Begreppet differentialekvation*

Exempel 1 Lufttrycket y kPa förändras med en hastighet som på varje höjd är proportionell mot det aktuella trycket. Detta kan beskrivas med differentialekvationen $y' = k \cdot y$.

differentialekvation En ekvation med en obekant funktion och en eller flera av denna funktions derivator kallas en *differentialekvation*.

Till exempel:

första ordningen $y' = 2y$ är en differentialekvation av *första ordningen* eftersom y' är den högsta derivatan.

andra ordningen $y'' + y' + 2y = 0$ är en differentialekvation av *andra ordningen* eftersom y'' är den högsta derivatan.

Lösningen till en differentialekvation är en funktion. Genom prövning kan vi undersöka om en viss funktion är en lösning till en given differentialekvation.

Exempel 2 Är funktionen $y = \sin 2x$ en lösning till differentialekvationen $y'' + 4y = 0$?

Vi börjar med att bestämma de derivator som ingår i ekvationen.

$y = \sin 2x \Rightarrow y' = 2\cos 2x \Rightarrow y'' = -4\sin 2x$

$\text{VL} = y'' + 4y = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0 = \text{HL}$

Prövningen visar att $y = \sin 2x$ är en lösning. På motsvarande sätt kan vi visa att även funktionerna $y = 5\sin 2x$ och $y = -3\sin 2x$ är lösningar.

Vi ser att en differentialekvation kan ha flera olika lösningar.

begynnelsevillkor För att bestämma en specifik lösning krävs ett *begynnelsevillkor*.

Exempel 3 Differentialekvationen $y' - 3y = 0$ har t.ex. lösningarna $y = 100e^{3x}$ och $y = 200e^{3x}$.

Vilken av lösningarna är korrekt om begynnelsevillkoret är $y(0) = 200$?

$y = 100e^{3x} \Rightarrow y(0) = 100e^{3 \cdot 0} = 100 \Rightarrow$ Villkoret är inte uppfyllt.
$y = 200e^{3x} \Rightarrow y(0) = 200e^{3 \cdot 0} = 200 \Rightarrow$ Villkoret är uppfyllt.

Funktionen $y = 200e^{3x}$ uppfyller villkoret $y(0) = 200$.

* Ingår i kursen t.o.m. 2021-06-30.

Sammanfattning

En differentialekvation innehåller en obekant som är en funktion och en eller flera derivator till denna. Differentialekvationens lösning är en funktion.

2242 Differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = -0{,}2y$ är given.

a) Visa att $y = Ce^{-0{,}2x}$ är en lösning till differentialekvationen.

$\boxed{\text{b)}}$ Bestäm C så att villkoret $y(1) = 50$ är uppfyllt.

a) $y = Ce^{-0{,}2x}$ ger $\frac{dy}{dx} = -0{,}2Ce^{-0{,}2x}$

$\text{VL} = \frac{dy}{dx} = -0{,}2Ce^{-0{,}2x} = -0{,}2y = \text{HL}$

b) $y(1) = Ce^{-0{,}2 \cdot 1} = C \cdot e^{-0{,}2}$

Villkoret $y(1) = 50$ ger

$C \cdot e^{-0{,}2} = 50$, d.v.s. $C = 50/e^{-0{,}2} \approx 61$

1

2243 Visa att

a) $y = 5 \cdot e^{2x}$ är en lösning till differentialekvationen $y' - 2y = 0$

b) $y = 4\cos x$ är en lösning till differentialekvationen $y'' + y = 0$.

2244 Ge ett exempel på en differentialekvation av andra ordningen.

2245 Visa att $y = A \cdot e^{kx}$

a) är en lösning till $\frac{dy}{dx} = ky$

b) uppfyller villkoret $y(0) = A$.

2246 Är $y = x \cdot e^{x}$ en lösning till differentialekvationen $y' - y = xy$? Motivera.

2

2247 Vi vet att $y = A \cdot e^{kx}$ är en lösning till differentialekvationen $y' = -0{,}03y$ och att $y(0) = 12$.

Bestäm konstanterna A och k.

2248 Bestäm det positiva talet k så att $y = \cos kx$ blir en lösning till $y'' + 9y = 0$.

2249 För vilket eller vilka tal r är $y = e^{rx}$ en lösning till differentialekvationen $y'' + y' - 6y = 0$?

2250 Differentialekvationen $y'' + 4y = 0$ är given.

a) Visa att $y = A\cos 2x + B\sin 2x$ är en lösning.

Bestäm konstanterna A och B om

b) $y(0) = 0$ och $y(\pi/4) = 20$

c) $y(0) = 1$ och $y'(0) = -6$.

3

2251 Visa att $y = \frac{1}{1+e^{-x}}$ är en lösning till differentialekvationen $y' = y(1-y)$.

2252 a) Finn två olika lösningar till differentialekvationen $100y'' = y$.

b) Visa att summan av dina två lösningar också är en lösning.

* Ingår i kursen t.o.m. 2021-06-30.

Differentialekvationer och matematiska modeller*

När vi vill beskriva olika förlopp inom naturvetenskap och teknik leder det ofta till matematiska modeller med differentialekvationer.

2253 En biolog har studerat en fågelkoloni under tio år och finner att under hela studien har antalet fåglar minskat med hastigheten 4 % per år av det aktuella antalet fåglar.

Ställ upp en differentialekvation som beskriver förändringen.

