4443 a) $k = -4$

b) $k = 1{,}5$

Lösning:
$(-3)^3 + k \cdot (-3)^2 - k \cdot (-3) + 9 = 0$
$12k = 18$
$k = 1{,}5$

c) $k = 2$ eller $k = -1$

d) $k = 3$ eller $k = 4$

4444 $x^3 - 4x - 11$

4445 a) $a = \pm 2$

Ledtråd:
Om $x - a$ är en faktor innebär det att $p(a) = 0$

b) För alla värden på a.

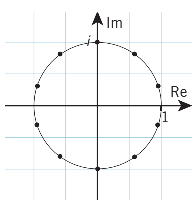
c) Sådant värde på a saknas.

Lösning:
Insättning av a ger:
$2a^3 - 6a^3 + 4a^3 + 15 =$
$= 0 + 15 \neq 0$

Historik Relevans: Carl Friedrich Gauss

1 Ekvationen har fem rötter.

2



3 Vi har ett polynom $f(x)$ med högsta grad n.

Enligt algebrans fundamentalsats finns det minst en rot x_1 till $f(x) = 0$

Enligt faktorsatsen är $(x - x_1)$ en faktor till $f(x)$ så

$f(x) = (x - x_1)g(x)$

där $g(x)$ är ett polynom med högsta grad $n - 1$.

Resonemanget upprepas n gånger och vi har visat att det finns exakt n rötter till $f(x)$.

4449 Ekvationen har 30 rötter.

4450 $x_1 = 1 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = -5$

Ledtråd:
Dividera polynomet med $(x - 1)$.

4451 $x_1 = -5 \quad x_2 = -i \quad x_3 = i$

Ledtråd:
Dividera polynomet med $(x + 5)$.

4452 $x_1 = 2 \quad x_2 = 4i \quad x_3 = -4i$

Lösning:
Ett nollställe till f är 2 vilket innebär att $f(x)$ innehåller faktorn $(x - 2)$.
Polynomdivision hjälper oss att faktorisera vänsterledet:
$(x - 2)(x^2 + 16) = 0$
Nollproduktsmetoden ger:
$x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow x_1 = 2$
$x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 4i,\ x_3 = -4i$

4453 $z_1 = 0 \quad z_2 = 2 + i \quad z_3 = 2 - i$

Ledtråd:
$z(z^2 - 4z + 5) = 0$

4454 $p(2 - 5i) = 0$

Ledtråd:
För polynom med reella koefficienter är icke-reella rötter konjugerande par.

4455 a) 4 rötter

Motivering:
Ekvationen är av fjärde graden.

b) $x_1 = 3i$
$x_2 = -3i$
$x_3 = x_4 = 1$

4456 a) $x = -1$

b) $x_1 = -1 \quad x_2 = i \quad x_3 = -i$

Ledtråd:
Faktorisera $f(x)$ genom att dividera $f(x)$ med $x + 1$.

4457 $-6i$ och $4 + i$

Ledtråd:
För polynom med reella koefficienter är icke-reella rötter konjugerande par.

4458 Hon har rätt. Det finns ytterligare två lösningar:
$x_3 = 2i \quad x_4 = -2i$.

Ledtråd:
Utför polynomdivision med $(x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$

4459 **A** Sant.

Motivering:
Tre rötter gör att polynomet måste ha minst grad 3.

B Sant.

Motivering:
Om $p(x)$ har reella koefficienter måste $\bar{z}_1 = 2 + i$ och $\bar{z}_3 = -i$ också vara rötter, d.v.s. minst 5 rötter totalt.

C Sant.

D Falskt.

Motivering:
Påståendet är sant om $p(x)$ har reella koefficienter då $\bar{z}_1 = 2 + i$ också måste vara en rot.

