj båda leden till 3.

c) $x \approx 2{,}04$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas
$x^5 = 35$

d) $x \approx 28{,}1$
Ledtråd:
$a^x a^y = a^{x+y}$

2411 a) $x = -3$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas
$3^{4+x} = 3^1$

b) $x = 3$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas
$2^{1-x} = 2^{x-5}$

2412 Nej, det stämmer inte.
Motivering:
$\sqrt{x} = 3$ har lösningen
$x = 9$
och
$x^2 = 81$ har lösningen
$x = \pm 9$

2413 a) $x = \dfrac{\lg 17}{3 \lg 4}$
Ledtråd:
Börja med att logaritmera båda leden.

b) $x = \dfrac{\lg 21}{\lg 6} - 3$

c) $x = \dfrac{\lg 325}{4}$

d) $x = \dfrac{\lg 7}{3 \lg 3}$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas
$(3^x)^3 = 7$

2414 $\lg 0{,}01$
$0{,}5^2 = 4^{-1}$
2^0
$\lg 800$
$14^{1/2}$
Motivering:
$\lg 0{,}01 = -2$
$0{,}5^2 = 0{,}25$
$4^{-1} = \dfrac{1}{4^1} = 0{,}25$
$2^0 = 1$
$\lg 100\ (= 2) < \lg 800 <$
$< \lg 1\,000 (= 3)$
$\sqrt{9}\ (= 3) < \sqrt{14}\ (= 14^{1/2}) <$
$< \sqrt{16}\ (= 4)$

2415 a) $x = 4$

b) $x = \dfrac{\lg 7}{\lg 4} + 1$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas
$4^{x-1} = 7$

c) $a = 8^{1/5}$

d) $b = 1/3$

2416 a) $x = 17^{1/1,5} \approx 6{,}61$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas
$x^{1,5} = 17$

b) $x \approx -0{,}122$
Ledtråd:
Upphöj båda leden till 1/5.
Exponenterna ska vara lika.

2417 a) **A** Ekvationen kan skrivas:
$4^{1+x} = 4^6$
Lösningen är $x = 5$

B Ekvationen kan skrivas:
$2^{3x} = 2^4$
Lösningen är $x = 4/3$

C Ekvationen kan skrivas:
$3^{x+4} = 3^3$
Lösningen är $x = -1$

b) **A** $x = 5$
B $x = 4/3$
C $x = -1$

2418 a) $x = \dfrac{\lg 5}{\lg 5 - 2 \lg 7}$

b) $x = 1/2$

2419 a) $x = \left(\dfrac{c}{a}\right)^{1/b}$

b) $x = \left(\dfrac{\lg c}{b \lg a}\right)$

c) $x = \left(\dfrac{c}{a}\right)^{\left(\frac{1}{b-d}\right)}$

d) $x = 0$
(Om $a^b = c^d$: är lösningen alla x)

2422 Den årliga minskningen är 37 %.
Ledtråd:
Antag att den årliga förändringsfaktorn är x.
$25\,000 \cdot x^4 = 4000$

2423 a) $350\,000 \cdot 0{,}85^x = 210\,000$

b) $x \approx 3{,}1$
Efter ca 3 år.
Lösning:
$350\,000 \cdot 0{,}85^x = 210\,000$
$0{,}85^x = 0{,}6$
$\lg 0{,}85^x = \lg 0{,}6$
$x \lg 0{,}85 = \lg 0{,}6$
$x = \dfrac{\lg 0{,}6}{\lg 0{,}85} \approx 3{,}1$

c) $x \approx 3{,}1$
Ledtråd:
Rita graferna till
$y = 350\,000 \cdot 0{,}85^x$ och
$y = 210\,000$
eller till
$y = 0{,}85^x$ och $y = 0{,}6$.

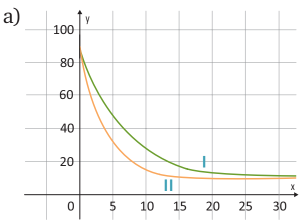
2424 a) Den 17:e oktober.
Ledtråd:
Lös ekvationen
$200 \cdot 2^x = 1000$

b) $x \approx 1{,}60$
Om antalet smittade var 200 personer den 1 oktober och antalet ökar med 60 % per vecka, kommer 820 personer att vara smittade den 22 oktober (3 veckor senare).

