Innehåll

Hjälp med Casio grafräknare

I Natur och Kulturs lärobok *Matematik 3000 Kurs E för naturvetare och tekniker* finns då och då en grafräknarsymbol i marginalen. Den markerar att du kanske kan behöva hjälp med hur räknaren ska användas. Här finns hjälp och tips till dessa uppgifter. Hjälpen är framför allt anpassad till modellerna CFX-9850GB+ och fx-9750G. De övriga grafräknarna i Casios utbud är såpass lika i uppbyggnad och logik, att du knappast ska ha några problem att följa instruktionerna som ges på hjälpsidorna, även om du t ex har en CASIO FX-2.0.

När du köpte din Casio grafräknare, så ska du ha fått en cd-skiva, som heter *Upptäck Matematiken*. Den är gjord som en komplettering till din matematikbok, för att du ska få maximal glädje av din grafräknare, och för att du ska lära dig matematik så effektivt som möjligt med grafräknarens hjälp. *Upptäck Matematiken* innehåller över femtio animerade filmer om matematik och grafräknaren, som täcker in det mesta inom samtliga gymnasiets matematikkurser. Filmerna kan spelas upp på svenska eller på engelska, så skivan är också användbar om du vill lära dig ”matematik på engelska”.

Till cd-skivan finns en Aktivitetsbok med en hel del laborativa matematikuppgifter. Boken, liksom cd-skivan, kan din lärare beställa kostnadsfritt från:

Sense Office AB,
08-504 103 10.
www.sense-ab.se

Den finns också som pdf-fil, som kan hämtas från Senses hemsida eller från Broman Planetariums hemsida, www.planetarium.se. Därifrån kan du också titta på filmerna i *Upptäck Matematiken.*

På Sense hemsida finns ytterligare material speciellt för lärare. Där finns bl a ett femtiosidigt kompendium som beskriver grafräknaren i undervisningen och bilder som underlag till t ex OH-bilder av de olika räknarna. Där finns också ett kompendium som beskriver de olika versionerna av den tekniska räknaren CASIO fx-82, och hur de kan nyttjas i matematikundervisningen.

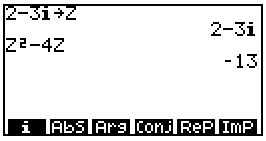
När vi beskriver hur du ska trycka på din räknare, skriver vi alltid med fet, kursiv stil, t ex: ***2 (3 + 4) EXE***. Ord inom hakparenteser, t ex ***[Solve],*** refererar till menyer, där du väljer med någon av knapparna ***F1*** ... ***F6***. Om du trycker på ***OPTN***, så får du en meny, där det sista menyvalet är en högerpil. Den anger att ”det finns mera”. Knappen ***F6*** bläddrar då mellan de sidomenyer som finns.

Komplexa tal

Man kan skriva komplexa tal och räkna med komplexa tal på Casio grafräknare. Verktygen du behöver finns under ***OPTN [CPLX]***.

[i] används för att skriva komplexa tal, som sedan t ex kan sparas på vanligt sätt.

Vi undersöker nu vad $z^2 - 4z$ får för värde om $z = 2 - 3i$ (uppgift 1236 b).



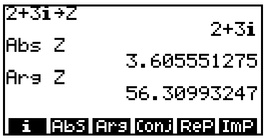
Observera att vi använde ***x²***-knappen och inte ^-knappen. Det beror på att de flesta potenser med komplexa tal inte är definierade. Räknaren svarar med Ma-error. Vill du t ex beräkna z^3, så kan du skriva så här:

När du räknar med komplexa tal direkt, så gör du rätt i att skriva dem inom parentes. Hur har räknaren räknat i den andra uträkningen?

Uppgift 1320

Skriv talet $z = 2 + 3i$ i polär form. ange argumentet i grader med en decimal.

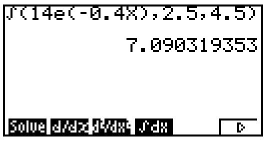
Grafräknaren har färdiga rutiner för att beräkna absolutbelopp ***[Abs]*** och argument ***[Arg]***.