Förändringshastigheten är –4 % per år av totala antalet fåglar.

Om y är antalet fåglar t år efter studiens start, ger det för tidsintervallet $0 \leq t \leq 10$ differentialekvationen $y' = -0{,}04y$.

Ekvationen kan även skrivas $\dfrac{dy}{dt} = -0{,}04y$ eller $y' + 0{,}04y = 0$.

2254 En stek har temperaturen 20 °C och sätts in i en ugn som håller 175 °C. Enligt en matematisk modell stiger stekens temperatur y °C med en hastighet som är proportionell mot temperaturdifferensen $(175 - y)$. Det ger differentialekvationen

$\dfrac{dy}{dt} = k(175 - y)$ där t är tiden i minuter sedan steken sattes in i ugnen.

a) Visa att $y = 175 - 155 \cdot e^{-kt}$ uppfyller villkoret $y(0) = 20$.

b) Visa att $y = 175 - 155 \cdot e^{-kt}$ är en lösning till differentialekvationen.

c) Efter 30 minuter är stekens temperatur 45 °C.
Vilken är dess temperatur efter 70 minuter?

a) $y = 175 - 155 \cdot e^{-kt}$

$y(0) = 175 - 155 \cdot e^{0} = 175 - 155 \cdot 1 = 20$

b) $\text{VL} = \dfrac{dy}{dt} = (-155) \cdot e^{-kt} \cdot (-k) = k \cdot 155 \cdot e^{-kt}$

$\text{HL} = k \cdot (175 - y) = k \cdot (175 - 175 + 155 \cdot e^{-kt}) = k \cdot 155 \cdot e^{-kt}$

$\text{VL} = \text{HL}$

c) $y(30) = 45$ ger värdet på k.

$175 - 155 \cdot e^{-30k} = 45$

$e^{-30k} = \dfrac{130}{155}$

$k = \dfrac{\ln(130/155)}{-30} \approx 0{,}00586$

$y(70) = 175 - 155 \cdot e^{-0{,}00586 \cdot 70} \approx 72$

Svar: Efter 70 minuter är stekens temperatur 72 °C.

* Ingår i kursen t.o.m. 2021-06-30.

1

2255 150 gram av ett radioaktivt ämne minskar med en hastighet som är proportionell mot kvarvarande mängd enligt differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}20y$$

där y är mängden i gram efter t år.

Visa att $y = 150e^{-0{,}20t}$

a) uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 150$

b) är en lösning till differentialekvationen.

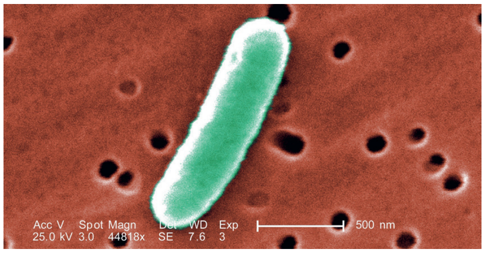
2256 Antalet bakterier y i en näringslösning ökar enligt differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}15y \quad \text{där } t \text{ är tiden i timmar.}$$

Antalet bakterier är från början 10 000 st.

a) Bestäm k så att $y = 10\,000e^{kt}$ är en lösning till differentialekvationen.

b) Hur många bakterier finns det efter 8 timmar?



2257 Invånarantalet y i en stad ökar varje år med 1 000 personer, d.v.s. $\frac{dy}{dt} = 1\,000$.

a) Visa att $y = 1\,000t + C$ är en funktion som uppfyller hur antalet förändras.

b) Bestäm C om $y(1) = 45\,000$.

2258 Ställ upp en differentialekvation som beskriver att

a) y minskar med en hastighet som är 20 % av y

b) y ökar med en hastighet som är proportionell mot y

c) y ökar med en hastighet som är proportionell mot $(20 - y)$.

2

2259 Lövmängden i en skog y g/cm^2 ökar genom nedfall av nya löv med 3 g/cm^2 och år.

Samtidigt förmultnar löven med en hastighet som är 75 % per år av den aktuella mängden. Detta ger differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = 3 - 0{,}75y, \quad \text{där } t \text{ är tiden i år.}$$

a) Visa att $y = A \cdot e^{-0{,}75t} + 4$ är en lösning och bestäm konstanten A om $y(0) = 0$.

b) Beräkna lövmängden efter 2, 4, 6, 8 och 10 år. Vad kan du dra för slutsats? Rita grafen som kontroll.

2260 Antalet individer y i en djurpopulation kan enligt en matematisk modell beskrivas med differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}000\,25y \cdot (5\,400 - y)$$

där t är tiden i år.

a) Beräkna förändringshastigheten $\frac{dy}{dt}$ om antalet individer är 5 200.

b) Beräkna förändringshastigheten $\frac{dy}{dt}$ om antalet individer är 6 000.

c) För vilka värden på y ökar antalet?

d) För vilka värden på y minskar antalet?

e) Efter en tid sker en stabilisering av antalet, d.v.s. $\frac{dy}{dt} = 0$ (om inte förutsättningarna förändras). Vilket värde har då y?

2261 Antalet bakterier i en maträtt kan beskrivas med differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}08y, \quad y(0) = 100,$$

där t är tiden i timmar.

a) Uttryck detta i ord.

b) Ange den funktion som är en lösning.

* Ingår i kursen t.o.m. 2021-06-30.