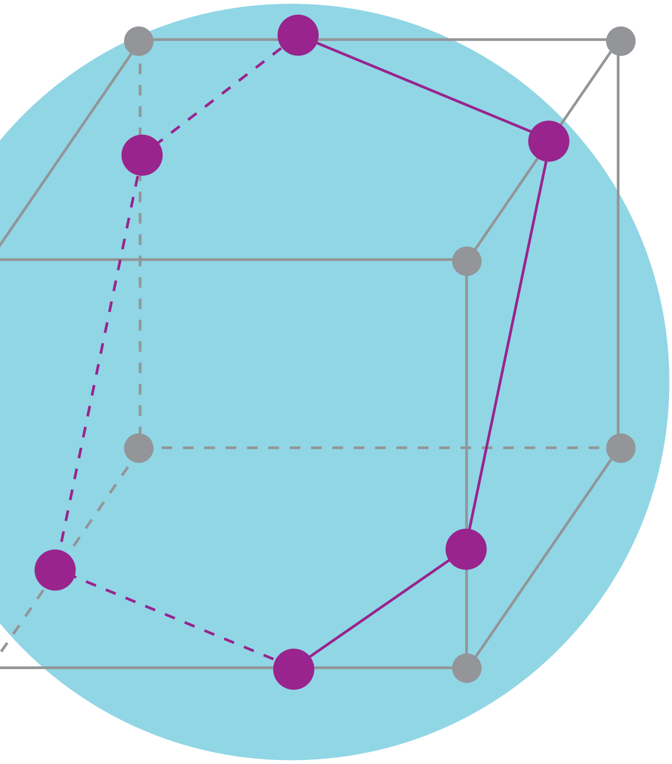
ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Є. П. Нелін

10

ГЕОМЕТРІЯ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ



Інтернет-
підтримка

Є. П. Нелін

ГЕОМЕТРІЯ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

ПІДРУЧНИК ДЛЯ 10 КЛАСУ
ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

РЕКОМЕНДОВАНО
МІНІСТЕРСТВОМ ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВ
ВИДАВНИЦТВО «РАНОК»
2018

УДК [37.016:514](075.3)
Н49

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 31.05.2018 № 551)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Нелін Є.П.
Н49 Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018. — 240 с. : іл.
ISBN 978-617-09-4358-3
УДК [37.016:514](075.3)

Інтернет-підтримка
Електронні матеріали
до підручника розміщено на сайті
interactive.ranok.com.ua

ISBN 978-617-09-4358-3

ШАНОВНІ ДЕСЯТИКЛАСНИКИ І ДЕСЯТИКЛАСНИЦІ!

Ви продовжуєте вивчати геометрію. Мета цього підручника — допомогти вам опанувати її розділ, який називається стереометрією. У попередніх класах ви вивчали плоскі фігури та їхні властивості, а тепер розглядатимете просторові об’єкти. У процесі вивчення стереометрії ви вдосконалите навички логічного мислення, розвинете просторову уяву, уміння подумки моделювати нові геометричні фігури й будувати їх зображення, а головне — оволодієте системою математичних знань, навичок і вмінь, які необхідні для вивчення інших шкільних дисциплін, продовження навчання, а також стануть у пригоді в повсякденному житті, майбутній діяльності.

Засвоюючи стереометрію, ви ознайомитеся з новими геометричними поняттями і закономірностями, багато з яких люди здавна застосовують у виробничій діяльності, використовують в архітектурі, живописі тощо.

Ви побачите зв’язок геометрії з мистецтвом і, напевно, погодитеся з думкою геніального французького архітектора XX ст. Шарля Едуара Ле Корбюзьє, що навколишній світ є світом геометрії і своїми художніми враженнями людина зобов’язана саме геометрії. Ви зрозумієте слова видатного французького математика і філософа Блеза Паскаля: «Того, хто володіє геометрією, ця наука просуває настільки далеко, що він виявляється озброєним абсолютно новою силою».

ЯК КОРИСТУВАТИСЯ ПІДРУЧНИКОМ

Підручник має чотири розділи, кожний з яких складається з параграфів. Параграфи зазвичай містять такі структурні блоки.

Довідкові таблиці наведені на початку більшості параграфів і вміщують основні означення, ознаки та властивості розглядуваних понять теми, систематизацію теоретичного матеріалу та *способів діяльності* з цим матеріалом у формі спеціальних *орієнтирів з розв’язування завдань*. Радимо опрацювати цей матеріал у першу чергу, а вже після цього переходити до наступного блоку.

Пояснення й обґрунтування являють собою докладне викладення теоретичного матеріалу, наведеного в таблицях. Таке подання навчального матеріалу (спочатку структурованого у вигляді таблиць, а потім описаного детально) дозволить вам вибрати свій власний рівень ознайомлення з обґрунтуваннями, будуючи власну освітню траєкторію.

Приклади розв’язування задач ознайомлять вас із основними ідеями щодо розв’язування задач, допоможуть усвідомити й засвоїти способи дій з основними геометричними поняттями, набути необхідних предметних компетентностей. Для того щоб виділити орієнтовні основи діяльності з розв’язування завдань (загальні орієнтири), у прикладах власне розв’язання супроводжуються коментарями, які допоможуть вам скласти план розв’язування аналогічних завдань.

Розв’язання	Коментар
Як можна записати розв’язання задачі.	Як можна міркувати під час розв’язування такої задачі.

За такого подання коментар не заважає сприйняттю основної ідеї розв'язування завдань певного типу і дає змогу за потреби отримати детальну консультацію щодо розв'язування, яка міститься в коментарі.

З метою закріплення, контролю і самооцінювання засвоєння навчального матеріалу наприкінці кожного параграфа запропоновано систему запитань і вправ.

Запитання допоможуть вам пригадати й осмислити вивчене, звернути увагу на головне в параграфі, оцінити рівень засвоєння теоретичного матеріалу параграфа.

Вправи подано за трьома рівнями складності:

- *задачі середнього рівня* мають позначку «°»;
- *задачі достатнього рівня* (дещо складніші) подано без позначки;
- *задачі високого рівня* мають позначку «*».

До більшості вправ наприкінці підручника наведено *відповіді*.

У рубриці «**Виявіть свою компетентність**» наведено задачі практичного змісту та завдання, які для отримання розв'язку вимагають аналізу, узагальнення, систематизації набутих знань.

Зверніть також увагу на запропоновані в тексті параграфів супроводжуючі запитання, що спонукають до більш глибокого самостійного осмислення навчального матеріалу, та завдання, виконання яких, на нашу думку, сприятиме формуванню певних предметних і ключових компетентностей. Ці запитання та завдання мають відповідні позначення.

Матеріали рубрики «**Відомості з історії**» допоможуть вам дослідити розвиток геометричної науки у світі та в Україні.

Інтернет-підтримка підручника дозволить здійснити онлайн-тестування за кожною темою та отримати додаткову інформацію.

Для того щоб підручник допоміг вам повною мірою, радимо ознайомитися із системою умовних позначень:

● початок обґрунтування твердження;

○ закінчення обґрунтування твердження;

▶ початок розв'язання задачі;

◁ закінчення розв'язання задачі;

❓ запитання до учнів;

❗ цікава інформація або така, яку варто обміркувати;

ⓘ матеріали, пов'язані з ІКТ та інтернет-підтримкою підручника;

⤴ завдання, які вимагають самостійного опрацювання, сприяють активізації розумової діяльності;

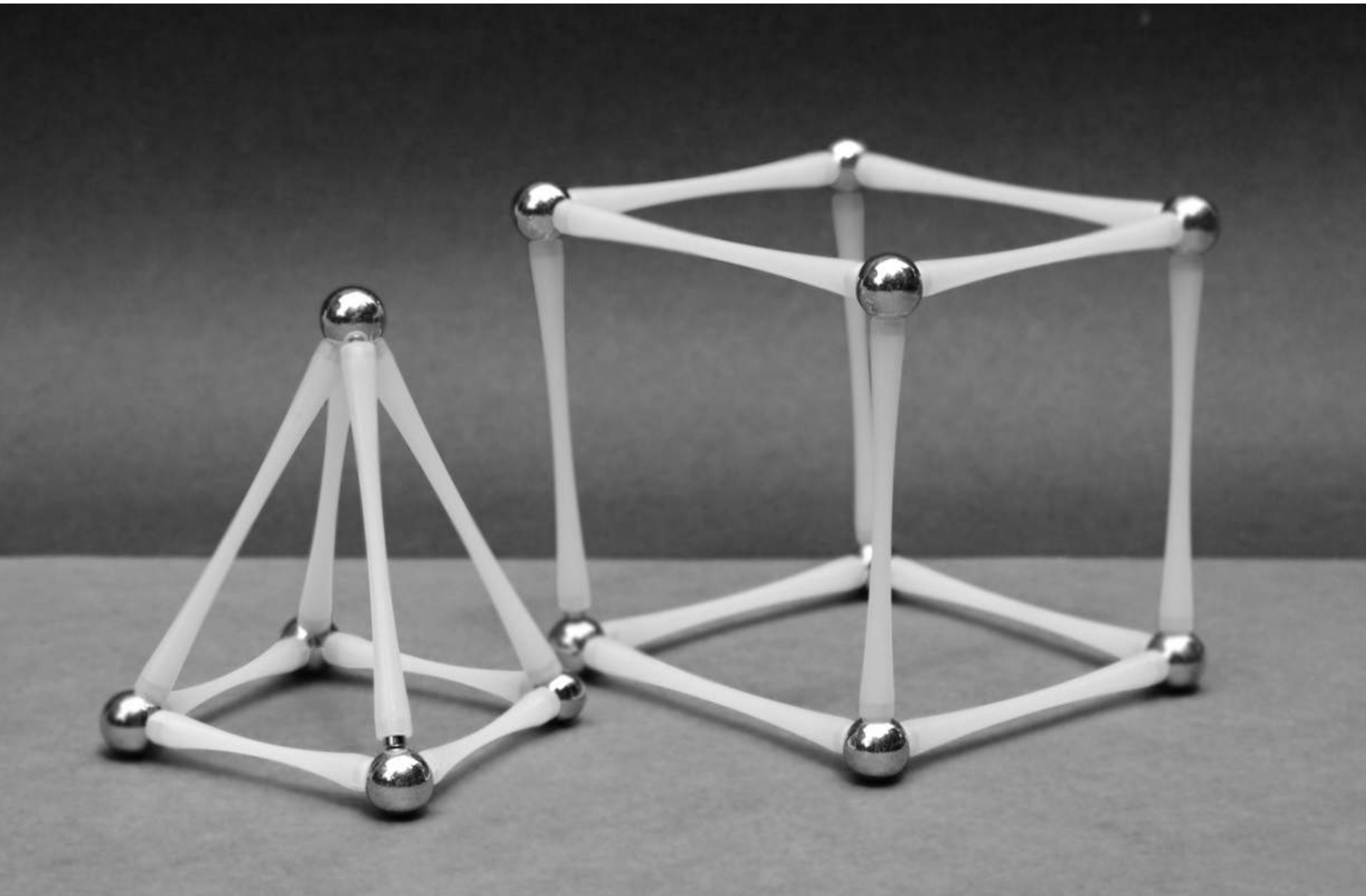
Ⓤ діяльність, розрахована на роботу в команді.

Розділ 1

ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- дізнаєтеся про застосування в геометрії аксіоматичного методу — одного з методів побудови наукової теорії;
- ознайомитеся з основними поняттями й аксіомами стереометрії та наслідками з них;
- навчитеся, застосовуючи їх, розв'язувати найпростіші задачі на побудову перерізів призми та піраміди

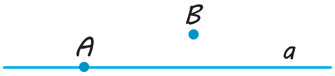


§ 1 ПОНЯТТЯ ПРО АКСІОМАТИЧНИЙ МЕТОД У ГЕОМЕТРІЇ. АКСІОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ. АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА НАЙПРОСТІШІ НАСЛІДКИ З НИХ

Таблиця 1

1. Аксіоми планіметрії

I. Аксіоми належності



$A \in a$, $B \notin a$

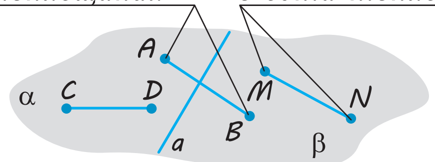
Через точки C і D проходить єдина пряма b.

II. Аксіоми взаємного розміщення точок на прямій і площині

Точка B лежить між точками A і C.

Точки лежать у різних півплощинах

Точки лежать в одній півплощині



Пряма a розбиває площину на дві півплощини α і β

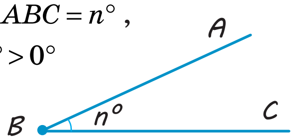
III. Аксіоми вимірювання та відкладання відрізків і кутів

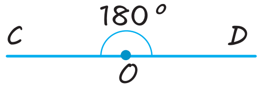
$AB = a$, $a > 0$

$AC = AB + BC$

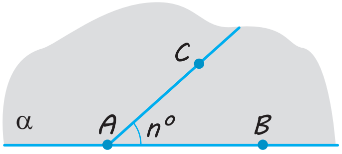
Відрізок $OA = m$ — єдиний.