2425 Husets värde har ökat med 3,5 % per år.

2426 Ca 4 300 fiskar.
Lösning:
Formeln $y = C \cdot a^x$
y är antalet x år efter år 2012.
Vi sätter in $C = 10\,000$, $x = 6$ och $y = 6000$.
$10\,000 \cdot a^6 = 6000$
$a^6 = 0{,}6$
$a = 0{,}6^{1/6} \approx 0{,}918$
Vi får exponentialfunktionen
$y = 10\,000 \cdot 0{,}918^x$
År 2022 är $x = 10$ och
$y = 10\,000 \cdot 0{,}918^{10} \approx 4300$

2427 a)



b) 85 anger kaffetemperaturen från början. 10 anger kaffetemperaturen efter lång tid. Han har nog testat termosarna utomhus i 10 °C.

c) Differensen var ca 16 °C.

d) Efter 5 timmar.

2428 Värdet var ca 35 360 kr.
Ledtråd:
Förändringsfaktorn för den årliga förändringen var 1,0718.

2429 a) $p = 1\,013 \cdot 0{,}5^{h/5,8}$
eller
$p = 1\,013 \cdot 0{,}887^h$

b) Trycket är 170 hPa.

c) Höjden är 12 km.

2430 a) 904 poäng b) 182 cm

2431 Ja, det är rimligt.
Motivering:
Fördubblingstiden är 20 minuter.
Startvärdet är 2 000 bakterier.
Efter 3 h har bakterierna fördubblats 9 gånger, dvs. antalet är
$2000 \cdot 2^9 = 1\,024\,000$

2432 Formeln är $y = 400 \cdot 0{,}5^{x/24000}$
där y är mängden plutonium-239 i mg efter x år.
$x = 100\,000$ ger mängden 22 mg.

2433 a) Det återstår 100 mg.
Lösning:
Halveringstiden är 8,0 dygn. 16 dygn motsvarar 2 halveringstider.
Återstående mängd är
$0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 400$ mg $= 100$ mg.

b) 8,3 % sönderfaller varje dygn.

c) $y = 400 \cdot 0{,}917^x$
eller
$y = 400 \cdot (0{,}5^{1/8})^x = 400 \cdot 0{,}5^{x/8}$

2434 a) Temperaturen är 25 °C.

b) Temperaturen är 39 °C.
Ledtråd:
$t = 0{,}75$

c) Efter 1,7 timmar, dvs. efter ca 1h 40 min

2435 Halveringstiden är 24 h.

2436 År 1986.
Ledtråd:
Lika folkmängder ger
$38{,}7 \cdot 1{,}025^x = 55{,}6 \cdot 1{,}002^x$
Logaritmera och lös ut x
eller skriv först om till
$\left(\dfrac{1{,}025}{1{,}002}\right)^x = \left(\dfrac{55{,}6}{38{,}7}\right)$

2437 Jordens ålder är ca 6 miljarder år.
Ledtråd:
Antag att det fanns A atomer av vardera slaget från början.
Efter x år var antalet atomer:
U-235: $A \cdot 0{,}5^{x/T_1}$ där
$T_1 = 0{,}7 \cdot 10^9$ år
U-238: $A \cdot 0{,}5^{x/T_2}$ där
$T_2 = 4{,}5 \cdot 10^9$ år
140 ggr fler U-238 ger
$A \cdot 0{,}5^{x/T_2} = 140 \cdot A \cdot 0{,}5^{x/T_1}$
som kan skrivas om till
$0{,}5^{x/T_2 - x/T_1} = 140$
$0{,}5^{x(1/T_2 - 1/T_1)} = 140$
Logaritmera båda leden och lös ut x.
Sätt in värdet på T_1 och T_2.

2438 a) $E = 10^{1{,}5M + 4{,}4}$
Ledtråd:
$\lg E = 1{,}5M + 4{,}4$

b) $E_2/E_1 = 10^{1{,}5} \approx 32$
dvs. jordbävningen år 1906 frigjorde 32 gånger mer energi än den år 1989.

c) Magnituden ökar med 0,20.
Lösning:
$E_2/E_1 = 2$
$$\frac{10^{1{,}5M_2 + 4{,}4}}{10^{1{,}5M_1 + 4{,}4}} = 2$$
$10^{1{,}5M_2 - 1{,}5M_1} = 2$
$10^{1{,}5(M_2 - M_1)} = 2$
Logaritmering ger
$(M_2 - M_1) = \lg 2/1{,}5$
$M_2 - M_1 = 0{,}200\,68\ldots \approx 0{,}20$
Magnituden ökar med 0,20

2439 Ungefär kl. 11.30
Ledtråd:
$D = T - T_0$ där $T_0 = 20$ °C.
Det ger
$D = C \cdot a^t$ där t är tiden i minuter.

Sätt t.ex. $t = 0$ kl 15.00
Det ger $C = 9{,}5$

Beräkna a utifrån
$(27{,}0 - 20) = 9{,}5 \cdot a^{110}$
och bestäm t när $D = 37 - 20$.