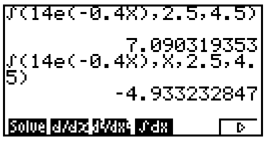
Se till att du ställt in Angle ***[Deg]*** under ***SHIFT SET UP***. Annars får du ett annat resultat av ***[Arg] Z***.

Exempel 2 sid 84

Syntaxen för att beräkna $\int_{2,5}^{4,5} 14e^{-0,40x}$ framgår av bilden:



Integraltecknet finns under ***OPTN [CALC]***, och vi har använt negativtecknet ***(-)*** i exponenten. Observera att Casio-räknarna konsekvent använder *X* som oberoende variabel, och skall inte anges. Gör du det, så får du ett felaktigt resultat.



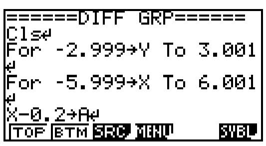
Riktningsfält sid 126

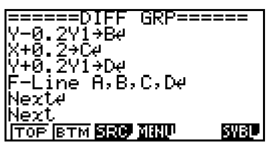
En första ordningens differentialekvation kan alltid skrivas på formen $y' = f(x, y)$. Ekvationen kan tolkas på så sätt att i varje punkt (*x*; *y*) har en lösningskurva en riktning som ges av *y*’ enligt ekvationen.

För att skriva programmet, så öppna PRGM-fönstret. Här väljer vi ***[NEW]*** för att skriva ett nytt program. Först får vi ett fönster där vi ger programmet ett namn. Nu fungerar tangenterna som ett alfa-tangentbord, så namnet ”DIFF GRP” skrivs med tangenterna ***sin (tan tan . ab/c 6 4***. Avsluta med ***EXE***. Då får vi ett programmeringsfönster, där programmet kan skrivas.

Här följer en listning av ett program som ger ett riktningsfält i ett graffönster:

[Cls] ↵	***[Cls]*** finns under ***SHIFT Sketch*** på F4. Den ger en tom skärm och ett tomt koordinatsystem.
[For] – 2 . 9 9 9 → Y [To] 3 . 0 0 1 ↵	Genom att välja värden 0,001 över heltalsvärden undviks nollor utan att det syns i grafen. På så sätt undviker vi nolldivisioner.
[For] – 5 . 9 9 9 → X [To] 6 . 0 0 1 ↵	
X – 0 . 2 → A ↵	Vi ska rita ett litet stycke av tangenten till lösningskurvan genom punkten (*x*; *y*). Linjestycket ska ritas från punkten (A; B) till (C; D).
Y – 0 . 2 Y 1 → B ↵	Om *x*-värdet förändras med 0,2 enheter, så förändras motsvarande *y*-värde med 0,2 × y’ enheter.
X + 0 . 2 → C ↵	
Y + 0 . 2 Y 1 → D ↵	
[F-Line] A , B , C , D ↵	***[F-Line]*** finns under ***SHIFT SKETCH [Line]***.
Next ↵	Nästa linjestycke i *x*-led.
Next	Nästa rad med linjestycken.



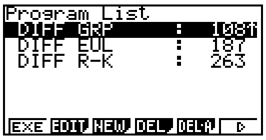


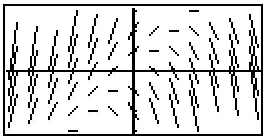
Programmeringen avslutas med ett eller några tryck på ***EXIT***.

Programmet är en förbättrad version av det program som finns redovisat i *Aktivitetsboken*. Det är inte lika känsligt för nollor i nämnaren, som annars leder till ”Math Error” och programstopp.