$\angle ABC = n^\circ$, $n^\circ > 0^\circ$



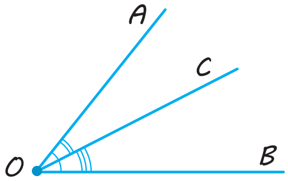


$\angle COD = 180^\circ$



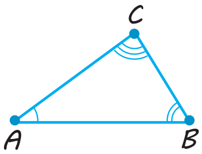
$\angle CAB = n^\circ$ — єдиний

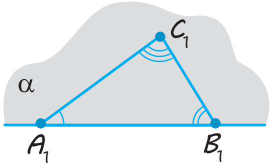
$(0^\circ < n < 180^\circ)$



$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$

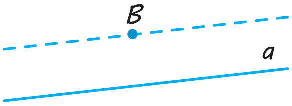
IV. Аксіома існування трикутника, що дорівнює даному





$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$

V. Аксіома паралельних прямих

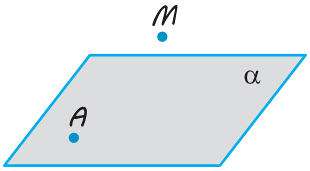
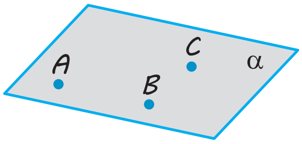
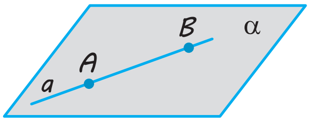
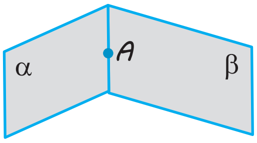


$B \notin a$

Через точку B можна провести на площині не більш як одну пряму, паралельну даній.

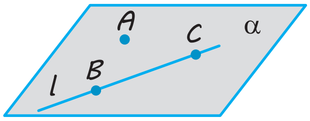
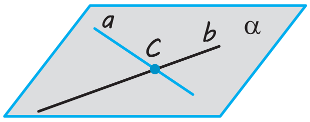
Закінчення табл. 1

2. Аксіоми стереометрії

Ілюстрація	Формулювання
	Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй. $A \in \alpha$; $M \notin \alpha$.
	Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
	Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині. Якщо $A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, то $AB \subset \alpha$.
	Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.

Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.

3. Наслідки з аксіом стереометрії

	Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
	Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

4. Означення, ознаки та властивості геометричних фігур і відношень

Означення
включає в себе характеристичні властивості фігури

Геометричні фігури або відношення
(рівність, подібність, паралельність, перпендикулярність тощо)

Ознака
дозволяє довести, що фігури, які розглядаються, є шуканими або пов'язані необхідним співвідношенням (рівність, подібність тощо)

Властивості

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття про стереометрію

Курс геометрії включає планіметрію і стереометрію. На уроках геометрії в 7–9 класах ви вивчали в основному планіметрію, тобто геометрію на площині. Усі фігури, які розглядають у планіметрії, наприклад трикутник, паралелограм, коло, лежать в одній площині. Усі точки кожної з цих фігур належать площині. Тому такі фігури називають *плоскими*.

Цього року ми вивчатимемо геометрію в просторі — стереометрію. *Стереометрією* **називають розділ геометрії, що вивчає** *просторові фігури* **та їхні властивості.** Просторові фігури можуть бути *неплоскими* (наприклад, куб чи сфера) або *плоскими*. Усю сукупність точок, які розглядають у стереометрії, називають *простором*. *Фігурою* (або фігурою в просторі) називатимемо довільну множину точок, розташованих у просторі. Зокрема, це всі фігури, розміщені в будь-якій площині, і сама ця площина також. Отже, плоскі фігури також є просторовими фігурами. Тому основними властивостями плоских фігур, відомими з курсу планіметрії, ми користуватимемося і в стереометрії.

Проте в стереометрії найважливішими є просторові фігури, що не лежать повністю ні в одній площині, тобто *неплоскі* фігури.

Із деякими простими неплоскими фігурами ви зустрічалися в курсі математики початкової школи та 5 класу. До них відносять (рис. 1.1): куб (*а*); прямокутний паралелепіпед (*б*); призму (*в*); піраміду (*г–д*); конус (*е*); циліндр (*ж*); кулю (*з*).

Деякі фігури в просторі ще називають *тілами*[*]. Наочно геометричне тіло можна уявити собі як частину простору, що займає фізичне тіло, обмежене деякою поверхнею. Наприклад, поверхня кулі — *сфера* — складається з усіх точок простору, віддалених від однієї точки — *центра* — на відстань, що *дорівнює радіусу*. Ця поверхня обмежує *кулю*, що складається з усіх точок простору, які віддалені від однієї точки — *центра* — на відстань, що *не перевищує радіуса*.

Куб, паралелепіпед, призма і піраміда є многогранниками. Строге означення многогранника дамо в 11 класі. Проте

Планіметрія — від латин. *planum* — площина.

Стереометрія — від грецьк. *стереос* — просторовий.

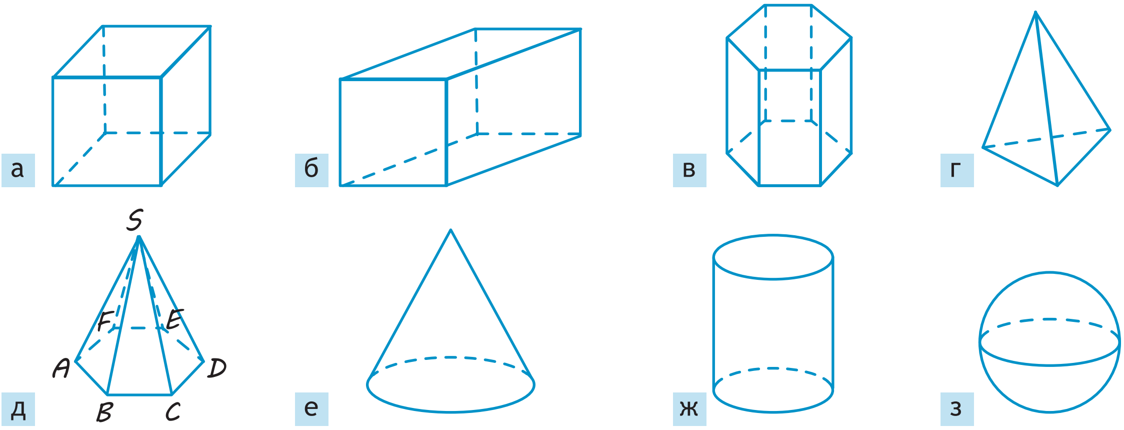


Рис. 1.1

---

[*] Строге означення тіла та його поверхні буде дано в курсі геометрії 11 класу.

оскільки ми почнемо працювати з деякими видами многогранників у 10 класі, то запропонуємо означення, що спираються на наочно-інтуїтивні уявлення.

Многогранником називатимемо обмежене тіло, поверхня якого складається зі скінченного числа плоских многокутників. Кожний із цих многокутників називають *гранню многогранника*, сторони многокутників — *ребрами многогранника* (рис. 1.2).

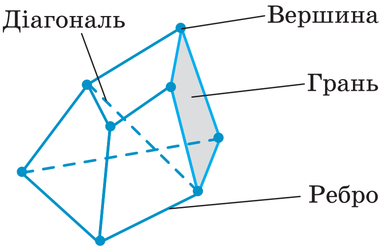


Рис. 1.2

Вершинами многогранника називають вершини його граней. Відрізок, що сполучає вершини многогранника, які не належать одній грані, називають *діагоналлю многогранника*.

Зображаючи многогранники, невидимі ребра (які закриті передніми гранями) виконують штриховими лініями (див. рис. 1.1 і 1.2). Як буде показано далі, під час креслення многогранників слід зберігати паралельність відповідних ребер, тому, наприклад, на зображенні куба чи прямокутного паралелепіпеда всі грані є паралелограмами (див. рис. 1.1, *а* і *б*).

Нагадаємо, що всі грані куба — квадрати, а всі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники.

Многогранник, дві грані якого — рівні n-кутники, а всі інші n граней — паралелограми, називають *n-кутною призмою*. Рівні n-кутники називають *основами призми*, а паралелограми — *бічними гранями*.

Куб і прямокутний паралелепіпед є окремими випадками чотирикутної призми.

Пірамідою називають многогранник, одна з граней якого — плоский многокутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину (рис. 1.1, *г–д*). Трикутні грані називають *бічними гранями піраміди*, спільну вершину бічних граней — *вершиною піраміди*, а многокутник — *основою піраміди*. Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами її основи, називають *бічними ребрами піраміди*. Піраміду називають *n-кутною*, якщо її основою є n-кутник.

Піраміду називають *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а всі бічні ребра рівні.

Наприклад, якщо в піраміді $SABCDEF$ (рис. 1.1, *д*) $ABCDEF$ — правильний шестикутник і $SA = SB = SC = SD = SE = SF$, то це правильна шестикутна піраміда.

Трикутну піраміду іноді називають *тетраедром* (рис. 1.1, *г*). Тетраедр, усі грані якого — правильні трикутники, називають *правильним*.

2 Аксіоматична побудова геометрії

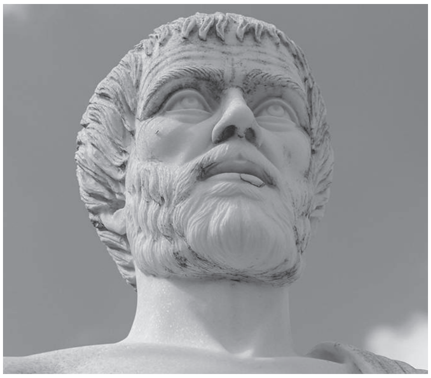
Курс планіметрії, який ви вивчали в 7–9 класах, і запропонований курс стереометрії значною мірою спираються на певні наочні уявлення про геометричні фігури. Водночас геометрія як наукова теорія про властивості фігур, розташованих у просторі, може бути побудована логічним (дедуктивним) методом на основі системи аксіом.

Пояснимо суть аксіоматичного методу побудови геометрії. Вводять основні (неозначувані) поняття — *фігури* і формулюють основні положення (*аксіоми*), у яких виражені основні співвідношення між основними поняттями*. Далі, використовуючи основні поняття й основні співвідношення між ними, визначають нові поняття — *фігури*, формулюють і доводять нові твердження — *теореми* про властивості введених понять. При цьому доводять теореми строго логічним шляхом, спираючись на аксіоми і раніше доведені теореми. Таким чином одержують геометричну систему тверджень, пов'язаних низкою логічних залежностей.

Основні означення та властивості фігур на площині, які ви вивчали в курсі геометрії 7–9 класів, наведено в інтернет-підтримці підручника (див.«Система опорних фактів курсу планіметрії», табл. 1–13).

Відомості з історії

Ідею дедуктивного методу побудови геометрії висунув ще давньогрецький філософ, учень *Сократа* (469–399 рр. до н. е.), *Платон* (422–347 рр. до н. е.). Проте дійсним засновником наукової теорії логічного виведення вважають учня *Платона*, давньогрецького мислителя *Аристотеля* (384–322 рр. до н. е.).



Аристотель

Зазначимо, що практично кожну теорему можна сформулювати у вигляді умовного твердження «Якщо A, то B», де літерою A позначено *умову теореми*, а B — її *висновок*. Наприклад, якщо в прямокутному трикутнику позначити довжину гіпотенузи через c, а довжини катетів — через a і b, то *теорему Піфагора* можна сформулювати так: «Якщо трикутник ABC прямокутний із прямим кутом C, то $c^2=a^2+b^2$». Умовою A цієї теореми є «трикутник ABC прямокутний із прямим кутом C», а висновком B — «$c^2=a^2+b^2$» (квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів).

Якщо поміняти місцями умову і висновок теореми, тобто розглянути твердження «Якщо B, то A», і це твердження буде правильним, то отримаємо так звану *теорему, обернену* до даної. Наприклад, для теореми Піфагора обернене твердження: «Якщо в трикутнику ABC зі сторонами a, b, c виконується рівність $c^2=a^2+b^2$, то цей трикутник прямокутний із прямим кутом C» теж правильне. Тому останнє

---

* Зауважимо, що крім суто геометричних понять у планіметрії та стереометрії використовують деякі основні (неозначувані) поняття, спільні й для інших розділів математики, наприклад поняття «множина».

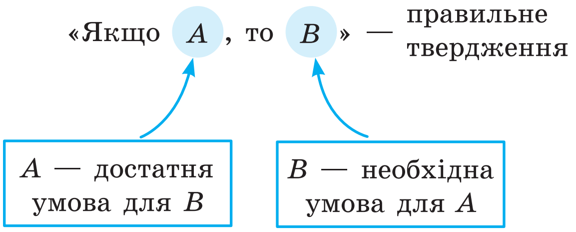
твердження є формулюванням теореми, оберненої до теореми Піфагора.

Нагадаємо, що не кожна теорема має обернену. Наприклад, розглянемо теорему про суміжні кути: «Якщо два кути суміжні, то їх сума дорівнює 180°» (умова *A* — «два кути суміжні», висновок *B* — «їх сума дорівнює 180°»). Сформулюємо обернене твердження («Якщо *B*, то *A*»): «Якщо сума двох кутів дорівнює 180°, то ці кути суміжні». Це твердження неправильне, тому що, наприклад, сума двох вертикальних прямих кутів дорівнює 180°, але ці кути не є суміжними. Отже, для теореми про суміжні кути не існує оберненої теореми.

? Які ще теореми, які не мають обернених, вам відомі?

Деякі математичні твердження іноді формулюють із використанням понять «необхідна умова» і «достатня умова». Пояснимо ці терміни.

У випадку, коли умовне твердження «Якщо *A*, то *B*» правильне, умову *A* називають *достатньою* для умови *B*, а умову *B* — *необхідною* для умови *A* (див. схему).



Наприклад, властивість суміжних кутів із курсу планіметрії: «Якщо кути суміжні, то їх сума дорівнює 180°» містить два твердження: «кути суміжні» — твердження *A* і «їх сума дорівнює 180°» — твердження *B*. Тоді наведену вище властивість можна сформулювати так: «Для того щоб кути були суміжними (твердження *A*), *необхідно*, щоб їх сума дорівнювала 180°» (твердження *B*) або так: «Для того щоб сума двох кутів дорівнювала 180° (твердження *B*), *достатньо*, щоб ці кути були суміжними» (твердження *A*).