Tema: Åldersbestämning med kol-14

1 a) Halveringstiden är 5 730 år.
b) T.ex. $y = y_0 \cdot 0{,}5^{x/5730}$
eller $y = y_0 \cdot 2^{-x/5730}$
c) Halten är 78,5 % (0,7851…)

2 Det återstår 25 %.

3 Halten är 48 %.

4 Fyndet var ca 32 000 år.
Ledtråd:
Lös ekvationen
$0{,}5^{x/5730} = 0{,}022$

5 Fyndet är ca 3 400 år gammalt.

6 Han levde för ca 5 200 år sedan.

7 Fyndet kan dateras till runt år 40 före vår tideräkning.
Ledtråd:
Sätt $y = \dfrac{\text{antal sönderfall}}{\text{gram och timme}}$
Det ger $723 = 920 \cdot 0{,}5^{x/5730}$

8 Halveringstiden är ca 400 år.
Ledtråd:
Lös ekvationen
$0{,}38 = 0{,}5^{560/T}$

2502 a) $y = 7{,}559x - 9{,}471$
b) $y = -0{,}4375x^2 + 7{,}475x + 11{,}45$
c) $y = 25{,}52 \cdot 1{,}396^x$
d) $y = 215{,}41 \cdot x^{0{,}512}$

2503 a) Exponentialfunktionen
$y = 25{,}67 \cdot 1{,}1^x$
b) Vid 31 °C är koncentrationen 500 ppm.

2504 a) Ja.
Motivering:
Två punkter räcker för att bestämma k och m i
$y = kx + m$
$y = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{1}{3}$

b) Nej.
Motivering:
Det finns inte en bestämd funktion utan flera olika andragradsfunktioner som går genom punkterna.
Två punkter räcker inte för att bestämma a, b och c i
$y = ax^2 + bx + c$

c) Ja.
Motivering:
Två punkter räcker för att bestämma konstanterna
C och a i $y = Ca^x$
Exponentiell regression ger
$y = 1{,}32 \cdot 1{,}52^x$

2505 a) Funktionen
$y = -3{,}4x + 100$
b) Vattnet kokar vid 91 °C.
c) På höjden 8,8 km.

2506 a) Linjär modell:
$y = 52{,}3x + 37{,}8$
Kvadratisk modell:
$y = 10{,}75x^2 + 20{,}05x + 48{,}55$
Exponentiell modell:
$y = 48{,}85 \cdot 1{,}623^x$
Ledtråd:
Kvadratisk funktion kan kallas polynomfunktion av grad 2 och betyder en andragradsfunktion.

b) Linjär modell: 14,6 år
Kvadratisk modell: 7,5 år
Exponentiell modell: 5,8 år

2507 a) Funktionerna är
$y_{\mathrm{I}} = 0{,}0060x^2 + 0{,}511x - 2{,}4$
$y_{\mathrm{II}} = 0{,}0061x^2 + 0{,}314x$
b) Bromssträckan var 15 m längre.

2508 Tian har rätt.
Förklaring:
En exponentiell funktion är antingen avtagande eller växande. Punkterna har samma y-värde, dvs. funktionens värde är varken växande eller avtagande.

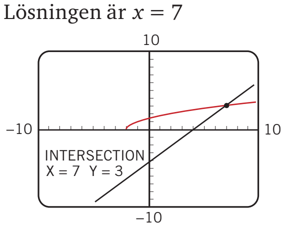
2509 Företagaren bör satsa ca 4 200 kr på reklam varje månad.
Lösning:
Om vi anpassar en andragradsfunktion där vinsten y kr varierar med x kr i reklam får vi
$y = -1{,}78x^2 + 14{,}8x - 3{,}49$
Funktionen har ett maximivärde $y \approx 27{,}3$ då $x \approx 4{,}2$.
Reklamkostnaderna 4 200 kr ger maximal vinst.