4460 $z_{1,2} = \pm i \quad z_3 = 3 \quad z_4 = -2$

4461 $x_1 = 3 \quad x_2 = 0{,}5i \quad x_3 = -0{,}5i$

4462 $a = 7$ ger lösningarna
$x_1 = -1,\ x_{2,3} = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{23}\,i)$

4463 $x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{3}\,i)$

4464 $x_1 = 1 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = 3$

4465 a) $x_1 = 2 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 4$

b) $x_1 = 1 \quad x_{2,3,4} = -1$

4466 $z_2 = 1 - i,\ z_3 = 1,\ z_4 = -1$

4467 $x_1 = a,\ x_2 = 2b,\ x_3 = -3b$

4468 $z_{1,2} = \pm\sqrt{3}i,\ z_{3,4} = -3 \pm i$

4469 $x_1 = -6 \quad x_2 = 3 + i \quad x_3 = 3 - i$

4502 a) **C** b) **A** c) **B**

4503 *Lösning*:
42 är delbart med 14 om det finns ett heltal k sådant att
$42 = k \cdot 14$
$42 = 3 \cdot 14$
V.S.B.

4504 *Lösning*:
$5x - 1 = 3x + 7$ och $x = 4$ ger
$VL = 5 \cdot 4 - 1 = 19$
$HL = 3 \cdot 4 + 7 = 19$
$VL = HL$
V.S.B.

4505 *Lösning*:

Från början:
Sidan a.
Arean $A_1 = a^2$

Efter förändring:
Sidan $2a$.
Arean $A_2 = (2a)^2 = 4a^2$

Arean är fyra gånger så stor.

V.S.B.

4506 *Lösning*:
Det räcker att hitta ett exempel.

$a^2 + b^2 = c^2$ och $a = 3, b = 4,$
$c = 5$ ger

$VL = 3^2 + 4^2 = 25$
$HL = 5^2 = 25$
$VL = HL$

V.S.B.

4507 a) *Lösning*:
$VL =$
$= (a + b)^2 = (a + b)(a + b) =$
$= a^2 + ab + ba + b^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2 = HL$

V.S.B.

b) *Lösning*:
$VL = (a + b)(a - b) =$
$= a^2 - ab + ba - b^2 =$
$= a^2 - b^2 = HL$

V.S.B.

4508 a) Sant påstående.

b) Inget påstående eftersom det varken är sant eller falskt.

c) Sant påstående.

d) Falskt påstående.

4509 *Lösning*:

Från början:
Täljaren a och nämnaren b.
Kvoten $= \dfrac{a}{b}$

Efter förändring:
Täljaren $1{,}2a$ och nämnaren $0{,}8b$.
Kvoten $= \dfrac{1{,}2a}{0{,}8b} = 1{,}5\,\dfrac{a}{b}$

Kvoten har ökat med 50 %.

V.S.B.

4510 *Lösning*:
Det räcker att visa att det finns *ett* tvåsiffrigt tal som påståendet stämmer för.

Prövning ger:

$x = 10$ ger $4 \cdot x + 12 = 52.$
Ej ett kvadrattal.

$x = 11$ ger $4 \cdot x + 12 = 56.$
Ej ett kvadrattal.

$x = 12$ ger $4 \cdot x + 12 = 60.$
Ej ett kvadrattal.

$x = 13$ ger $4 \cdot x + 12 = 64.$
Ett kvadrattal.

V.S.B.

4513 a) $\Rightarrow$
Motivering:
$x > 0$ medför att $x^2 > 0$.

Omvändningen gäller inte eftersom $x^2 > 0$ också kan medföra att $x < 0$
t.ex. $9 = (-3)^2$

b) $\Leftrightarrow$
Motivering:
n är udda $\Rightarrow n = 2k + 1$ och
$n = 2k + 1 \Rightarrow n$ är udda.

c) $\Rightarrow$
Motivering:
$y = x + 2$ medför $y' = 1$.