У випадку, коли правильними є і пряме твердження «Якщо *A*, то *B*», і обернене «Якщо *B*, то *A*», кожну з умов *A* і *B* називають *необхідною і достатньою* для іншої. Наприклад, пряму теорему Піфагора і обернену до неї можна сформулювати у вигляді одного твердження: «Для того щоб трикутник був прямокутним, *необхідно і достатньо*, щоб квадрат однієї

Відомості з історії

Стосовно геометрії ідеї Аристотеля реалізував давньогрецький математик *Евклід* (III ст. до н. е.) у своєму трактаті з геометрії «Начала». Протягом 2000 років це творіння Евкліда було єдиним посібником, за яким навчали геометрії; від нього йшли й усі задуми подальшого досконалішого обґрунтування геометрії. Слід зазначити, що система сформульованих Евклідом аксіом (постулатів) потребувала вдосконалення, оскільки була неповною, а тому доведення нерідко «грішили» зверненням до наочності.

Кропітка праця в галузі математики дозволила створити науковий аксіоматичний метод побудови геометрії. Велика роль у цьому належить відомим німецьким математикам *Феліксу Клейну* (1849—1925) і *Давиду Гільберту* (1862—1943). У 1899 р. з'явилося видання «Основ геометрії» Гільберта, де він побудував аксіоматику таким чином, що логічна структура геометрії стала абсолютно прозорою.


Фелікс Клейн


Давид Гільберт

сторони дорівнював сумі квадратів двох інших сторін». Іноді замість терміна «необхідно і достатньо» використовують також словосполучення «тоді і тільки тоді». У цьому разі останнє твердження буде сформульовано так: «Трикутник буде прямокутним *тоді і тільки тоді,* коли квадрат однієї сторони дорівнює сумі квадратів двох інших сторін».

Отже, наявність у формулюванні теореми (чи завдання) словосполучення «тоді і тільки тоді» вимагає доведення як прямої, так і оберненої теорем.

3 Основні поняття стереометрії

Основними фігурами в просторі є *точка*, *пряма* і *площина*. Як і в курсі планіметрії, точки в просторі будемо позначати великими латинськими буквами A, B, C, D, ..., а прямі — малими латинськими буквами — a, b, c, ... або двома точками, що лежать на прямій. Площини позначатимемо малими грецькими буквами — α, β, γ, ..., а зображатимемо у вигляді паралелограмів або довільних замкнених областей (рис. 1.3). Ці способи зображення відповідають наочному уявленню про площину як про гладеньку поверхню стола, озера (рис. 1.4) тощо. При цьому площину уявляють необмеженою в усі боки, ідеально рівною і такою, що не має ніякої товщини.

! Озеро Синевир, яке називають «Морським Оком» Карпат, утворилося внаслідок землетрусу більш ніж 10 тис. років тому. Воно розташоване на висоті 989 м над рівнем моря, його площа — близько 5 га, найбільша глибина — 24 м. Озеро входить до складу Національного природного парку «Синевир», на території якого в 2011 р. було створено єдиний в Україні реабілітаційний центр для бурих ведмедів.

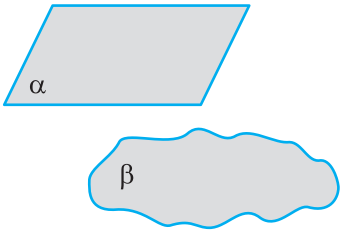


Рис. 1.3

Рис. 1.4. Озеро Синевир у Карпатах

Якщо A — точка площини α, то кажуть, що *точка A лежить у площині α, а площина α проходить через точку A*. Це можна записати так: $A \in \alpha$. Якщо точка M не належить площині α, це записують так: $M \notin \alpha$ (рис. 1.5).

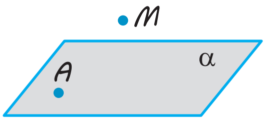


Рис. 1.5

Якщо кожна точка прямої a належить площині α, то кажуть, що *пряма a лежить у площині α, а площина α проходить через пряму a* (рис. 1.6). Це позначають так: $a \subset \alpha$. Якщо пряма b не належить площині α, це позначають так: $b \not\subset \alpha$.

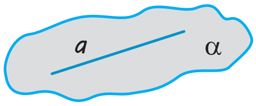


Рис. 1.6

Якщо пряма a і площина α мають тільки одну спільну точку A, то кажуть, що вони *перетинаються* в точці A, і записують так*: $a \cap \alpha = A$. На рисунках частину прямої, яка «закрита» зображенням площини, вважають невидимою і зображають штриховою лінією (рис. 1.7).

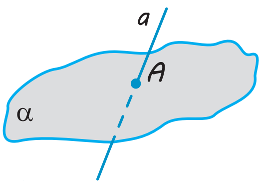


Рис. 1.7

---

* У наведеному записі літерою A позначено геометричну фігуру — множину точок, яка складається з однієї точки.

4 Аксіоми стереометрії

У стереометрії, як і в планіметрії, властивості геометричних фігур установлюють шляхом доведення відповідних теорем. Але на початку курсу, коли нам невідомо жодної властивості фігур у просторі, доводиться якісь властивості основних фігур приймати без доведення. Як і в планіметрії, ті властивості основних геометричних фігур, які приймають без доведення, називають *аксіомами*. Нагадаємо, що основними фігурами в просторі є точка, пряма і площина. Аксіоми виражають інтуїтивно зрозумілі властивості площин та їх зв'язок з іншими основними фігурами — точками і прямими.

☑ **Аксіома 1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.**

☑ **Аксіома 2. Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

☑ **Аксіома 3. Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.**

☑ **Аксіома 4. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку (рис. 1.8).**

☑ **Аксіома 5. Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.**

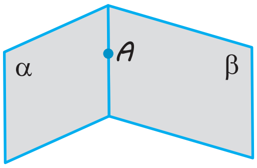


Рис. 1.8

Зауважимо, що властивості площин і прямих, зафіксовані в аксіомах, часто використовуються у практичній діяльності.

На рисунках проілюстровано застосування аксіоми 2 (поясніть чому). ?

Твердження аксіоми 3 використовують, коли хочуть перевірити, чи є дана поверхня плоскою. Для цього до поверхні в різних місцях прикладають рівну рейку (прави́ло) та перевіряють, чи є зазор між рейкою та поверхнею.

Зміст аксіоми 4 можна проілюструвати за допомогою зігнутого аркуша паперу або вашого підручника.

У курсі стереометрії ми будемо також вважати, що *для будь-якої площини в просторі мають місце всі основні означення, теореми і аксіоми планіметрії*[*].

Докладно про систематизацію фактів і методів планіметрії дізнаєтесь, звернувшися до інтернет-підтримки підручника.

Зокрема, на кожній площині між двома вибраними точками існує певна відстань — довжина відрізка, що їх сполучає. Так, дві точки можуть належати одночасно різним площинам, але за аксіомою 5 відстань між цими точками на кожній із площин буде одна й та сама. Після того як вибрано одиничний відрізок, довжину кожного відрізка можна виразити додатним числом. До цього числа приписують назву одиничного відрізка: 2 см, 1,5 км тощо. Якщо одиничний відрізок не має назви, а довжина відрізка AB дорівнює, наприклад, 5 одиницям довжини, то пишемо: $AB=5$, що є скороченням запису $AB=5$ одиниць.

Аксіома про відстані дозволяє порівнювати фігури, розміщені на різних площинах, зокрема, застосовувати до них теореми про рівність і подібність трикутників.

Користуючись поняттям відстані, можна означити рівність і подібність фігур (зокрема, трикутників) у просторі так само, як це було зроблено в планіметрії.

✓ **Означення 1. Фігури називаються рівними, якщо існує відповідність[**] між їхніми точками, при якій відстані між парами відповідних точок рівні[***].**

✓ **Означення 2. Дві фігури називаються подібними, якщо існує відповідність між їхніми точками, при якій відстані між відповідними точками змінюються в одне і те саме число разів.**

Інакше кажучи, для двох довільних точок X і Y першої фігури і точок X' і Y' другої фігури, які їм відповідають, справедлива рівність $X'Y'=k\cdot XY$.

Надалі аксіому 5 ми, як правило, будемо використовувати неявно, тобто не посилаючись на неї, на відміну від перших чотирьох аксіом.

5 Наслідки з аксіом стереометрії

Використовуючи аксіоми стереометрії, за допомогою логічних міркувань установлюють справедливість інших властивостей. Розглянемо деякі з них.

✓ **Теорема 1.1. Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

● *Доведення.* Нехай точка A не лежить на прямій l. Виберемо на прямій l довільні точки B і C (рис. 1.9). Через точки A, B, C, які не лежать на одній прямій l, за аксіомою 2 проходить єдина площина α. За аксіомою 3 пряма l лежить у площині α. Отже, площина α проходить через пряму l і точку A.

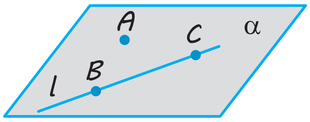


Рис. 1.9

Покажемо, що ця площина єдина. Дійсно, будь-яка інша площина, що проходить через пряму l і точку A, проходитиме також через точки A, B, C. За аксіомою 2 вона повинна збігатися з площиною α. ○

✓ **Теорема 1.2. Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

● *Доведення.* Нехай прямі a і b перетинаються в точці C (рис. 1.10). Ви-

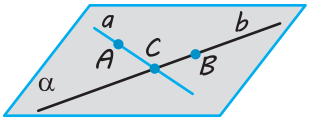
---

[*] Систему аксіом планіметрії О. В. Погорєлова розглянемо далі в цьому параграфі.

[**] Нагадаємо, що при встановленні відповідності між двома фігурами кожній точці однієї фігури ставиться у відповідність єдина точка іншої фігури.

[***] Як і на площині, відповідність між двома фігурами, при якій зберігаються відстані між відповідними точками цих фігур, називають *переміщенням*, або *рухом*. Детальніше рух буде розглянуто в розділі 4.

беремо на прямій a довільну точку A, а на прямій b — довільну точку B, відмінні від точки C. Через точки A, B, C, які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 проходить єдина площина α. За аксіомою 3 пряма a лежить у площині α і пряма b лежить у площині α. Отже, площина α проходить через прямі a і b.



◆ Рис. 1.10

Покажемо, що ця площина єдина. Дійсно, будь-яка інша площина, що проходить через прямі a і b, проходитиме також через точки A, B, C. За аксіомою 2 вона повинна збігатися з площиною α. ○

Зауваження. Оскільки три точки A, B, C, які не лежать на одній прямій, однозначно визначають деяку площину, то часто площину, що проходить через ці точки, позначають так: (ABC).

Вираз «площина ABC» записують також скорочено «пл. ABC». Інколи, щоб підкреслити, що розглядувані чотири або більше точок лежать в одній площині, використовують скорочені записи «площина $ABCD$» або «пл. $ABCD$», які означають, що площина проходить через точки A, B, C, D.

З аксіоми 2 та доведених теорем випливає, що *площину можна задати:*

1) *трьома точками, які не лежать на одній прямій;*
2) *прямою і точкою, яка не лежить на ній;*
3) *двома прямими, які перетинаються.*

Домовилися, що для будь-якої площини в просторі мають місце всі основні означення, теореми й аксіоми планіметрії. Тому в нашому викладі система аксіом стереометрії фактично складається з групи аксіом 1–5 стереометрії і групи аксіом планіметрії (можливі аксіоматики шкільного курсу планіметрії наведено нижче та в табл.1).

До системи аксіом висувають такі вимоги. Вона повинна бути:

1) *несуперечливою*, тобто такою, щоб із цієї системи аксіом неможливо було одержати логічним шляхом два твердження, які суперечать одне одному, — деяке твердження та його заперечення;
2) *незалежною*, тобто такою, щоб жодна з аксіом даної системи не була логічним наслідком інших її аксіом;
3) *повною*, тобто такою, щоб за допомогою аксіом тільки цієї системи, не додаючи нових аксіом, можна було довести (або спростувати) строго логічним шляхом будь-яке твердження про властивості фігур даної геометрії.

У шкільних курсах геометрії найчастіше реалізується тільки перша вимога — несуперечливість системи аксіом. Через прагнення досягти більшої наочності і простоти доведень застосовують систему аксіом, яка не є незалежною і здебільшого не є повною. Повну систему аксіом евклідової геометрії наведено на с. 25–26.

Для більш строгого й докладного викладення матеріалу потрібно доповнити та уточнити запропоновану систему аксіом і обґрунтувати певні властивості, необхідні для розгляду подальшого матеріалу курсу стереометрії. Зокрема, у планіметрії ми мали одну площину, на якій розміщувались усі фігури, що розглядаються. У стереометрії багато, навіть безліч, площин. Через це розуміння деяких аксіом планіметрії як аксіом стереометрії потребує уточнення.

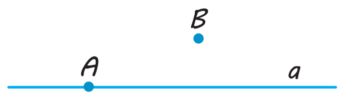
? Які уточнення аксіом стереометрії ви б запропонували?

Дамо аксіоми планіметрії та їх уточнені формулювання* для використання в стереометрії.

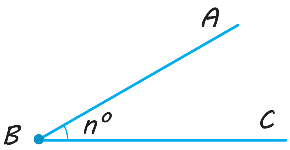
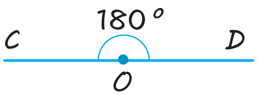
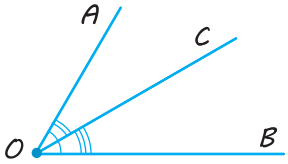
---

* У наведених формулюваннях уточнення виділено курсивом. Аксіоми планіметрії, які не вимагають уточнення для використання в стереометрії, наведено в таблиці без поділу на стовпчики.