2510 Oljans densitet $\rho \approx 0{,}89$ g/cm^3
Ledtråd:
Anpassa en rät linje $F_{lyft} = k \cdot V$ där $k = \rho \cdot g$

Testa dig själv 2

1 a) $x_1 = 5$ $x_2 = -5$
b) $x_1 = 4$ $x_2 = -3$
c) $x_1 = 8$ $x_2 = 2$
d) $x_1 = 0$ $x_2 = -8/5$
Ledtråd:
Ekvationen kan förenklas till $5x^2 + 8x = 0$

2 a) Lösningen är $x = 7$.
Kommentar:
$x = 2$ är en falsk rot.
b) Lösningen är $x = 7$

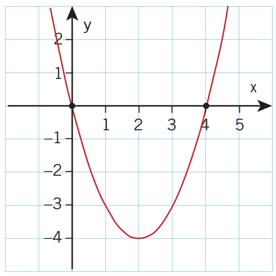


3 a) T.ex. $x^2 = -9$
b) T.ex. $(x - 2)(x - 4) = 0$

4 Talen är 12,5 och 16,5.

5 a) Maximipunkt.
Motivering:
Koefficienten framför x^2-termen är negativ.
b) Grafen skär y-axeln i punkten $(0, -5)$.
Motivering:
På y-axeln är $x = 0$
Då $x = 0$ är $y = -5$

6 a) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$
Kontroll:



b) Funktionen saknar nollställen.
Kontroll:
Grafen skär aldrig x-axeln.

7 Symmetrilinje: $x = 3$
Minsta värde: 1

8 a) $x = 1$ och $x = 5$
b) Symmetrilinjen är $x = 3$.
c) $a_1 = 2$, $a_2 = 4$
d) $f(-10)$ är minst.
Motivering:
$f(-10)$ är minst eftersom $x = -10$ ligger längre från symmetrilinjen ($x = 3$) än vad $x = 10$ gör.

9 a) Höjden är 6 m.
b) Sträckan är 25 m.

10 a) $\lg 100 = 2$
b) $\lg 0{,}1 = -1$
c) $\lg 1 = 0$

11 a) 1 b) $\lg x$

12 T.ex. $y = 8 \cdot 0{,}5^x$

13 a) $x = 140^{1/5}$ c) $x = \dfrac{\lg 140}{\lg 6}$
b) $x = \lg 5$ d) $x = 500$

14 Tiden är ca 10 år (9,6 år).

15 a) $x = -3$
Lösning:
$6^{x+1} \cdot 6^3 = 6$
$6^{x+4} = 6^1$
För exponenterna gäller:
$x + 4 = 1$
$x = -3$

b) $x = \dfrac{\lg 2}{\lg 6} - 4$
Lösning:
$6^{x+1} \cdot 6^3 = 2$
$6^{x+4} = 2$
$\lg 6^{x+4} = \lg 2$
$(x + 4) \cdot \lg 6 = \lg 2$
$x + 4 = \dfrac{\lg 2}{\lg 6}$
$x = \dfrac{\lg 2}{\lg 6} - 4$

16 $y = -0{,}2x^2 + 5{,}4x - 16$

Blandade övningar 2

1 a) 2 b) 1

2 a) $x_1 = -4$, $x_2 = 2$
b) $x_1 = 0$, $x_2 = -4$
c) Saknar reella rötter.

3 a) $x = 2$
b) Nollställena är $x = 0$ och $x = 4$.
c) Minsta värdet är –4.
d) $f(1) = -3$
e) $f(-5)$ är störst.
Motivering:
$f(-5)$ är störst eftersom $x = -5$ ligger längre från symmetrilinjen ($x = 2$) än vad $x = 8$ gör.
f) $b = -4$
Ledtråd:
Sätt in koordinaterna för det positiva nollstället i funktionen.

4 a) $x = \pm\sqrt{5}$
b) $x = \lg 2$
c) $x = 10^5$
d) $x = \dfrac{\lg 8}{\lg 5}$

5 Punkten (3, 6)
Ledtråd:
Symmetrilinjen är $x = 2$.

6 Nej.
Motivering:
$y = (x - 2)^2 + 5$
Funktionen skär aldrig x-axeln.
Minsta värdet är 5 eftersom kvadraten $(x - 2)^2$ som minst är noll, då $x = 2$.