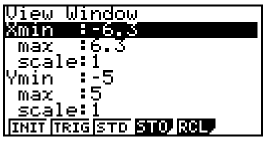
När programmet körs, så ska V-Window vara inställt på ***[INIT]***. Själva ekvationens högerled skrivs i Graffönstrets funktionsminne vid Y1 =. Själva programkörningen startar vi från

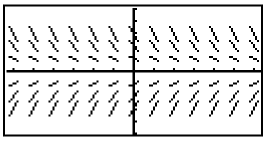
PRGM-fönstret genom att markera programmet och trycka på ***[EXE]*** eller ***EXE***. Här visar vi ett riktningsfält till ekvationen $y' = y - x$.





I exempel 3301 har vi ställt om V-Window så att den visar $-5 \le y \le 5$, vilket ger en bättre bild av riktningsfältet till ekvationen $y' = -y$.





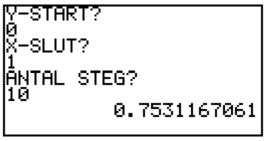
Program för numerisk lösning av differentialekvationer

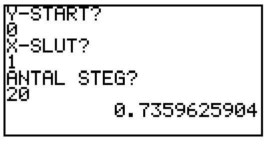
Här följer två program som ger numeriska lösningar till differentialekvationer. Först ett som använder Eulers metod, sedan ett som använder Runge-Kuttas metod. Båda programmen förutsätter att man har differentialekvationen på formen $y' = f(x, y)$, där högerledet finns inskrivet som Y1=... i GRPH-fönstrets funktionsminne. Utdata läggs med *x*-värden i lista 1 och *y*-värden i lista 2. Sedan kan man rita ett diagram över lösningen i STAT-fönstret, följa lösningen med trace-verktyget och eventuellt göra en regressionsräkning över lösningen. Vi har gett programmet namnet DIFF EUL.

”X-START” [?] → A ↵	Använd ***ALPHA*** för att skriva en bokstav, ***SHIFT A-lock*** för att skriva flera. I båda fallen finns citationstecknet i menyn. ***[?]*** finns under ***SHIFT PRGM***, och gör så att programmet stannar och väntar tills ett värde är inskrivet avslutat med ***EXE***. Detta värde sparas i *A*.
”Y-START” [?] → C ↵	
”X-SLUT” [?] → B ↵	
”ANTAL STEG” [?] → N ↵	
(B - A) ÷ N → H ↵	Här beräknas steglängden.
[Seq] 0 , X , 1 , N + 1 , 1) ↵	Vi måste definiera listor med nollor där programmet senare ska kunna skriva in beräknade värden. ***[Seq]***, som finns under ***OPTN [LIST]***, skapar i det här fallet en ans-lista med *n*+1 stycken nollor.
[List] Ans → [List] 1 ↵	Lista 1 fylls med nollor.
[List] Ans → [List] 2 ↵	
A → [List] 1 [1] ↵	Startpunktens koordinater skrivs in i lista 1...
C → [List] 2 [1] ↵	... resp lista 2.
A → X ↵	Startpunktens koordinater lagras i *X*...
C → Y ↵	... resp *Y*.
[For] 1 → I [To] N ↵	Här börjar Eulers metod. ***[For]***, ***[To*** och senare ***[Next]*** finns i en sidomeny under ***SHIFT PRGM [COM]***.
X + H → X ↵	”Nästa” *x*-värde beräknas.
Y + H × [Y] 1 → Y ↵	”Nästa” *y*-värde beräknas. ***[Y]***, som pekar på GRAPH-fönstrets funktionsminne, finns under ***VARS [GRPH]***.

***X* → *[List] 1 [I + 1]* ↵**	Den beräknade punktens koordinater skrivs in i lista 1...
***Y* → *[List] 2 [I + 1]* ↵**	... resp lista 2.
[Next]	Hopp sker tillbaks till ***[For]**...**[To]***-satsen tills dess att det sista *x*- resp *y*-värdet beräknats.

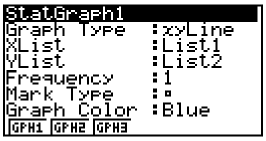
Vi använder differentialekvationen $y' = y + x$ med startpunkt (0, 0) och slutpunkt $x = 1$ som testexempel, och vi kör exemplet i 10 resp 20 steg.