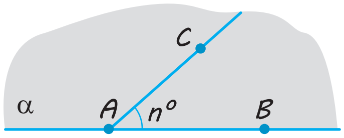
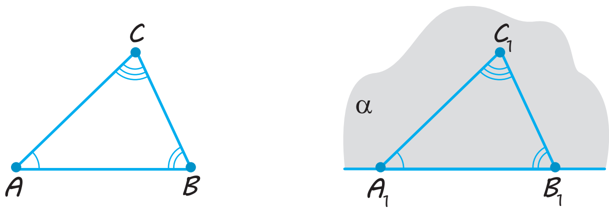
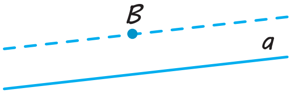
Таблиця 2

<table>
<tr><th colspan="2">Аксіоми планіметрії</th></tr>
<tr><th>Аксіоми планіметрії за системою О. В. Погорєлова</th><th>Уточнені формулювання для використання в стереометрії</th></tr>
<tr><td colspan="2">I. <i>Аксіоми належності</i></td></tr>
<tr><td>I_1. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, які не належать їй.
 </td><td>I_1. <i>Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, які не належать їй.</i>
Ця аксіома у стереометрії набуває дещо іншого змісту — докладіше це буде розглянуто далі.</td></tr>
<tr><td colspan="2">I_2. Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.
 </td></tr>
<tr><td colspan="2">II. <i>Аксіоми взаємного розміщення точок на прямій і площині (аксіоми порядку)</i></td></tr>
<tr><td colspan="2">II_1. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.
 </td></tr>
<tr><td>II_2. Пряма розбиває площину на дві півплощини.</td><td>II_2. Пряма, <i>яка належить площині</i>, розбиває цю площину на дві півплощини.</td></tr>
<tr><td colspan="2">III. <i>Аксіоми вимірювання та відкладання відрізків і кутів</i></td></tr>
<tr><td colspan="2">III_1. Кожний відрізок (рис. <i>а</i>) має певну довжину, більшу за нуль. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин (рис. <i>б</i>), на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

$AB = a,\ a > 0$
<i>а</i>

$AC = AB + BC$
<i>б</i></td></tr>
<tr><td colspan="2">III_2. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини $(OA = m)$, і до того ж тільки один.
 </td></tr>
<tr><td colspan="2">III_3. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль (рис. <i>а</i>). Розгорнутий кут дорівнює 180° (рис. <i>б</i>). Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами (рис. <i>в</i>).

$\angle ABC = n°,\ n° > 0°$
<i>а</i>

$\angle COD = 180°$
<i>б</i>

$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$
<i>в</i></td></tr>
</table>

Закінчення табл. 2

Аксіоми планіметрії	
III$_4$. Від будь-якої прямої в дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою від 180°, і до того ж тільки один.  $\angle CAB = n^\circ$ — єдиний $(0^\circ < n < 180^\circ)$	III$_4$. Від півпрямої *на площині, яка містить її*, у дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою від 180°, і тільки один.
IV. *Аксіома існування трикутника, що дорівнює даному*	
IV$_1$. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому, у даному розміщенні відносно даної півпрямої.  $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$	IV$_1$. Який би не був трикутник, *на площині, яка містить його*, існує трикутник, що дорівнює даному, у заданому розміщенні відносно даної півпрямої.
V. *Аксіома паралельних прямих*	
V$_1$. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш як одну пряму, паралельну даній. 	V$_1$. *На площині* через дану точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більше як одну пряму, паралельну даній.

Отже, аксіома I$_1$ у стереометрії набуває дещо іншого змісту. У планіметрії ця аксіома стверджувала існування точок поза даною прямою на тій площині, на якій лежить пряма (і всі розглядувані фігури). Тепер ця аксіома стверджує взагалі існування точок, що не лежать на даній прямій. Із неї безпосередньо не випливає, що існують точки поза даною прямою на площині, на якій лежить пряма. Це потребує спеціального доведення.

● *Доведення.* Нехай дано площину α і пряму a в цій площині (рис. 1.11). Доведемо існування у площині α точок, що не лежать на прямій a.

Позначимо точку A на прямій a і точку A' поза площиною α. Через пряму a і точку A' проведемо площину α'. Візьмемо точку B поза площиною α' та проведемо через пряму AA' і точку B площину β. Площини α і β перетинаються по прямій b, яка проходить через точку A і відмінна від прямої a. Точки цієї прямої, відмінні від точки A, лежать у площині α поза прямою a, що й потрібно було довести. ○

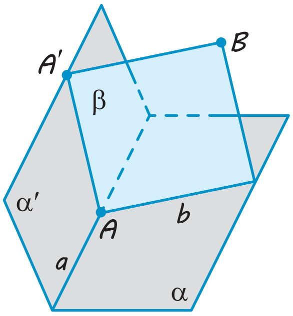


Рис. 1.11

Відомості з історії

Олексій Васильович Погорєлов (1919—2002) — видатний вітчизняний математик, учений зі світовим ім'ям, академік Національної академії наук України, заслужений діяч науки і техніки України.

Рідкісне поєднання математичного та інженерного талантів визначило коло наукових інтересів О. В. Погорєлова. Його праці належать до геометрії «в цілому», основ геометрії, теорії диференціальних рівнянь у часткових (частинних) похідних, теорії стійкості пружних оболонок, питань кріогенного електромашинобудування.

Погорєлов — автор підручників з усіх основних розділів геометрії для вищих навчальних закладів. Ці підручники вирізняються оригінальністю викладу матеріалу та математичною строгістю. Багато й успішно Олексій Васильович працював також над питаннями вдосконалення шкільної математичної освіти. Створений ним підручник з геометрії спрямовано на розвиток логічного мислення та здібностей учнів.

На будівлі Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, де навчався і працював О. В. Погорєлов, установлено меморіальну дошку.

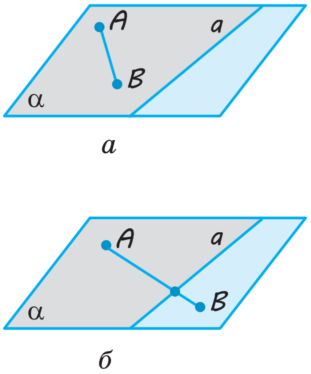
Для розгляду деяких стереометричних понять корисно ввести також поняття *розбиття простору на частини кожною з площин*.

Пригадаємо, що кожна з прямих на площині розбиває її на дві півплощини (рис. 1.12), що мають такі властивості:

1) півплощина, обмежена прямою a, містить цю пряму, але не збігається з нею;
2) якщо кінці A і B відрізка AB лежать в одній півплощині (але не належать прямій a), то відрізок AB не перетинає пряму a (рис. 1.12, *а*);
3) якщо ж кінці A і B відрізка AB належать різним півплощинам (але не належать прямій a), то відрізок AB перетинає пряму a (рис. 1.12, *б*).

Аналогічно означають і частину простору, обмежену даною площиною, — *півпростір*.

Площину, яка обмежує півпростір, називають його *границею*.



а

б

Рис. 1.12

✓ **Теорема 1.3. Площина розбиває простір на два півпростори. Якщо точки A і B належать одному півпростору, то відрізок AB не перетинає площину** (рис. 1.13, *а*). **Якщо ж точки A і B належать різним півпросторам, то відрізок AB перетинає площину** (рис. 1.13, *б*).

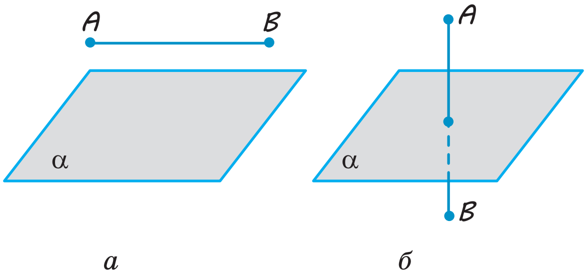
● *Доведення.* Нехай α — дана площина. Позначимо точку D, яка не лежить на площині α. Така точка існує за аксіомою 1 стереометрії. Розіб'ємо всі точки простору, які не лежать на площині α, на два півпростори таким чином. Точку A віднесемо до одного півпростору, якщо відрізок AD не перетинає площину α, і до другого півпростору, якщо відрізок AD перетинає площину α. Покажемо, що це розбиття простору має властивості, названі в теоремі.

Нехай точки A і B належать першому півпростору. Проведемо через точки A, B і D площину α'. Якщо площина α' не перетинає площину α, то відрізок AB теж не перетинає цю площину. Припустимо, що площина α' перетинає площину α (рис. 1.14). Оскільки площини різні, то їх перетин відбувається по деякій прямій a. Пряма a розбиває площину α' на дві півплощини. Точки A і B належать одній півплощині, а саме тій, у якій лежить точка D. Тому відрізок AB не перетинає пряму a, а отже, і площину α.

Якщо точки A і B належать другому півпростору, то площина α' перетинає площину α, оскільки відрізок AD перетинає площину α. Точки A і B належать одній півплощині розбиття площини α' прямою a. Звідси випливає, що відрізок AB не перетинає пряму a, а отже, і площину α.

Якщо, нарешті, точка A належить одному півпростору, а точка B — іншому, то площина α' перетинає площину α, а точки A і B лежать у різних півплощинах площини α' відносно прямої a. Тому відрізок AB перетинає пряму a, а отже, і площину α. ○

Необхідно зазначити, що в стереометрії існує декілька рівносильних систем аксіом, одну з яких ми й обрали. Якби ми обрали іншу систему, деякі з аксіом, наведених вище, перетворилися б на теореми, а деякі теореми стали б аксіомами.



а *б*

Рис. 1.13

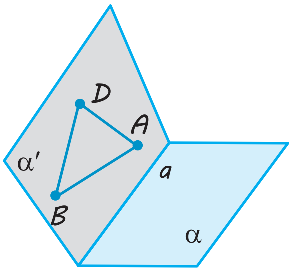


Рис. 1.14

?

Уявіть, що в деякій системі аксіом теорему 1.1 прийнято за аксіому. Чи залишиться при цьому теоремою теорема 1.2?

Відомості з історії

На виняткове значення властивості про розбиття площиною простору на два півпростори чи не вперше звернув увагу всесвітньо відомий український математик *Михайло Васильович Остроградський*. Він створив підручник з елементарної геометрії, який мав величезний вплив на викладання геометрії впродовж усього XIX ст.

Народився М. В. Остроградський у селі Пашенівка Кобеляцького повіту Полтавської губернії (тепер це Козельщинський район Полтавської області) у родині дрібного поміщика. З діда-прадіда Остроградські належали до козацької старшини, а сам рід, за легендою, походив від знаменитих волинських державників і просвітителів князів Острозьких; звідси й прізвище — Остроградські. Михайло Остроградський навчався спочатку в Полтавській

М. В. Остроградський

гімназії, а потім — у щойно відкритому Харківському університеті. Після закінчення університету Остроградський у 1822 р. їде до Парижа, де слухає лекції таких корифеїв математичної науки, як Лаплас, Пуассон, Ампер, Фур'є, Штурм, Коші, Пуансо та ін. У 1826 р. Оґюстен Коші в одній зі своїх праць дуже схвально відгукнувся про успіхи молодого Остроградського. Такий відгук цінився тоді більше за будь-який диплом.

М. В. Остроградський створив велику наукову школу, традиції якої ще й досі помітні в проблематиці вітчизняних математичних досліджень. Він був обраний академіком багатьох академій, почесним членом університетів і наукових товариств. Поховали його на батьківщині. У Полтавському педагогічному інституті відкрито музей М. В. Остроградського. 200-річчя з дня народження видатного українського математика занесено до календаря пам'ятних дат ЮНЕСКО.

У нашому курсі система аксіом (так само, як і в інших підручниках для школи) не є повною. Так, зокрема, із наведеної системи аксіом не випливає, що між двома даними точками прямої обов'язково лежить ще точка цієї прямої. Це здається очевидним, оскільки пряма, за нашими уявленнями, суцільна, неперервна, без «дірок». Але таке уявлення має одержати точне означення у вигляді властивості прямої. Аксіоми, які задають цю властивість, — це аксіоми неперервності. Ми не наводимо їх, оскільки це утруднило б виклад, тому доводиться частково поступитися строгістю заради наочності і простоти доведення.

Формулювання аксіом неперервності наведено на с. 26.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Дано чотири точки, що не лежать в одній площині. Чи можуть три з них лежати на одній прямій?

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай дано чотири точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Припустимо, що три з даних точок, наприклад A, B, C, лежать на одній прямій a (а четверта точка D не лежить на цій прямій). Тоді через три точки A, B, D, які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 можна провести площину α (рис. 1.15). Але за аксіомою 3, якщо дві різні точки A і B прямої a лежать у площині α, то і вся пряма лежить у цій площині, а отже, і точка C теж лежить у площині α. Таким чином, усі чотири точки лежать в одній площині α, що суперечить умові.	На запитання «Чи може виконуватися дане твердження?» можна дати відповідь: *«Так», і тоді достатньо навести хоча б один приклад, коли це твердження виконується; «Ні», і тоді потрібно довести, що це твердження ніколи не виконується* (найчастіше це доводять методом від супротивного). Використовуючи метод *від супротивного*, потрібно: 1) зробити припущення, протилежне тому, що ми хочемо довести; 2) спираючись на аксіоми та вже доведені теореми, отримати суперечність із умовою або з відомою властивістю;

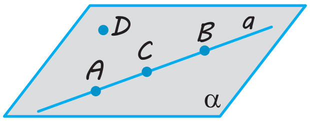


Рис. 1.15

Отже, наше припущення неправильне, і якщо чотири точки не лежать в одній площині, то жодні три з них не лежать на одній прямій. ◁

3) зробити висновок про те, що наше припущення неправильне, а правильним є те, що потрібно було довести.