7 Alternativ **C**: $\lg 80 \approx 1{,}9$
Motivering:
$\lg 10 = \lg 10^1 = 1$
$\lg 100 = \lg 10^2 = 2$
Eftersom $10 < 80 < 100$
så gäller $1 < \lg 80 < 2$
vilket stämmer med alternativ **C**.

8 $a = 21$
Motivering:
Lösningsformeln ger
$x = 5 \pm \sqrt{25 - a}$
$x = 5 \pm 2$ ger rötterna
$x = 3$ och $x = 7$
Detta gäller om
$\sqrt{25 - a} = 2$
$25 - a = 4$
$a = 21$

9 **A** $-1 < a < 0$

10 a) $x_1 = \dfrac{3}{2}$ $\quad x_2 = -\dfrac{1}{2}$

b) $x = 72$
Ledtråd:
Använd logaritmlagarna.

c) $x = 7$
Kommentar:
$x = 3$ är en falsk rot.

d) $x = 1/2$

11 Minsta värdet är -3.
Ledtråd:
Uttrycket kan skrivas
$3a^2 - 12a + 9$

12 $-1 < x < 0{,}1$
Ledtråd:
Lös en olikhet i taget.

13 $x = \lg 3$
Ledtråd:
Lös ekvationen
$2{,}5 \cdot 10^{2x} = 7{,}5 \cdot 10^x$

14 a) $y \leq 1$
Motivering:
Funktionens största värde är 1 eftersom $x^2 \geq 0$.
Möjliga värden på y är $y \leq 1$.

b) $y \geq -4$
Motivering:
$y = x^2 - 2x - 3$
Funktionen har en minimipunkt eftersom koefficienten för x^2-termen är positiv.
$y = 0$ ger
$x = 1 \pm \sqrt{1 + 3}$
Minimipunkten ligger på symmetrilinjen $x = 1$.
$x = 1$ ger $y = 1 - 2 - 3 = -4$
Minimipunkten har koordinaterna $(1, -4)$.
Möjliga värden på y är $y \geq -4$.

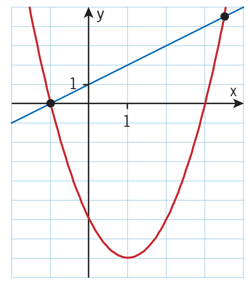
15 a) Värdet på c avläses där grafen skär y-axeln.
Förklaring:
På y-axeln är $x = 0$ vilket insatt i $y = ax^2 + bx + c$ ger $y = c$.

b) $y = 2x^2 - 4x - 6$ dvs.
$a = 2$, $b = -4$ och $c = -6$
Ledtråd:
Punkten $(0, -6)$ ger $c = -6$
Punkterna $(-1, 0)$ och $(3, 0)$ ger
$$\begin{cases} a - b - 6 = 0 \\ 9a + 3b - 6 = 0 \end{cases}$$

c) Nej.
Motivering:
Punkten $(10, 152)$ ligger på grafen om $f(10) = 152$.
$f(10) =$
$= 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 - 6 = 154$
Eftersom punkten $(10, 154)$ ligger på grafen så kan inte punkten $(10, 152)$ göra det.

d) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

e) $-1 < x < 3{,}5$
Lösning:
Vi ritar in linjen $y = x + 1$ och avläser x-värdet i skärningspunkterna.
$x_1 = -1$, $x_2 = 3{,}5$
Olikhetens lösning:
$-1 < x < 3{,}5$



16 a) 1,60
Lösning:
$\lg 40 = \lg (4 \cdot 10) =$
$= \lg 4 + \lg 10 \approx 0{,}60 + 1 =$
$= 1{,}60$

b) 1,20

c) $-0{,}60$

17 $2 \lg x$

18 $T = \dfrac{a \cdot \lg 0{,}5}{\lg (p/100)} = \dfrac{a \cdot \lg 0{,}5}{\lg p - 2}$
Lösning:
Använd $y = y_0 \cdot 0{,}5^{x/T}$
$\dfrac{y}{y_0} = \dfrac{p}{100}$ och $x = a$ ger
$\dfrac{p}{100} = 0{,}5^{a/T}$
$\lg\left(\dfrac{p}{100}\right) = \dfrac{a}{T} \cdot \lg 0{,}5$
$T = \dfrac{a \cdot \lg 0{,}5}{\lg (p/100)} = \dfrac{a \cdot \lg 0{,}5}{\lg p - 2}$

19 $x_1 = -1$ $\quad x_2 = \dfrac{1}{4}$

20 a) $x = 0$ ger $y = 80$
Temperaturen i koppen är från början 80 °C.

b) $x = 10$ ger $y \approx 64$
Efter 10 minuter har temperaturen sjunkit till 64 °C.