Omvändningen gäller inte.
Det finns flera funktioner vars derivata är 1.
T.ex. $y = x + 1$.

d) $\Leftrightarrow$
Motivering:
$\lg x = 2 \Rightarrow x = 100$ och
$x = 100 \Rightarrow \lg x = 2$

4514 a) $3x + 7 = x + 1 \Rightarrow$
$2x = -6 \Rightarrow x = -3$

b) $x = -3 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow$
$3x = x - 6 \Rightarrow 3x + 7 = x + 1$

c) Ja.
$3x + 7 = x + 1 \Leftrightarrow x = -3$

4515 a) Ett jämnt tal: $2n$ (n heltal)
Ett udda tal: $2k + 1$ (k heltal)
Summan av ett udda och ett jämnt tal är ett udda tal.

Bevis:
$2n + 2k + 1 = 2(n + k) + 1 =$
$= 2m + 1$
(m är ett heltal eftersom n och k är heltal)
Summan är ett udda tal.

V.S.B.

b) Två udda tal:
$2n + 1$ och $2k + 1$
(n och k är heltal)
Produkten av två udda heltal är udda.

Bevis:
$(2n + 1)(2k + 1) =$
$= 4nk + 2n + 2k + 1 =$
$= 2(2nk + n + k) + 1$
$= 2p + 1 \quad (p = 2nk + n + k)$
Produkten är ett udda tal.

V.S.B.

4516 a) Påståendet är sant.
Bevis:
$n + (n + 1) + (n + 2) =$
$= 3n + 3 = 3(n + 1)$

$3(n + 1)$ är delbart med 3.

b) Påståendet är falskt.
Motexempel:
$2 + 3 + 4 = 9$

9 är inte delbart med 6.

4517 Sant.
Motivering:
Symbolerna betyder
”P medför Q som medför R”
P medför alltså R.

4518 $A + B + C = 180°$
(vinkelsumma)
$A + B + 90° = 180°$
$A + B = 90°$
$\sin(A + B) = \sin 90° = 1$

4519 a) Triangeltal: $n(n + 1)/2$
Kvadrattal: n^2

b) Slutsats: Summan av två på varandra följande triangeltal är ett kvadrattal.

c) *Lösning*:
Summan av två på varandra följande triangeltal:

$$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

Summan är ett kvadrattal.

V.S.B.

4520 Hon har rätt.
Lösning:
Om n är ett jämnt tal: $n = 2k$, där k är ett heltal.

Uttrycket kan skrivas:
$(2k)^2 + 7 \cdot 2k + 12 =$
$= 4k^2 + 14k + 12 =$
$= 2(2k^2 + 7k + 6)$

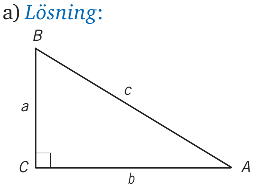
Det sista uttrycket är ett jämnt tal eftersom det innehåller faktorn 2.

Om n är ett udda tal: $2m + 1$, där m är ett heltal.
Uttrycket kan skrivas:
$(2m + 1)^2 + 7(2m + 1) + 12 =$
$= 4m^2 + 4m + 1 + 14m +$
$+ 7 + 12 = 4m^2 + 18m + 20 =$
$= 2(2m^2 + 9k + 10)$

Det sista uttrycket är ett jämnt tal eftersom det innehåller faktorn 2.

Om $n = 0$
Uttrycket har värdet 12 som är ett jämnt tal.

4521 a) *Lösning*:

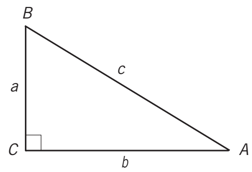


Om triangeln är rätvinklig ger cosinussatsen att

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C =$
$= a^2 + b^2 - 2ab \cos 90° =$
$= a^2 + b^2$

V.S.B.

b) *Lösning*:



Om Pythagoras sats är uppfylld, d.v.s. $c^2 = a^2 + b^2$, ger cosinussatsen

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
att $\cos C = 0$

d.v.s. $C = 90°$

V.S.B.