Задача 2*

Доведіть, що **через будь-які дві різні точки простору можна провести пряму, і до того ж тільки одну.**

Розв'язання

▶ Нехай A і B — дві різні точки простору. Виберемо точку C, яка не лежить на одній прямій з точками A і B (за відповідною аксіомою планіметрії).

Через точки A, B, C, які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 проведемо площину α. У площині α за відповідною аксіомою планіметрії через точки A і B можна провести пряму a. Припустимо, що в просторі через точки A і B можна провести ще одну пряму a_1, відмінну від прямої a. За аксіомою 3 пряма a_1 лежить у площині α (оскільки дві її точки A і B лежать у площині α). Тоді в площині α через дві різні точки A і B проведено дві різні прямі a і a_1, що суперечить відповідній аксіомі планіметрії. Отже, через дві різні точки в просторі можна провести тільки одну пряму. ◁

Коментар

У планіметрії твердження «Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну» було аксіомою. Проте в стереометрії ця аксіома стверджує тільки те, що *в розглядуваній площині через дві різні точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну*.

Відповідний факт у просторі потребує доведення. Для цього слід використати додатково таку аксіому планіметрії: «*Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, які не належать їй*».

Ця аксіома і в просторі гарантує існування точок, які не належать даній прямій (див. п. 1 табл. 2).

Задача 3

Дано пряму і точку, що не лежить на ній. Доведіть, що **всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку, лежать в одній площині.**

Розв'язання

▶ Нехай дано пряму a в просторі і точку B, яка не лежить на ній. Через пряму a і точку B проведемо площину (за теоремою 1.1 ця площина єдина). Нехай довільна пряма b проходить через точку B і перетинає пряму a в точці A (рис. 1.16).

Коментар

Спочатку побудуємо площину, яка проходить через дані пряму і точку. Потім доведемо, що всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку, лежать у цій площині.

Для коректного доведення слід також упевнитися, що побудована площина єдина.

Тоді точки A і B прямої b належать площині α, отже, за аксіомою 3 і вся пряма b лежить у площині α.

Отже, усі прямі, які перетинають дану пряму a і проходять через дану точку B, що не лежить на ній, лежать в одній площині α. ◁

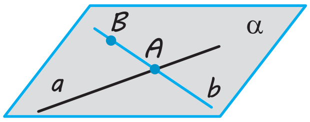


Рис. 1.16

Запитання

1. Наведіть приклади просторових фігур, плоских фігур, неплоских фігур. Яке мінімальне число точок може містити неплоска фігура?
2. Назвіть основні поняття стереометрії. Сформулюйте аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них.
3.* Дайте означення рівності та подібності фігур у просторі.
4.* Доведіть, що через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
5.* Доведіть, що через дві прямі, які перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
6. Поясніть зміст поняття «обернена теорема» і наведіть приклади прямої та оберненої теорем. Наведіть приклад теореми, яка не має оберненої, та поясніть, чому її немає.
7.* На прикладі твердження: «Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм» поясніть зміст понять «необхідна умова», «достатня умова». Сформулюйте дане твердження, використовуючи терміни «необхідно», «достатньо». Чи можна поєднати умову і висновок наведеного твердження терміном «необхідно і достатньо»? Якщо можна, то поясніть чому.
8. Поясніть суть аксіоматичного методу побудови геометрії.
9. Які вимоги висувають до системи аксіом? Поясніть суть кожної з вимог.
10. Поясніть, що називається півпростором, який визначається даною площиною α.
11. Сформулюйте теорему про розбиття простору площиною. Поясніть її зміст.
12.* Доведіть теорему про розбиття простору площиною.

Вправи

1.1.° Поясніть, чому стіл, який має три ніжки, обов'язково стійкий, а про стіл із чотирма ніжками цього стверджувати не можна.

1.2.° (*Жарт.*) Три мухи одночасно злетіли з кришки стола. Чи можуть вони знову опинитися в одній площині?

1.3.° Чи можна провести площину через три точки, які лежать на одній прямій? Відповідь поясніть, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них.

1.4.° Скільки площин може проходити через три дані точки?

1.5. Доведіть, що площина і пряма, яка не лежить на ній, або не перетинаються, або перетинаються в одній точці.

1.6. Доведіть, що існує пряма, яка перетинає дану площину.

1.7. Точка M належить площині α, а точка N не належить їй. Чи належить площині α середина відрізка MN? Поясніть відповідь, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них.

1.8. Дайте відповідь на запитання, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них. Чи є правильним, що можна провести площину через будь-які:
1) дві точки;
2) три точки;
3) чотири точки?

1.9.° Скільки площин можна провести через одну пряму? Обґрунтуйте свою відповідь.

1.10.° Чи можуть дві площини мати:
1) тільки одну спільну точку;
2) тільки дві спільні точки?

1.11.° Чи можуть дві різні площини мати дві різні спільні прямі?

1.12. Як розташовані дві площини, якщо в кожній із них лежить один і той самий трикутник?

1.13. Доведіть, що існує площина, яка перетинає дану площину.

1.14. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі AC і BD не перетинаються.

1.15. Дано площину α і квадрат $ABCD$. Чи може площині α належати:
1) тільки одна вершина квадрата;
2) тільки дві його вершини;
3) тільки три вершини?

1.16.* Дві вершини трикутника належать площині α. Чи належить цій площині третя вершина, якщо відомо, що даній площині належить:
1) точка перетину медіан трикутника;
2) центр вписаного в трикутник кола?

1.17.* Чи кожна точка кола належить площині, якщо відомо, що цій площині належать:
1) дві точки кола;
2) три точки кола?

1.18.* Чи правильно, що через три прямі, які попарно перетинаються, проходить єдина площина?

1.19.* Дано дві прямі, які перетинаються. Доведіть, що всі прямі, які перетинають обидві дані прямі і не проходять через точку їх перетину, лежать в одній площині.

1.20.* Три площини мають спільну точку. Чи є правильним твердження, що всі ці площини мають спільну пряму? Скільки прямих можна отримати у разі попарного перетину цих площин?

1.21. Серед прямих і площин, що проходять через вершини куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.17), назвіть:
1) пари прямих, що перетинаються;
2) трійки прямих, які перетинаються в одній точці;
3) пари площин, що перетинаються;
4) трійки площин, які перетинаються в одній точці.

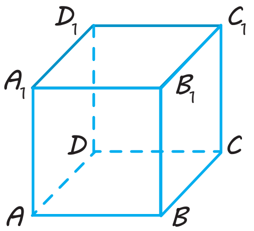


Рис. 1.17

1.22.* Дано три різні площини, які попарно перетинаються. Доведіть, що коли дві з прямих перетину цих площин перетинаються, то третя пряма проходить через точку їх перетину.

1.23. Дано чотири точки. Відомо, що пряма, яка проходить через будь-які дві із цих точок, не перетинається з прямою, яка проходить через інші дві точки. Доведіть, що дані чотири точки не лежать в одній площині.

1.24. Чи лежать в одній площині прямі a, b і c, якщо будь-які дві з них перетинаються, але не існує точки, що належить усім трьом прямим? Виконайте рисунок.

1.25. Прямі a, b і c, що лежать в одній площині, перетинаються в точці O. Доведіть, що існує площина, яка не проходить через точку O та перетинає три дані прямі a, b і c.

1.26. На яке найбільше число частин можуть розбивати простір:
1) дві площини; 2) три площини; 3) чотири площини?

1.27. Поясніть, чому весь простір не може бути півпростором, що визначається деякою площиною α.

1.28. Чи може площина, що перетинає площину α, бути повністю розташованою в одному з півпросторів, які визначає площина α?

1.29. Що можна сказати про взаємне розташування двох півпросторів та їх границь α і β, якщо:
1) перетином* цих півпросторів є площина α;
2) перетин цих півпросторів збігається з їх об'єднанням?

1.30. У результаті перетину скількох півпросторів можна отримати:
1) куб; 2) трикутну піраміду?

1.31.* Кінці ламаної, яка складається з двох ланок, лежать по різні боки від площини α. Доведіть, що ламана перетинає площину α.

1.32. Поясніть, звідки випливає, що в кожному півпросторі лежить нескінченна множина:
1) точок; 2) прямих.

1.33.* Дано $n>4$ точок, кожні чотири з яких лежать в одній площині. Доведіть, що всі ці n точок лежать в одній площині.

1.34.* Дано $n>3$ прямих, кожні дві з яких перетинаються. Доведіть, що всі n прямих лежать в одній площині або всі проходять через одну точку.

1.35. Скільки різних площин можуть визначати 5 точок? Дайте всі можливі відповіді. Наведіть відповідні рисунки.

1.36.* Площини α і β перетинаються по прямій a. Через точку A прямої a проведено площину γ, що не містить пряму a. Доведіть, що площина γ перетинає площини α і β по двох різних прямих.

---

* Під перетином півпросторів розуміємо фігуру, яка складається з усіх спільних точок цих півпросторів.

1.37. Дано площину α та три прямі AB, BC і AC, які перетинають її в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що точки A_1, B_1 і C_1 належать одній прямій.

Виявіть свою компетентність

1.38° Як можна перевірити якість виготовлення лінійки, якщо є гарно оброблена плоска плита? На який теоретичний факт спирається ця перевірка?

1.39° За допомогою двох ниток можна перевірити, чи буде стійко стояти на підлозі виготовлений стіл, який має чотири ніжки. Як потрібно натягнути ці нитки?

Відомості з історії

Аксіоматика евклідової геометрії

Сучасна система аксіом евклідової геометрії складається з п'яти груп і спирається на шість основних (неозначуваних) понять. Це об'єкти трьох видів: точки, прямі та площини і три види відношень між ними, які виражаються словами «належить», «лежить між», «рух».

I. АКСІОМИ НАЛЕЖНОСТІ

I_1. Через кожні дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

I_2. На кожній прямій лежать принаймні дві точки. Існують хоча б три точки, які не лежать на одній прямій.

I_3. Через кожні три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

I_4. На кожній площині лежать принаймні три точки та існують хоча б чотири точки, які не лежать в одній площині.

I_5. Якщо дві точки даної прямої лежать на даній площині, то і сама пряма лежить на цій площині.

I_6. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають ще одну спільну точку (а отже, і спільну пряму).

II. АКСІОМИ ПОРЯДКУ

II_1. Якщо точка B лежить між точками A і C, то всі три точки лежать на одній прямій.

II_2. Для будь-яких точок A і B існує така точка C, що B лежить між A і C.

II_3. Із трьох точок прямої тільки одна лежить між двома іншими.

II_4. (*Аксіома Паша*) Якщо пряма l перетинає одну сторону трикутника (рис. 1.18), то вона перетинає ще й іншу його сторону або проходить через його вершину (відрізок AB означають як множину точок, які лежать між точками A і B; відповідно означають і сторони трикутника).

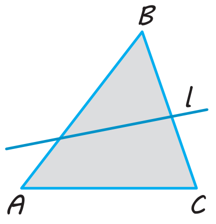


Рис. 1.18

III. АКСІОМИ РУХУ

III_1. Рух ставить у відповідність точкам точки, прямим — прямі, площинам — площини, зберігаючи належність точок прямим і площинам.

III_2. Два послідовних рухи дають знову рух, і для всякого руху є обернений рух.

III$_3$. Якщо дано точки A, B і півплощини α та β, що обмежені продовженими півпрямими a, b, які виходять із точок A, B (рис. 1.19), то існує рух, і до того ж єдиний, який переводить точку A, півпряму a, півплощину α, відповідно в точку B, пряму b, півплощину β (півпряма і півплощина легко означаються на основі понять належності та порядку).

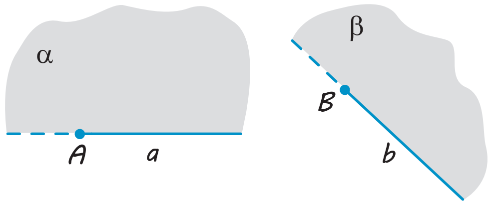


Рис. 1.19

IV. АКСІОМИ НЕПЕРЕРВНОСТІ

IV$_1$. (*Аксіома Архімеда*) Будь-який відрізок AB можна перекрити меншим відрізком AA_1, відкладаючи його на AB достатнє число разів: $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_nA_{n+1}$ (рис. 1.20); відкладання відрізка здійснюється рухом.

Рис. 1.20

IV$_2$. (*Аксіома Кантора*) Для послідовності вкладених відрізків A_nB_n (рис. 1.21), довжини яких прямують до нуля, існує, і до того ж єдина, точка C, що належить усім відрізкам A_nB_n.

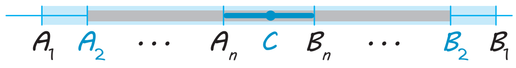


Рис. 1.21

V. АКСІОМА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ

V$_1$. Через дану точку поза даною прямою можна провести на площині не більш як одну пряму, що не перетинає дану, тобто не більш як одну пряму, паралельну даній.

У наведеній системі аксіом III група містить аксіоми руху, які запропонував на початку XX ст. німецький математик Ф. Шур. Д. Гільберт до числа основних понять замість руху ввів поняття «конгруентність». Відповідно до цього в системі аксіом Гільберта III група містить п’ять аксіом конгруентності фігур.

За допомогою основних визначають решту понять евклідової геометрії. Усі твердження про властивості геометричних фігур, що їх не містять аксіоми, повинні бути доведені суто логічним виведенням із цих аксіом. Наведена система аксіом евклідової геометрії має властивості повноти і несуперечності.

Якщо в аксіоматиці евклідової геометрії замінити аксіому паралельності (*через дану точку поза даною прямою можна провести на площині не більш як одну пряму, що не перетинає дану, тобто паралельну даній*) на твердження, що *через точку, яка не лежить на даній прямій, проходять хоча б дві прямі, що лежать з даною в одній площині і не перетинають її*, то одержимо іншу систему аксіом. Це система аксіом геометрії Лобачевського, що є теж несуперечливою. У ній аксіома паралельності не залежить від решти аксіом евклідової геометрії.