21 T.ex. $y = (x - 10)(x - 20)$ eller
$y = 2(x - 10)(x - 20)$

22 Josef är 29 år och Nina är 24 år.
Ledtråd:
Nina x år ger ekvationen
$x(x + 5) = 696$
$x^2 + 5x - 696 = 0$

23 a) $y = x(300 - 3x)$
b) Arean är 6 300 m^2.
c) $x_1 = 0,\ x_2 = 100$
d) Den maximala arean är 7 500 m^2.

24 $y = 20 \cdot 1{,}203^x$
$\left(y = 20 \cdot (40^{1/20})^x\right)$

25 a) T.ex.
En ny motorbåt kostar 160 000 kr.
Den minskar i värde med 5 % per år.
Efter hur många år är den värd 50 000 kr?
b) $x \approx 22{,}7$
Efter 23 år är båten värd 50 000 kr.

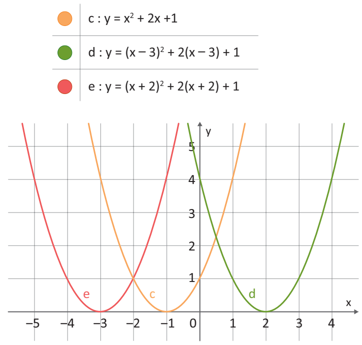
26 $x = 8$
Ledtråd:
Sätt först in $x = -6$
och beräkna a.

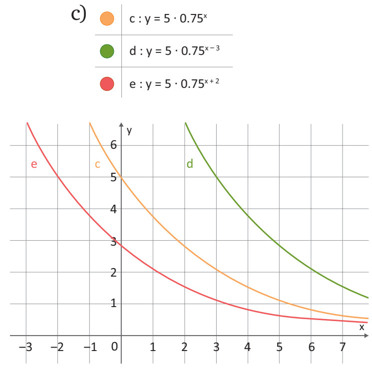
27 Tidpunkten är ca kl. 12.00
(ca 9 h före kl. 21.00).
Ledtråd:
Använd $y = Ca^x$
Bestäm förändringsfaktorn a
ur ekvationen $28{,}0 \cdot a^3 = 25{,}6$

28 2,8 m över marken.
Ledtråd:
Punkterna (0, 0), (40, 12) och (80, 0) ger funktionen.

29 Ekvationen har
en rot $x = -4$ då $a = 3$
och en rot $x = 8$ då $a = 27$.

30 a) $f(x)$ skär x-axeln då $x = -2$
$g(x)$ skär x-axeln då $x = 3$
$h(x)$ skär x-axeln då $x = -2$
och då $x = 3$
$f(x)$ skär y-axeln då $y = 2$
$g(x)$ skär y-axeln då $y = 12$
$h(x)$ skär y-axeln då $y = 24$
b) T.ex.
$f(x) = x - 2$ och $g(x) = x + 5$
$f(x)$ skär x-axeln då $x = 2$
$g(x)$ skär x-axeln då $x = -5$
$h(x)$ skär x-axeln då $x = 2$
och då $x = -5$
$f(x)$ skär y-axeln då $y = -2$
$g(x)$ skär y-axeln då $y = 5$
$h(x)$ skär y-axeln då $y = -10$
c) Andragradsfunktionen skär x-axeln där de två räta linjerna skär x-axeln.
Den skär y-axeln där y-värdet är produkten av de två räta linjernas m-värden.
Motivering:
$y = (k_1x + m_1)(k_2x + m_2)$
är noll då
$k_1x + m_1 = 0$ eller
$k_2x + m_2 = 0$
Utveckling ger:
$y = k_1k_2x^2 + (k_1m_2 + k_2m_1)x +$
$+ m_1m_2$
som ger
$y = m_1m_2$ om $x = 0$.