4522 *Lösning*:
n, m heltal ger produkten:

$2n \cdot 2(n + 1) = 2 \cdot 2 \cdot n(n + 1) =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot m$

Den sista likheten motiveras av att antingen n eller $(n + 1)$ är ett jämnt tal.

$8m$ är delbart med 8.

V.S.B.

4523 I sista steget dividerar vi med

$a + b - c = 0$.

Division med noll är inte definierat.

4524 *Bevis*:
$n^3 - n = n(n^2 - 1) =$
$= n(n - 1)(n + 1)$

Uttrycket kan skrivas som en produkt av tre på varandra följande heltal, varav ett måste vara delbart med tre och därför hela uttrycket.

(Är $n = 0$, är uttryckets värde noll vilket är delbart med tre.)

V.S.B.

4527 a) inte P: n är udda.

b) inte P: $x + y < 4$

c) inte P: $x \neq 2$

d) inte P: Inget barn är en flicka.

e) inte P: Minst en ko kan inte flyga.

4528 a) $x > 8 \Rightarrow 0{,}5x + 2 > 6$

b) $x > 8$ Multiplicera båda leden med 0,5.

$0{,}5x > 4$ Addera 2 till båda leden.

$0{,}5x + 2 > 6$

V.S.B.

4529 a) Det är sommar vilket medför att vi spelar fotboll.

b) Vi spelar inte fotboll vilket medför att det inte är sommar.

4530 *Lösning*:
P: x är ett heltal
Q: $2x - 5$ kan inte ha värdet 6

Vi ska visa $P \Rightarrow Q$ men visar i stället (inte Q) $\Rightarrow$ (inte P)

$2x - 5$ har värdet 6.
$2x - 5 = 6$
$2x = 11$
$x = 5{,}5$
x är inte ett heltal.

V.S.B.

4531 a) *Lösning*:
VL =
$= (a - b)^2 = (a - b)(a - b) =$
$= a^2 - ab - ba + b^2 =$
$= a^2 - 2ab + b^2 =$ HL

V.S.B.

b) *Lösning*:
VL =
$= (a - b)^3 =$
$= (a - b)(a - b)(a - b) =$
$= (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) =$
$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 +$
$+ ab^2 - b^3 =$
$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 =$ HL

V.S.B.

4532 *Lösning*:
Det räcker att hitta ett motexempel för att visa att påståendet är falskt. Vi testar därför några udda tal.

$n = 1$ ger $4n - 1 = 3$.
Ett primtal.

$n = 3$ ger $4n - 1 = 11$.
Ett primtal.

$n = 5$ ger $4n - 1 = 19$.
Ett primtal.

$n = 7$ ger $4n - 1 = 27$.
Inte ett primtal!
Påståendet är alltså falskt.

V.S.B.

4533 *Lösning*:
Det räcker att hitta ett exempel på tredjegradsekvationer som har tre negativa heltalsrötter för att påståendet ska vara sant.

Till exempel har ekvationen

$(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0$

lösningarna $x_1 = -1, x_2 = -2$ och $x_3 = -3$.

V.S.B.

4534 *Lösning*:
P: $3n + 2$ är udda
Q: n är udda

Vi ska visa $P \Rightarrow Q$ men visar i stället n är jämnt $\Rightarrow 3n + 2$ är jämnt.
n är jämnt och kan skrivas $2k$, där k är ett heltal.

$3n + 2 = 3 \cdot 2k + 2 = 2(3k + 1)$

$2(3k + 1)$ är ett jämnt tal eftersom det innehåller faktorn 2.

V.S.B.

4535 När man ska bevisa att ett påstående är sant antar man i stället att det är falskt och visar att det leder till en motsägelse.

4536 Antagande: P
Slutsats: Q

I ett direkt bevis visar man att $P \Rightarrow Q$ genom att utgå från P och visa att slutsatsen Q är sann.

I ett indirekt bevis visar man att $P \Rightarrow Q$ genom att i stället visa att (inte Q) $\Rightarrow$ (inte P).