Здавалося б, нова аксіома суперечить звичайним уявленням. Проте за належного розуміння і ця аксіома, і вся геометрія Лобачевського мають цілком реальний сенс. Її створив і розвинув визначний учений М. І. Лобачевський, який уперше повідомив про неї в 1826 р. Дещо пізніше з тією ж теорією виступив угорський учений Я. Больяї, тому геометрію Лобачевського називають іноді геометрією Лобачевського — Больяї. Її називають також неевклідовою геометрією, хоча термін «неевклідова геометрія» має ширше значення, включаючи й інші теорії, що виникли слідом за геометрією Лобачевського і засновані також на зміні аксіом евклідової геометрії.

Як уже відзначалося, у зв’язку з аксіоматичною побудовою геометрії природно виникають три питання:

1. Чи є не суперечливою прийнята нами система аксіом, тобто чи не можуть із неї бути виведені шляхом логічних міркувань два наслідки, які суперечать один одному?
2. Чи є повною система аксіом, тобто чи не можна її поповнити новими аксіомами, які не суперечили б уже прийнятим і не випливали б із них?
3. Чи є незалежними прийняті аксіоми, тобто чи не випливають деякі аксіоми з інших?

Розв’язання цих питань тісно пов’язане з побудовою реалізацій системи аксіом. Реалізація полягає в указанні об’єктів трьох видів довільної природи, що умовно називають «точками», «прямими» і «площинами». Відношення між ними умовно називають такими словами, як «належить», «лежить між», «рух», для яких у силу їх конкретного змісту виконуються аксіоми.

Річ у тім, що основні поняття геометрії не означають і все, що нам про них відомо, виражається аксіомами. Тому наші висновки відносяться до об’єктів довільної природи, аби тільки для них і відношень між ними виконувалися аксіоми.

Доведення несуперечності системи аксіом зводиться до доведення існування хоча б однієї її реалізації. Доведення незалежності даної аксіоми зводиться до вказівки такої реалізації, у якій виконуються всі аксіоми, окрім цієї. Нарешті, доведення повноти системи аксіом зводиться до доведення того, що для всіх реалізацій можна встановити таку взаємно однозначну відповідність між точками, прямими і площинами, при якій відповідні елементи перебувають в однакових відношеннях.

Наприклад, для геометрії Лобачевського на площині може бути запропонована така реалізація всередині круга на звичайній (евклідовій) площині.

Внутрішню частину якогось круга (тобто круг за винятком кола, що його обмежує) назвемо «площиною». Точкою «площини» буде точка всередині круга (рис. 1.22).

«Прямою» назвемо будь-яку хорду з вилученими кінцями (оскільки коло круга вилучене з «площини»); «рухом» назвемо будь-яке перетворення круга в себе, яке переводить хорди в хорди.

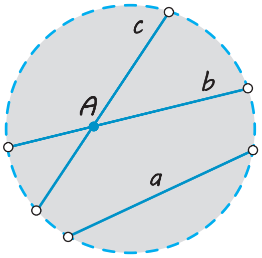


Рис. 1.22

Рівними назвемо відповідно фігури всередині круга, що переводяться одна в іншу такими перетвореннями.

Тоді будь-який геометричний факт, описаний такою мовою, є теоремою або аксіомою геометрії Лобачевського.

Іншими словами, усяке твердження геометрії Лобачевського на площині є не що інше, як твердження евклідової геометрії, що відноситься до фігур усередині круга, лише переформульоване в указаних термінах. Евклідова аксіома про паралельні прямі тут явно не виконується, оскільки через точку *A*, яка не лежить на даній хорді *a* (тобто на «прямій» *a*), проходить скільки завгодно хорд («прямих»), які її не перетинають.

Аналогічно реалізацією геометрії Лобачевського в просторі може бути геометрія всередині кулі, виражена у відповідних термінах («прямі» — хорди, «площини» — плоскі перерізи внутрішньої частини кулі, «рівні» фігури — такі, які переводяться одна в іншу перетвореннями, що переводять кулю в себе і хорди в хорди).

Таким чином, геометрія Лобачевського має абсолютно реальний сенс і така ж несуперечлива, як і геометрія Евкліда.

§ 2 МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Таблиця 3

1. Методи розв’язування геометричних задач

Геометричні методи	**Аналітичні методи**
Використання «ключового» трикутника, рівності та подібності трикутників, властивостей геометричних фігур	Уведення невідомих відрізків та кутів і використання рівнянь та їх систем чи властивостей функцій
Метод геометричних перетворень (симетрія відносно осі та точки, паралельне перенесення, поворот, подібність фігур)	Метод площ
	Координатний метод
	Векторний метод

2. Введення невідомих для розв’язування геометричних задач на обчислення

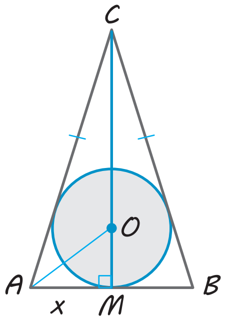
Орієнтир

Якщо в умові геометричної задачі на обчислення взагалі не дано відрізки або дані відрізки та кути не можна об’єднати в зручний для розв’язування задачі трикутник, то зазвичай вводять невідомий відрізок (або невідомий кут, або кілька невідомих).

Приклад

У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, дорівнює 25 см. Обчисліть площу цього трикутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює 10 см.

Продовження табл. 3

План	Розв'язання
1. *Позначимо якоюсь буквою, наприклад x, невідомий відрізок* (або кут, або кілька невідомих).	Нехай у рівнобедреному трикутнику ABC $(AC=CB)$ медіана $CM=25$ см (яка є і бісектрисою, і висотою) та радіус вписаного кола $OM=10$ см. Ці відрізки не є сторонами одного трикутника. Тому для розв'язування задачі виберемо якийсь відрізок як невідомий. Необхідно, щоб вибраний відрізок разом із даними відрізками утворював зручні для розв'язування трикутники. Нехай $AM=x$, де $x>0$. Цей відрізок можна об'єднати в прямокутні трикутники і з медіаною CM, і з радіусом OM. 
2. *Спробуємо скласти рівняння* (чи систему рівнянь) *з уведеним невідомим.*	Із $\triangle AMC$: $AC=\sqrt{AM^2+CM^2}=\sqrt{x^2+25^2}=\sqrt{x^2+625}$. Щоб скласти рівняння, скористаємось тим, що центр вписаного кола лежить у точці перетину бісектрис: AO — бісектриса кута BAC. Тоді AO є також і бісектрисою $\triangle AMC$. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника (див. п. 3 табл. 3) $\frac{AC}{AM}=\frac{CO}{OM}$, тобто $\frac{\sqrt{x^2+625}}{x}=\frac{15}{10}$.
3. *Розв'язуємо одержане рівняння* (чи систему рівнянь) або перетворюємо його (її) таким чином, щоб отримати відповідь на запитання задачі. *З одержаних розв'язків вибираємо ті, які задовольняють умову геометричної задачі.*	Піднесемо обидві частини одержаного рівняння до квадрата та розв'яжемо останнє рівняння. Отримуємо: $x^2=500$. Звідси $x=\sqrt{500}=10\sqrt{5}$. (Оскільки $x>0$, то другий корінь одержаного рівняння $x=-\sqrt{500}=-10\sqrt{5}$ не задовольняє умову задачі і його не записують до розв'язання.)
4. *Користуючись знайденою величиною, даємо відповідь на запитання задачі.*	Тоді $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CM=AM\cdot CM=25x=250\sqrt{5}$ (см^2). *Відповідь:* $250\sqrt{5}$ см^2.

Закінчення табл. 3

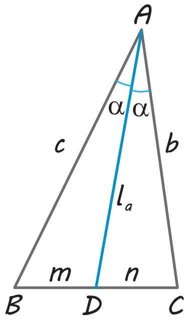
3. Використання методу площ для розв'язування геометричних задач

Зміст деяких прийомів розв'язування задач за допомогою методу площ

- *Розбити даний многокутник на частини і записати окремо площу всього многокутника і окремо суму площ його частин та прирівняти одержані величини.*
- *Щоб знайти відношення відрізків, розміщених на одній прямій, іноді буває корисним замінити відношення відрізків відношенням площ трикутників зі спільною вершиною, основами яких є розглядувані відрізки.*

Приклад

Доведіть, що **бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, довжини яких пропорційні довжинам прилеглих сторін трикутника.**

План	Коментар
Щоб знайти відношення відрізків BD і DC, спробуємо знайти відношення площ трикутників ABD і ACD зі спільною вершиною A, основами яких є дані відрізки (тоді, і висота цих трикутників, проведена з вершини A, буде спільною).	Нехай $AD = l_a$ — бісектриса трикутника ABC зі сторонами $AB = c$, $AC = b$ і $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, $BD = m$, $DC = n$. Тоді, з одного боку: $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}cl_a \sin\alpha$, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}bl_a \sin\alpha$ і $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}cl_a \sin\alpha}{\frac{1}{2}bl_a \sin\alpha} = \frac{c}{b}$. (1)  З іншого боку: $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}mh_a$, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}nh_a$ і $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}mh_a}{\frac{1}{2}nh_a} = \frac{m}{n}$. (2) Прирівнюючи праві частини виразів (1) і (2), одержуємо $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$, що і потрібно було довести.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

У курсі планіметрії 7–9 класів ви розглянули значну кількість геометричних задач та їх розв'язань різними методами. Дамо короткий огляд розглянутих типів задач та методів їх розв'язування, оскільки вони застосовуються і в стереометрії. Так, розв'язування значної кількості стереометричних задач можна звести до розв'язування кількох планіметричних задач у різних площинах.

За вимогою геометричні задачі можна поділити на такі типи: *на доведення, на обчислення, на побудову, на дослідження*. Задачі кожного із цих типів розв'язують різними методами, які умовно поділяють на *геометричні* та *аналітичні* (див. п. 1 табл. 3).

Нагадаємо, що значна частина теорем курсу планіметрії відносилася до геометрії трикутника. Це не випадково, оскільки розв'язування багатьох задач зводиться до розгляду одного чи декількох трикутників. Тому, говорячи про геометричні методи розв'язування планіметричних задач, можна умовно виділити метод «ключового» трикутника. За цим методом у даній фігурі потрібно знайти трикутник (або декілька трикутників), до дослідження якого (яких) зводиться розв'язування задачі. Інколи з цією метою спочатку слід виконати якусь додаткову побудову, наприклад у чотирикутнику провести діагональ.

Деякі з часто використовуваних додаткових побудов корисно пам'ятати. Зокрема, *якщо в умові задачі фігурує медіана трикутника, то буває зручним продовжити цю медіану за сторону на таку саму відстань і доповнити рисунок до паралелограма*. Наприклад, у трикутнику ABC зі сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (рис. 2.1) продовжимо медіану AM за сторону BC на відстань $MD = AM = m_a$ та з'єднаємо відрізками точку D з точками B і C. Тоді отримаємо паралелограм $ABDC$, оскільки його діагоналі в точці перетину діляться навпіл (див. «Систему опорних фактів курсу планіметрії», табл. 7). Але *сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін*:

$$AD^2 + BC^2 = 2\left(AC^2 + AB^2\right), \text{ або } \left(2m_a\right)^2 + a^2 = 2\left(b^2 + c^2\right).$$

Звідси

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

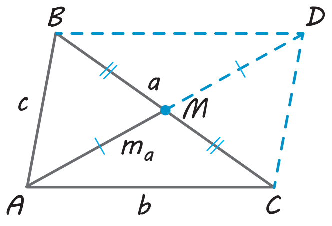
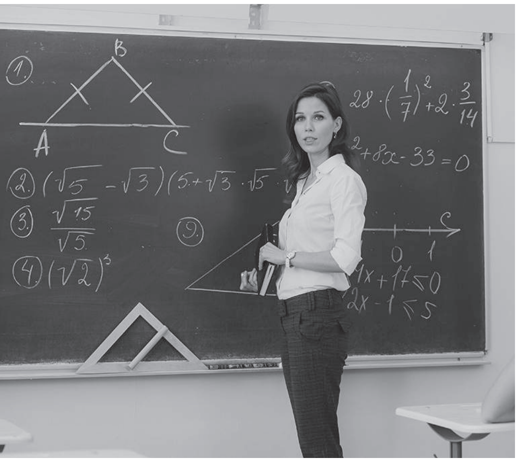


Рис. 2.1

«Систему опорних фактів курсу планіметрії» наведено в інтернет-підтримці підручника

Іноді додаткові побудови здійснюють, використовуючи певні геометричні перетворення (див. «Систему опорних фактів курсу планіметрії», табл. 5). Наприклад, *розв'язуючи задачі, пов'язані з трапецією, часто буває зручним використати паралельне перенесення її бічної сторони або діагоналі* (див. «Систему опорних фактів курсу планіметрії», табл. 10, друга і третя додаткові побудови).



Розв'язуючи геометричні задачі на доведення, слід пам'ятати, що твердження деяких з них доводять *методом від супротивного*. Нагадаємо його зміст:

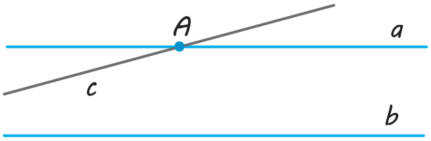
1. *Робимо припущення, протилежне тому, що потрібно довести.*
2. *Спираючись на аксіоми та теореми, отримуємо з припущення наслідок, який суперечить умові або відомій властивості.*
3. *Робимо висновок, що наше припущення є неправильним, а правильним є твердження, яке потрібно довести.*

Використовуючи метод доведення від супротивного зазвичай рисунок виконують до тієї геометричної ситуації, яка випливає з припущення.