31 a) och b)


$d = -3$ förskjuter grafen 3 steg åt höger
$d = 2$ förskjuter grafen 2 steg åt vänster
c)


$d = -3$ förskjuter grafen 3 steg åt höger
$d = 2$ förskjuter grafen 2 steg åt vänster
d) Motsvarande gäller för linjära funktioner.
$d = -3$ förskjuter grafen 3 steg åt höger
$d = 2$ förskjuter grafen 2 steg åt vänster
e) Grafen förskjuts d steg åt höger om $d < 0$ och d steg åt vänster om $d > 0$.
Förklaring:
$f(x + d)$ antar samma värde som $f(x)$,
för x-värden som är $x + d$.
T.ex. $f(10 + 1) = f(11)$

Blandade övningar 1–2

1 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$

2 A Graf f
B Graf g
C Graf h
Ledtråd:
Bestäm någon punkt på grafen eller ta fram symmetrilinjen.

3 Uttrycken B och F.
Lösning:
A $2(x^2 - x) = 2x^2 - 2x$
B $\sqrt{2x \cdot 2x} = \sqrt{4x^2} = 2x$
C $\dfrac{2x + 2}{2} = \dfrac{2(x+1)}{2} = x + 1$
D $(x + 1)^2 - x^2 =$
$= x^2 + 2x + 1 - x^2 =$
$= 2x + 1$
E $\sqrt{2x + 2x} = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$
F $\dfrac{2x + 2x}{2} = \dfrac{4x}{2} = 2x$

4 T.ex. lg 2 000
Motivering:
$\lg 1000 = 3$ och $\lg 10000 = 4$
ger $3 < \lg 2000 < 4$

5 $-6x^2 + 21x - 18$

6 a) $x = 4^{1/5}$
b) Saknar reella rötter.
c) $y_1 = 0,\ y_2 = -3$
d) $x = \lg 2$
e) $a_1 = 0,\ a_2 = 8$
f) $x_1 = 0,\ x_2 = -1$

7 $(-4, 5)$
Ledtråd:
För grafen till en andragradsekvation gäller att symmetrilinjen ligger mitt emellan punkter med samma y-värde.

8 $a = -2/5 = -0{,}4$ $\quad b = 10$

9 a) $(x - 10)^2 - 100$
b) $\left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}$ eller
$(x + 2{,}5)^2 - 6{,}25$

10 $5(2a + b)(2a - b)$

11 Uteplatsen har måtten
3 m × 8 m eller 7 m × 12 m.

12 Ja, $k = -2/3$
Motivering:
Linje 1: $y = kx + 2$
Linje 2: $2x + 3y + 2 = 0$
kan skrivas $y = -\dfrac{2x}{3} - \dfrac{2}{3}$
Om linjerna har samma k-värde (och olika m-värde) är de parallella och skär aldrig varandra.

13 $x = -1$

14 a) Grafen beskriver en exponentiell minskning vilket ger $0 < a < 1$.
b) $y = 540 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ dvs.
$C = 540$ och $a = 1/3$
c) $y = 1620$ då $x = -1$

15 Den andra skärningspunkten är $(-3, -6)$

16 $2x^2 + 2$

17 Talen är 1,5 och 3,5.
Ledtråd:
Lös ekvationssystemet
$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 14{,}5 \end{cases}$

18 a) $x = 10^{3/2} = 10\sqrt{10}$
b) $x_1 = 4/9 \quad x_2 = 16/9$

19

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$g(f(x))$
2	3	9	80	16
–3	8	4	15	81

20 a) $f(10) \approx 58$
Efter 10 år är landets befolkning 58 miljoner.
b) Efter ca 21 år.

21 De bakar 257 små bullar och 395 stora bullar per dag.

22 a) 1 % ökning per dag ger förändringsfaktorn 1,01.
Efter 100 dagar är den totala förändringsfaktorn
$1{,}01^{100} \approx 2{,}7$
vilket är mer än en fördubbling.
b) Det krävs 70 dagar.
Lösning:
Antal dagar som krävs ges av
$1{,}01^x = 2$
$x = \lg 2/\lg 1{,}01 \approx 70$

23 a) Minskningen var 11 %.
b) År 2010.
Ledtråd:
Lös ekvationen
$12000 \cdot 1{,}065^x = 20000$

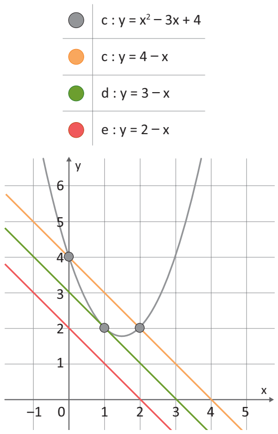
24 $a = -2$
Ledtråd:
Börja med att bestämma extrempunktens koordinater.