4537 a) Om två positiva reella tal båda är mindre än eller lika med 10 medför det att produkten av dessa är mindre än eller lika med 100.

b) (inte Q): $0 < x \leq 10$ och $0 < y \leq 10$
(inte P): $xy \leq 100$

c) $0 < x \leq 10$ och $0 < y \leq 10 \Rightarrow xy \leq 100$
Vi har därmed bevisat att $xy > 100 \Rightarrow x > 10$ eller $y > 10$

4538 a) *Lösning*:
P: $ab < 0$
Q: a eller b är negativ

Vi ska visa $\Rightarrow$ men visar i stället (inte Q) $\Rightarrow$ (inte P)

Om både a och b positiva eller båda är negativa kommer produkten att vara positiv,
d.v.s. $ab > 0$.

V.S.B.

b) *Lösning*:
P: $x^2 = x$
Q: $x \geq 0$

Vi ska visa $P \Rightarrow Q$ men visar i stället (inte Q) $\Rightarrow$ (inte P)

Inte Q: $x < 0$

Inte P: $x^2 \neq x$

Om $x < 0$ är $x^2 > 0$.
Alltså måste $x^2 \neq x$.

V.S.B.

4539 a) *Lösning*:
P: $7a + 1$ är ett jämnt tal
Q: a är ett udda tal

Vi ska visa $P \Rightarrow Q$ men visar i stället (inte Q) $\Rightarrow$ (inte P)

a är ett jämnt tal
$a = 2n$, där n är ett heltal

$7 \cdot 2n + 1 = 14n + 1$ vilket är udda eftersom n är ett heltal.

V.S.B.

b) *Lösning*:
P: $a^2 - 2a + 7$ är ett jämnt tal
Q: a är ett udda tal

Vi ska visa $P \Rightarrow Q$ men visar i stället (inte Q) $\Rightarrow$ (inte P)

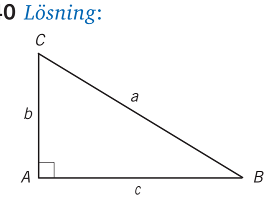
a är ett jämnt tal
$a = 2n$, där n är ett heltal

$(2n)^2 - 2 \cdot 2n + 7 =$
$= 4n^2 - 4n + 6 + 1 =$
$= 2(2n^2 - 2n + 3) + 1 =$
$= 2k + 1$

vilket är udda eftersom k är ett heltal.

V.S.B.

4540 *Lösning*:



P: Triangeln är rätvinklig

Q: $a^2 = b^2 + c^2$

(inte P): Triangeln är inte rätvinklig

(inte Q): $a^2 \neq b^2 + c^2$

Visar satsen indirekt, d.v.s. att (inte Q) $\Rightarrow$ (inte P).

Cosinussatsen gäller för alla trianglar, d.v.s.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Om $a^2 \neq b^2 + c^2$ ger det att $2bc \cos A \neq 0$ vilket medför att $A \neq 90°$ eftersom $\cos 90° = 0$, d.v.s. triangeln är inte rätvinklig.

V.S.B.

4541 *Lösning*:
VL $= \sin 2v = \sin (v + v) =$
$\sin v \cdot \cos v + \cos v \cdot \sin v =$
$= 2\sin v \cos v =$ HL

V.S.B.

4542 *Lösning*:
P: $x^2 - 2x + a = 0$ har komplexa rötter.

Q: $a > 1$

Vi visar med ett direkt bevis.

$x^2 - 2x + a = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{1-a}$

$x^2 - 2x + a = 0$ har komplexa rötter då $a > 1$.

V.S.B.

4543 *Lösning*:
P: $x^3 + 3x^2 + 7x + 2 = 0$
Q: $x < 0$

Vi ska visa $P \Rightarrow Q$ men visar i stället (inte Q) $\Rightarrow$ (inte P)

$x \geq 0$ ger att alla termer i uttrycket $x^3 + 3x^2 + 7x$ är större eller lika med noll och $x^3 + 3x^2 + 7x + 2 \geq 2$.