Наприклад, розв'язування задачі «Доведіть, що на площині *пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає і другу пряму*» може бути таким.

● *Доведення*

1) Нехай прямі a і b паралельні. Припустимо, що пряма c, яка перетинає пряму a в точці A, не перетинає пряму b (рис. 2.2).



◆ Рис. 2.2

2) Отже, пряма c паралельна прямій b. Але тоді через точку A проходять дві прямі a і c, паралельні прямій b, що суперечить аксіомі паралельних прямих.
3) Таким чином, наше припущення є неправильним, і пряма c обов'язково перетне й пряму b. ○

Приступаючи до розв'язування геометричної задачі, слід ураховувати, що майже кожна геометрична задача потребує індивідуального підходу, винахідливості та інтуїції. Проте можна дати деякі загальні рекомендації, що будуть корисними під час розв'язування багатьох задач.

Розв'язування практично будь-якої геометричної задачі ***починають з рисунка***.

Він повинен бути досить лаконічним. *Слід зображати лише «функціонуючі» частини геометричних фігур*. Так, наприклад, якщо в задачі розглядають радіус описаного кола, то часто можна не зображати коло (а зобразити тільки його центр і радіус). Але якщо в умові задачі йдеться про точку кола, то його зображення може бути корисним для розв'язання. *Необхідно уникати надмірного ускладнення рисунка*. Для цього можна, наприклад, виконати виносні рисунки, що зображають фрагменти даної конфігурації. З іншого боку, корисно безпосередньо на рисунку вказувати числові чи буквені значення лінійних або кутових величин. Зазначимо, що є такі задачі, у процесі розв'язування яких доводиться уточнювати особливості конфігурації, яка розглядається, та переробляти початковий рисунок таким чином, що остаточного вигляду він набуває лише одночасно із закінченням розв'язування.

Розв'язуючи геометричну задачу, ***треба спиратися не лише на рисунок***. Він може «підказати», що якісь точки лежать на одній прямій чи на одному колі. Проте в процесі розв'язування ці особливості розміщення точок повинні бути обґрунтовані без посилань на рисунок. Інколи рисунок може стати причиною неповного розв'язування задачі, оскільки ті співвідношення, які виконані на ньому і здаються очевидними, насправді потребують спеціального обґрунтування. Тому завжди намагайтеся зобразити всі можливі конфігурації, а потім за допомогою міркувань відкинути зайві (якщо ці зайві дійсно є). Нагадаємо, що додаткові побудови на початковому рисунку, якими вводять нові відрізки та кути, іноді полегшують розв'язування задачі.

У задачах на обчислення має сенс спочатку, ***не проводячи обчислень, визначити, які взагалі відрізки та кути можна знайти***, виходячи з даних величин. Як тільки до цього переліку потрапить потрібний відрізок чи кут, можна легко скласти ланцюжок послідовних обчислень, що приведе до визначення шуканої величини. Іноді такий «прямий пошук» корисно доповнити пошуком плану розв'язування задачі «від шуканого», тобто виходячи з вимоги задачі (наприклад, «щоб знайти площу вписаного круга, достатньо знайти його радіус»).

Проте ці способи не завжди вдається застосувати. У таких випадках дуже часто допомагає алгебраїчний метод розв'язування геометричних задач на обчислення, пов'язаний із введенням невідомих і складанням рівняння або системи рівнянь. У п. 2 табл. 3 наведено орієнтир, який дає змогу розпізнавати ситуації, коли потрібно вводити невідомі відрізки та кути, а також приклад відповідного розв'язання. Використовуючи цей метод *для складання рівняння до задачі, часто поряд із вираженням даних елементів через невідомі зручно величину якогось елемента з розглядуваної конфігурації виразити двічі через введені невідомі*. Крім того, не завжди, *склавши рівняння чи систему рівнянь до геометричної задачі, доцільно прагнути повністю їх розв'язати. З одержаного рівняння чи системи, насамперед, слід знаходити ті невідомі (чи їх комбінацію), які дозволять дати відповідь на запитання задачі* (див. розв'язання задачі 2 до цього параграфа).

У табл. 3 (п. 3) показано можливість використання методу площ для розв'язування планіметричних задач.

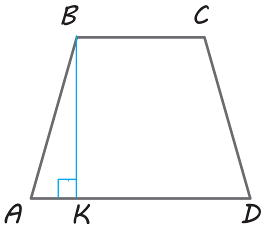
Зміст та приклади застосування координатного та векторного методів для розв'язування геометричних задач дивіться в інтернет-підтримці підручника

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

У рівнобічній трапеції висота дорівнює 8 см, основи — 21 см і 9 см. Знайдіть радіус описаного навколо трапеції кола.

Зауваження. Приступаючи до розв'язування геометричної задачі, доцільно виконати відповідний *рисунок* і навести *короткий запис умови*, який дозволить пов'язати рисунок і позначення точок на ньому з величинами і співвідношеннями, заданими в умові.



Дано: $ABCD$ — трапеція; $AD \parallel BC$; $AB = CD$; $AD = 21$ см, $BC = 9$ см, $BK = 8$ см $(BK \perp AD)$.

Знайти: R — радіус описаного кола.

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай у трапеції $ABCD$ (рис. 2.3) $AB = CD$, $AD = 21$ см, $BC = 9$ см, $BK = 8$ см $(BK \perp AD)$. Якщо коло проходить через чотири точки A, B, C, D, то воно також проходить через будь-які три з цих точок і тому збігається з колом, описаним навколо трикутника ABD.	Спробуємо виділити «ключовий» трикутник для розв'язування задачі. Для цього проведемо діагональ BD трапеції і згадаємо, що коло, яке проходить через вершини трикутника ABD, є описаним навколо трикутника.

Знайдемо радіус кола, описаного навколо трикутника ABD. Якщо CM — друга висота даної рівнобічної трапеції, то, ураховуючи рівність прямокутних трикутників ABK та DCM і те, що $AD \parallel BC$ і $BCMK$ — прямокутник, одержуємо:

$$AK = MD = \frac{21-9}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

Тоді з $\triangle ABK$: $AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = 10$ (см).

Із прямокутного трикутника BKD:

$$BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 17 \text{ (см)}.$$

Таким чином, радіус кола, описаного навколо трикутника ABD (отже, і навколо трапеції $ABCD$), дорівнює:

$$R = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4S_{\triangle ABD}} = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot BK} = 10{,}625 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 10,625 см. ◁

Обчислити його радіус можна за кількома формулами (див. «Систему опорних фактів курсу планіметрії», табл. 11), зокрема:

$$R = \frac{a}{2\sin A} \quad \text{та} \quad R = \frac{abc}{4S_\triangle}.$$

З цих формул вибираємо ту, для якої легко знайти всі величини, що входять до її запису: $R = \frac{abc}{4S_\triangle}$. (Одну сторону трикутника ABD дано за умовою, а дві інші легко визначити з відповідних прямокутних трикутників.)

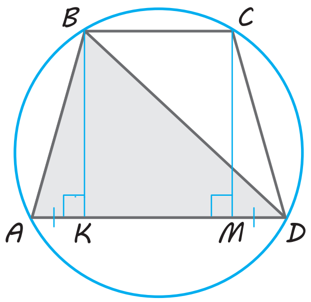


Рис. 2.3

Задача 2

Периметр прямокутного трикутника дорівнює 24 см, а його площа — 24 см². Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

Дано: $\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$; $P = 24$ см, $S = 24$ см².

Знайти: R —радіус описаного кола.

Розв'язання

▶ Нехай у прямокутному трикутнику ABC (рис. 2.4) $\angle C = 90°$, $P = 24$ см, $S = 24$ см². Позначимо $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ $(a > 0$, $b > 0$, $c > 0)$.

Записуючи дані периметр і площу та теорему Піфагора, одержуємо систему

$$\begin{cases} a + b + c = 24, \\ \frac{1}{2}ab = 24, \\ a^2 + b^2 = c^2. \end{cases}$$

З першого рівняння $a + b = 24 - c$. Тоді

$$(a+b)^2 = (24-c)^2,$$

або

$$a^2 + b^2 + 2ab = 24^2 - 48c + c^2.$$

Коментар

Оскільки *в умові цієї геометричної задачі на обчислення не дано жодного відрізка, для розв'язування такої задачі доведеться ввести невідомий відрізок* (або декілька невідомих відрізків). Щоб записати периметр трикутника, потрібно мати всі його сторони, тому введемо як невідомі всі сторони трикутника: *a*, *b*, *c*. Для складання рівнянь використаємо теорему Піфагора та дані периметр і площу (записавши їх через невідомі).

Оскільки *в прямокутному трикутнику радіус описаного кола дорівнює половині гіпотенузи* (див. «Систему опорних фактів курсу планіметрії», табл. 11), то, щоб одержати відповідь, достатньо знайти із системи рівнянь гіпотенузу *c*, а для цього з першого рівняння системи знайти суму $a + b$, піднести її до квадрата і використати друге та третє рівняння.

Підставляючи в цю рівність із другого рівняння $ab=48$ і з третього рівняння $a^2+b^2=c^2$, одержуємо:

$$c^2+96=576-48c+c^2,$$

звідки $c=10$ (см). Оскільки радіус описаного кола прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то $R=5$ см.
Відповідь: 5 см. ◁

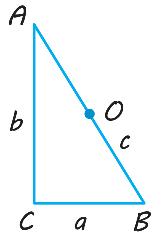


Рис. 2.4

Запитання

1. У яких випадках для розв'язування геометричної задачі на обчислення зручно вводити невідомі? Поясніть це на прикладі.
2. Поясніть, як можна використовувати метод площ для розв'язування геометричних задач. Наведіть приклад.

Вправи

2.1.° У табл. 4 «Системи опорних фактів курсу планіметрії» (див. інтернет-підтримку підручника) символічно записано наслідки з теореми косинусів. Сформулюйте ці наслідки словесно.

2.2° Визначте вид (за кутами) трикутника зі сторонами 6 см, 8 см і 11 см.

2.3° Дано два рівнобедрених трикутники зі спільною основою. Доведіть, що їхні медіани, проведені до основи, лежать на одній прямій.

2.4. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 12, а кут, протилежний до основи, — 120°. Знайдіть висоти трикутника.

2.5° У рівнобедреному трикутнику основа і висота, проведена до основи, дорівнюють 4 см. Знайдіть площу круга, описаного навколо цього трикутника.

2.6. У прямокутному трикутнику висота, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 9 і 16. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.

2.7. У трикутнику ABC зі сторонами 4 і 6 та кутом між ними 120° знайдіть довжину медіани, проведеної з вершини тупого кута.

2.8. У трикутнику ABC зі сторонами a і b медіани, проведені до цих сторін, взаємно перпендикулярні. Знайдіть довжину третьої сторони трикутника.

2.9° Діагональ ромба завдовжки 10 см дорівнює його стороні. Знайдіть другу діагональ і кути ромба.

2.10. У паралелограмі $ABCD$ проведено бісектрису кута A, яка перетинає сторону BC в точці K. Знайдіть довжину відрізка BK, якщо $DC=10$ см.

2.11. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 5 см і 12 см. Знайдіть катети трикутника.

2.12. У трапеції паралельні сторони дорівнюють 25 см і 4 см, а бічні сторони — 20 см і 13 см. Знайдіть площу трапеції.

2.13. Навколо кола описано рівнобічну трапецію, бічна сторона якої ділиться точкою дотику на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть площу трапеції.

2.14. У рівнобічну трапецію з бічною стороною 17 см вписано коло, діаметр якого 15 см. Знайдіть основи трапеції.

2.15.* У трапеції, основи якої дорівнюють a і b, через точку перетину діагоналей проведено пряму, паралельну основам. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, який відтинають бічні сторони трапеції.

2.16. Три кола попарно дотикаються зовнішнім чином. Знайдіть радіуси кіл, якщо відстані між їхніми центрами дорівнюють 5 см, 7 см і 8 см.

2.17. У трикутнику ABC зі сторонами $AC = 10$ см, $CB = 20$ см і кутом ACB, що дорівнює $135°$, проведено медіану CD. Знайдіть площу трикутника ACD.

2.18. У трапеції $ABCD$ $(BD \parallel AD)$ діагоналі перетинаються в точці O. Доведіть, що площі трикутників ABO і COD дорівнюють одна одній (тобто ці трикутники рівновеликі).

2.19. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, висота якої дорівнює 10 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні.

2.20.* Доведіть, що сума відстаней від точки, узятої всередині правильного трикутника, до його сторін дорівнює висоті цього трикутника.

2.21. У трикутнику ABC кут A прямий, кут B дорівнює $30°$. У трикутник вписано коло, радіус якого дорівнює $\sqrt{3}$. Знайдіть відстань від вершини C до точки N дотику цього кола до катета AB.

2.22. Середня лінія трапеції дорівнює 10 і ділить площу трапеції у відношенні 3 : 5. Знайдіть довжини основ цієї трапеції.

2.23. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 42 і 18, а висота — 16. Знайдіть довжину описаного навколо трапеції кола.

2.24. У трапеції $ABCD$ з основами AB і CD діагоналі перетинаються в точці E. Знайдіть площу трикутника BCE, якщо $AB = 30$, $DC = 24$, $AD = 3$ і $\angle DAB = 60°$.

2.25. У трапецію $ABCD$ з основами AD і BC вписано коло з центром в точці O. Знайдіть площу трапеції, якщо $\angle DAB = 90°$, $OC = 2$ і $OD = 4$.

2.26. Одна з діагоналей паралелограма розбиває його на два рівносторонніх трикутники зі стороною a. Знайдіть довжину другої діагоналі.