25 Det återstod 71 %.

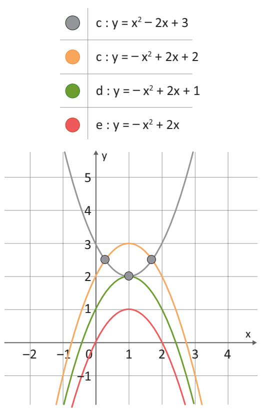
26 $b > 1$
Ledtråd:
Kvadrering och omskrivning ger
$x^2 + (2b - 2)x + b^2 - 1 = 0$
Undersök med lösningsformeln.

06_Facit 2c_220117.indd 287 2022-01-17 18:40

27 a) Falskt.
Förklaring:
Graferna till en rät linje och en andragradsfunktion kan ha två, en eller sakna skärningspunkter.



b) Sant.
Förklaring:
Graferna till två andragradsfunktioner kan ha två, en eller sakna skärningspunkter.



28 a) Rad 4:
$6 \cdot 8 - 4 \cdot 10 = 48 - 40 = 8$
Rad 5:
$7 \cdot 9 - 5 \cdot 11 = 63 - 55 = 8$

b) Talen är n, $(n + 2)$, $(n + 4)$, $(n + 6)$

c) Uttrycket i rad n är
$(n + 2) \cdot (n + 4) - n(n + 6) =$
$= n^2 + 4n + 2n + 8 - 6n - n^2 =$
$= 8$

29 a) Ja, linjen $y = 3$.
Motivering:
Den horisontella linjen $y = 3$ går genom punkterna (0, 3) och (4, 3).

b) Ja, punkterna ligger t.ex. på grafen till andragradsfunktionen $y = x^2 - 4x + 3$.
Motivering:
Ansatsen $y = x^2 + ax + b$ ger att funktionen $y = x^2 - 4x + 3$ går genom punkterna.

För att bestämma en specifik andragradsfunktion $y = ax^2 + bx + c$ behöver vi dock en punkt till.

c) Nej, punkterna kan inte ligga på grafen till en exponentialfunktion.
Motivering:
Ansats $y = Ca^x$ ger $C = 3$ och $a = 1$, dvs. linjen $y = 3$

En exponentialfunktion $y = Ca^x$ kan inte gå genom två punkter med samma y-värde eftersom $a \neq 1$.

30 a) $y = 5^{5x} - 5$ har nollstället
$x = 0{,}2 = 1/5$

b) $y = 3^{3x} - 3$ har nollstället
$x = 0{,}333... = 1/3$
och
$y = 2^{2x} - 2$ har nollstället
$x = 0{,}5 = 1/2$

c) $y = a^{ax} - a$ har nollstället
$x = \frac{1}{a}$
Bevis:
$a^{ax} - a = 0$
$a^{ax} = a^1$
$ax = 1$ ger $x = \frac{1}{a}$

Kapitel 3

3103 a) Sidovinklar
b) $x + x + 42° = 180°$
c) Vinklarna är 69° och 111°

3104 a) Kvadrat b) Liksidig triangel

3105 a Sidovinklar
b) Likbelägna vinklar
c) Alternatvinklar
d) Vertikalvinklar

3106 $x = 22°$ $y = 136°$
Motivering:
Basvinklarna i en likbent triangel är lika: $x = 22°$
Triangelns vinkelsumma är 180°: $y + 22° + 22° = 180°$
$y = 136°$

3107 Vinklarna är 27°, 63° och 90°

3108 a) Nej.
Motivering:
En trubbig vinkel är mer än 90°. Två trubbiga vinklar är därför tillsammans mer än triangelns vinkelsumma, 180°.

b) Ja.
Motivering:
Med exempel:
T.ex: 100°, 100°, 80° och 80°
Med resonemang:
För två trubbiga vinklar u och v i en fyrhörning gäller $180° < u + v < 360°$

3109 Alternativ **C**
Motivering:
Det finns många olika trianglar som är rätvinkliga och det finns många olika trianglar som är likbenta.
En triangeln som är rätvinklig och likbent har alltid vinklarna 45, 45 och 90 grader.