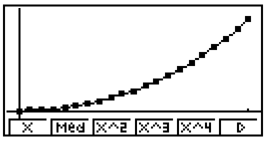


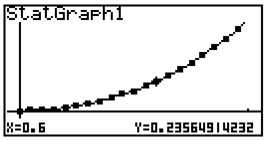


Program avslutas alltid med att det sist beräknade värdet skrivs ut. Ett tryck på ***EXE*** startar om programmet, och man kan t ex undersöka hur många steg som behövs för att få två stabila decimaler.

Vi visar den sista körningen i ett ***[xy]***-diagram i STAT-fönstret. Gör inställningen under ***[GRPH] [SET]***.







I den sista bilden följer vi de beräknade punkterna med trace-verktyget, som finns under ***SHIFT [TRCE]***.

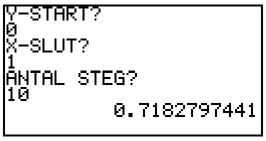
Runge-Kuttas metod

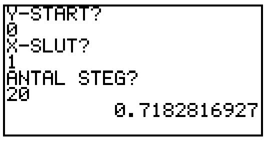
Programmet, som vi kallat DIFF R-K, fungerar på samma sätt som DIFF EUL. Differentialekvationen ska stå på formen $y' = f(x, y)$, där högerledet skrivs som Y1=... i GRAPH-fönstrets funktionsminne.

"X-START" [?] → A ↵	
"Y-START" [?] → C ↵	
"X-SLUT" [?] → B ↵	
"ANTAL STEG" [?] → N ↵	
(B - A) ÷ N → H ↵	
[Seq] 0 , X , 1 , N + 1 , 1) ↵	
[List] Ans → [List] 1 ↵	
[List] Ans → [List] 2 ↵	
A → [List] 1 [1] ↵	
C → [List] 2 [1] ↵	
A → X ↵	
C → Y ↵	

[For] 1 → I [To] N ↵	Så här långt är programmet identiskt med DIFF EUL.
Y → V ↵	Det senast beräknade *y*-värdet sparas i hjälpvariabeln *V*, eftersom vi behöver använda ett antal olika *y*-värden under stegets gång.
[Y] 1 → J ↵	Metoden som sådan beskrivs på sid 135. Första uträkningen är $k_1 = f(x_n, y_n)$. Vi använder *J* som k_1.
X + H ÷ 2 → X ↵	$k_2 = f(x_n + h/2;\ y_n + hk_1/2)$. Här beräknas nytt *x*-värde.
V + H × J ÷2 → Y ↵	Nytt *y*-värde beräknas.
[Y] 1 → K ↵	k_2 beräknas och lagras i minne K.
V +H × K ÷ 2 → Y ↵	$k_3 = f(x_n + h/2;\ y_n + hk_2/2)$. Vi behöver först beräkna ett nytt värde på *y*.
[Y] 1 → L ↵	k_3 beräknas och sparas i minne *L*.
X + H ÷ 2 → X ↵	$k_4 = f(x_n + h;\ y_n + hk_3)$. Vi beräknar först ett nytt *x*-värde...
V + H × L → Y ↵	... och ett nytt *y*-värde.
[Y] 1 → M ↵	k_4 beräkas och lagras i minne *M*.
V + H ÷ 6 × (J + 2 K + 2 L + M) → Y	Nästa *y*-värde beräknas enligt formeln $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
X → [List] 1 [I + 1] ↵	Den beräknade punktens koordinater sparas i lista 1...
Y → [List] 2 [I + 1] ↵	... resp lista 2.
[Next]	

Vi testkör även detta program med differentialekvationen $y' = x + y$ med startvärden (0, 0) och slutvärde $x = 1$ i tio resp tjugo steg.





Vi kan se att slutvärdena skiljer sig först i den sjätte (korrekt avrundade) decimalen.

Den exakta lösningen till differentialekvationen är $y = -x + C \cdot e^x - 1$, och ger en kurva genom origo då $C = 1$. Då är $y(1) = e - 2 \approx 0{,}7182818285$.