Detta visar att om $x \geq 0$ så är $x^3 + 3x^2 + 7x + 2 \neq 0$.

V.S.B.

4544 *Lösning*:
Ett tvåsiffrigt heltal kan skrivas $10a + b$, där a och b är ensiffriga tal.

P: $(a + b) = 3 \cdot n$
Q: $10a + b = 3 \cdot m$
där m och n är heltal.

Vi vill visa att $P \Rightarrow Q$.

Om $(a + b) = 3n$ är delbart med 3 måste även $9a + (a + b) = 10a + b = 3m$ vara delbart med 3.

Alltså gäller att $P \Rightarrow Q$.

V.S.B.

4545 a) *Förklaring*:
$2b^2$ är delbart med 2, då är a^2 det också.

Om a^2 är jämnt så är a det med, se uppgift 4526.

b) Om både a och b går att dela med 2 motsäger det att a/b är förkortat så långt det går.

4546 *Lösning*:
P: a och b är heltal
Q: $a^2 - 4b \neq 2$

Vi ska visa $P \Rightarrow$ (inte Q) ger en motsägelse.

a och b är heltal
$a^2 - 4b = 2$
$a^2 = 4b + 2$
$a^2 = 2(2b + 2)$

a^2 är ett jämnt tal eftersom det innehåller faktorn 2.

Om a^2 är ett jämnt tal så är även a ett jämnt tal (se uppgift 4526).

$a = 2n$ och $a^2 - 4b = 2$ ger
$4n^2 - 4b = 2$
$2n^2 - 2b = 1$
$2(n^2 - b) = 1$

VL är ett jämnt tal och HL är 1 vilket är en motsägelse.

V.S.B.

4547 *Lösning*:
Produkt: $x \cdot y$
x ökar med a procent och
y minskar med a procent.

Ny produkt:

$$\left(1+\frac{a}{100}\right)x \cdot \left(1-\frac{a}{100}\right)y =$$

$$= \left(1-\frac{a^2}{10\,000}\right)xy$$

Eftersom $a > 0$ kommer den nya produkten att vara mindre än xy.

V.S.B.

Testa dig själv 4

1 a) 2 d) 5
b) –4 e) $26 + 7i$
c) $5 - i$ f) $-14 + 23i$

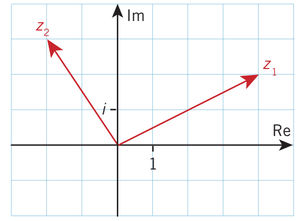
2 a) $\frac{9}{10} + \frac{3}{10}i = 0{,}9 + 0{,}3i$

b) $\frac{6}{29} - \frac{15}{29}i$

c) $\frac{14}{37} - \frac{27}{37}i$

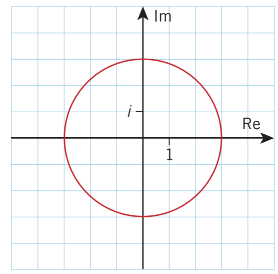
3 $z = x + iy$

4 a)

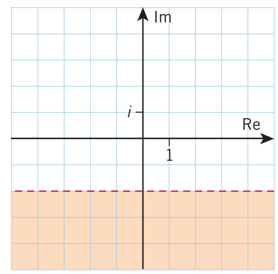


b) $|z_1| = \sqrt{20}$ $|z_2| = \sqrt{13}$
$|z_1 - z_2| = \sqrt{37}$
Ledtråd:
$z_1 - z_2 = 6 - i$

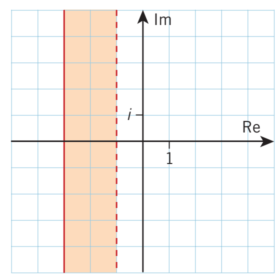
5 a)



b)



c)



d)