2.27. Знайдіть площу паралелограма, якщо його діагоналі дорівнюють 3 і 5, а гострий кут — $60°$.

2.28. Висота ромба дорівнює 12, а одна з його діагоналей — 15. Знайдіть площу ромба.

2.29. На площині розміщено квадрат $ABCD$ і точку O. Відомо, що $OB = OD = 13$, $OC = 5\sqrt{2}$ і площа квадрата більша за 225. Знайдіть сторону квадрата і з'ясуйте, де розміщена точка O — усередині чи зовні квадрата.

2.30. Квадрат зі стороною 3 см зрізали по кутах так, що утворився правильний восьмикутник. Знайдіть сторону восьмикутника.

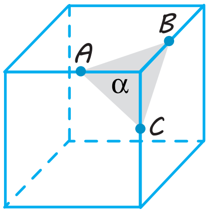
Виявіть свою компетентність

2.31. Самостійно опрацюйте застосування координатного та векторного методів розв'язування геометричних задач (див. інтернет-підтримку підручника). Обговоріть з друзями та подругами, як оцінити доцільність використання того чи іншого методу для розв'язування певної задачі.

§ 3 НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ

Таблиця 4

Переріз многогранника площиною

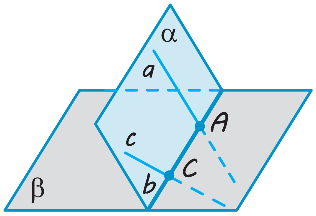
Означення і зміст побудови	Приклад
Перерізом многогранника **площиною називається многокутник, який є спільною частиною многогранника і цієї площини.** *Для побудови перерізу достатньо побудувати відрізки перетину січної площини з відповідними гранями многогранника,* а для цього потрібно побудувати точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (або з їх продовженнями).	 Перерізом куба площиною α, яка проходить через точки A, B, C на ребрах куба, що виходять з однієї вершини, є трикутник ABC.

Побудова перерізів методом слідів

Основні поняття

Якщо площина α перетинає площину β по прямій b, то пряму b називають *слідом площини* α на площині β.

Для того щоб отримати слід площини α на площині β (тобто пряму b), достатньо знайти точки перетину двох прямих площини α з площиною β.



Приклад

Побудуйте переріз призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через точки K, M, N, де $M \in AA_1$, $N \in AC$ і точка K лежить у грані AA_1B_1B.

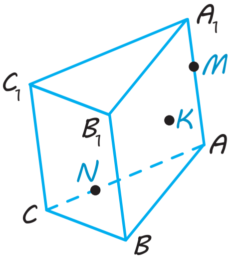
Розв'язання

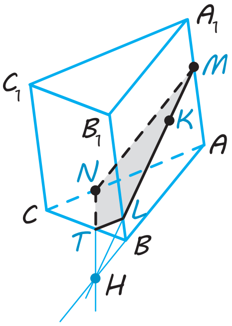
▶ 1. Розглянемо допоміжну площину AA_1B_1B. Слід цієї площини на площині основи — пряма AB.

2. У допоміжній площині розглянемо пряму MK, яка лежить у площині перерізу. Точка її перетину з площиною ABC лежить на прямій AB — це точка H (а точка перетину з ребром BB_1 — точка L).

3. Тоді точка H лежить і в площині перерізу, і в площині ABC. За умовою точка N теж лежить і в площині перерізу, і в площині ABC. Отже, площина перерізу перетинає площину основи по прямій HN (слід січної площини на площині ABC), яка перетинається з прямою BC у точці T.

4. Сполучаючи відрізками точки перетину січної площини з ребрами призми, одержуємо чотирикутник $MNTL$ — шуканий переріз. ◁



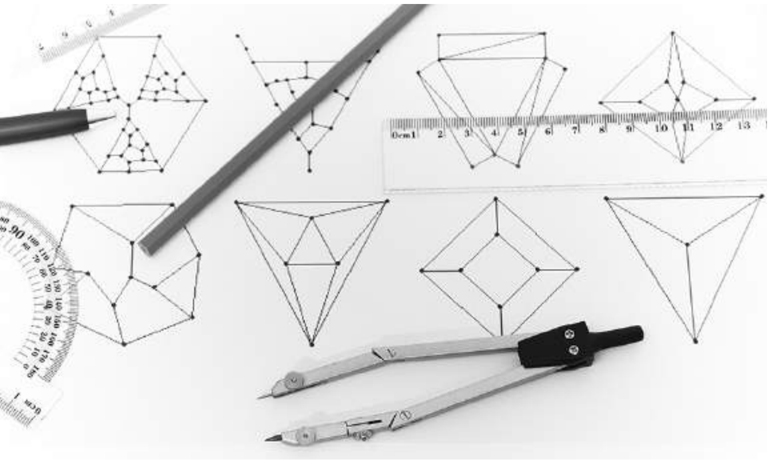


ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Зміст задач на побудову в стереометрії

У планіметрії задачі на побудову найчастіше розв'язували з використанням циркуля і лінійки. За їхньою допомогою можна будувати відповідні фігури площини (прямі, кола, трикутники тощо). Але не існують креслярські інструменти, які дозволяли б у просторі будувати неплоскі фігури. З цієї причини завдання на побудову в стереометрії за своїм змістом суттєво відрізняються від конструктивних завдань планіметрії. Стереометричні побудови виконують, насамперед, подумки. Це здебільшого завдання на доведення існування фігури, що задовольняє дані умови. Таке доведення повинно спиратися на відповідні аксіоми та властивості стереометричних фігур.

Задачі на побудову в стереометрії можна умовно поділити на дві групи: задачі на *уявлювані побудови* (наприклад, провести площину через пряму і точку поза нею) і задачі на зображеннях просторових тіл — так звані задачі *на проекційному рисунку*. Розв'язування стереометричних задач на побудову зазвичай супроводжують рисунками. Існує два принципово різних типи таких рисунків. Для задач на уявлювані побудови це зазвичай ескізний рисунок, що ілюструє основні етапи побудови. Під час його виконання допускається певна довільність, якщо вона не приводить до суперечностей з умовою задачі (це, наприклад, рис. 1.3, 1.5–1.10, 1.15–1.16). Другий тип рисунка до задачі — це плоске зображення на проекційному рисунку, виконане з урахуванням властивостей паралельного проектування*. Побудови на проекційному рисунку однозначно відповідають просторовим побудовам зображуваної фігури в оригіналі.



2 Задачі на побудову перерізів многогранників. Метод слідів

Під час розв'язування деяких стереометричних задач, пов'язаних із многогранником, доводиться будувати фігуру, що є перетином многогранника з площиною. Якщо такою фігурою є многокутник, то його називають перерізом** многогранника. Інакше кажучи,

***перерізом многогранника площиною* називається многокутник, який є спільною частиною многогранника і площини.**

Цю площину ще називають січною площиною. У таких задачах зазвичай дано многогранник (тобто зображення многогранника) і потрібно побудувати переріз (тобто зображення перерізу) площиною, яка задана певним чином, найчастіше трьома точками. Для побудови перерізу достатньо побудувати відрізки перетину січної площини з відповідними гранями многогранника. Для цього потрібно побудувати точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (або з їх продовженнями).

Наприклад, дано зображення куба і три точки A, B, C, які належать ребрам, що виходять з однієї вершини (рис. 3.1). Для побудови перерізу куба площиною α, яка проходить через ці точки, достатньо сполучити їх відрізками.

---

[*] Властивості паралельного проектування буде розглянуто в § 7.

[**] Детальніше побудову перерізів многогранників див. у § 8.

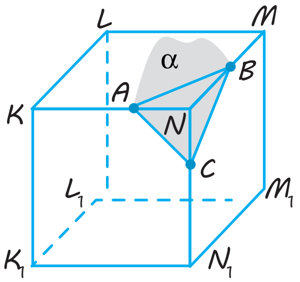


Рис. 3.1

Дійсно, площина α має з площиною KNN_1K_1 передньої грані куба дві спільні точки A і C. Отже, AC — пряма перетину цих площин, а значить, площина α перетинає передню грань — квадрат KNN_1K_1 по відрізку AC. Аналогічно дана площина α перетинає верхню грань по відрізку AB, а бічну грань — по відрізку BC. Отже, трикутник ABC і є шуканим зображенням перерізу куба.

У складніших випадках для побудови перерізу многогранника часто буває зручним побудувати спочатку *пряму перетину січної площини з площиною якоїсь грані* (так званий *«слід» січної площини на цій грані*), а потім знайти точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (чи з їх продовженнями). Іноді доводиться розглядати певні допоміжні площини, на яких також будують слід січної площини (або слід допоміжної площини на площині якоїсь грані). Цей метод побудови перерізів називають *методом слідів*.

? Як ви вважаєте, які аксіоми стереометрії покладені в основу методу слідів?

Для того щоб отримати слід площини α *на площині* β, *тобто пряму b (рис. 3.2), достатньо знайти точки перетину двох прямих площини* α *з площиною* β (оскільки дві точки, наприклад, A і C, однозначно визначають пряму b). Зазначимо також, *що точка перетину будь-якої прямої a площини* α *з площиною* β *завжди належить сліду площини* α *на площині* β (тобто прямій b).

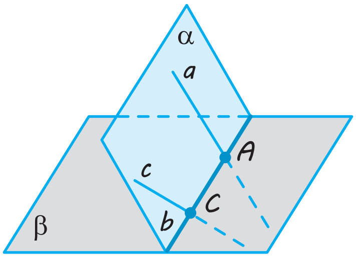


Рис. 3.2

Приклад застосування методу слідів для побудови перерізу призми наведено в табл. 4, а методу слідів і допоміжних площин для побудови перерізу піраміди — нижче.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Побудуйте переріз піраміди $ABCD$ площиною, що проходить через точки K, L, M (рис. 3.3, *а*), де $L \in AC$, а точки K і M лежать у гранях ABD і BCD відповідно.

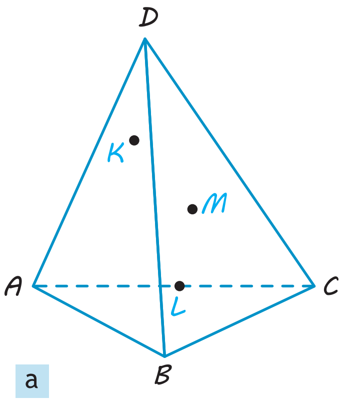


Рис. 3.3

Розв'язання*

▶ Відразу побудувати «слід» площини перерізу на якійсь із граней неможливо. Розглянемо допоміжну площину DKM. Спочатку знайдемо слід цієї площини на площині основи ABC. Для цього знайдемо точки перетину з площиною основи двох прямих DK і DM допоміжної площини.

---

* Коментар включено в запис розв'язання.

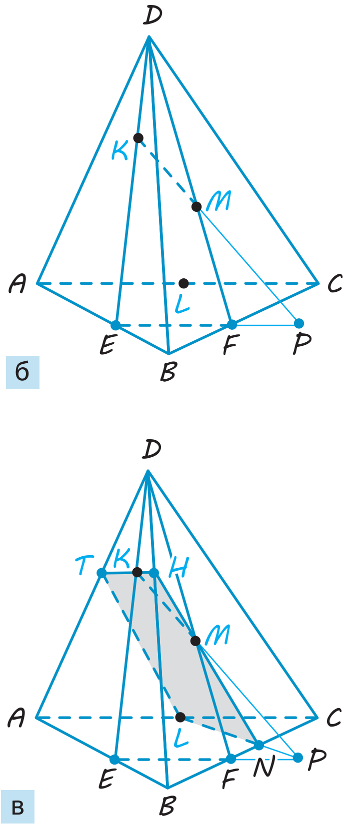


Рис. 3.3. Закінчення

Оскільки точка K лежить у площині ABD, то пряма DK перетинає пряму AB (а значить, і площину ABC) у деякій точці E (рис. 3.3, *б*). Аналогічно точка F перетину прямої DM із прямою BC є точкою перетину прямої DM із площиною основи. Отже, слід допоміжної площини на площині основи — це пряма EF.

Далі розглянемо в допоміжній площині DKM пряму KM. Оскільки точка перетину прямої KM із площиною основи лежить на прямій EF (на сліді допоміжної площини), знаходимо точку P перетину прямих KM і EF. Це і буде точка перетину прямої KM із площиною основи ABC.

Точка P лежить у площині перерізу і в площині ABC. Але в цих площинах лежить і точка L. Отже, площина перерізу перетинає площину основи по прямій LP (рис. 3.3, *в*), що перетинається з прямою BC в точці N. Тепер можемо послідовно знайти точки перетину площини перерізу з іншими ребрами піраміди. Точки N і M лежать у площині перерізу та в грані BCD. Тоді пряма NM перетинає ребро BD у точці H — це і буде наступна вершина многокутника перерізу. Аналогічно в площині ABD проводимо пряму HK, яка перетинає ребро AD у точці T, і сполучаємо відрізком точки T і L. Чотирикутник $LNHT$ — шуканий переріз. ◁

Запитання

1. Поясніть, що називають перерізом многогранника площиною. Якою фігурою є переріз многогранника?
2. Поясніть, що називають слідом площини α на площині β. Як можна одержати цей слід, маючи декілька прямих у площині α?
3. Поясніть на прикладі, як можна побудувати переріз многогранника методом слідів.

Вправи

3.1.° Користуючись зображенням куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, наведеним на рис. 3.4, назвіть:

1) точку перетину прямої MC $\left(M \in AA_1\right)$ із площиною B_1BC_1;

2) лінію перетину площин MC_1C і BCB_1.

3.2.° За зображенням піраміди, наведеним на рис. 3.5, назвіть:

1) точку перетину прямої MD $(M \in BD)$ і площини ABC;

2) лінію перетину площин MBC і BEC $(E \in AC)$.

3.3.° Нарисуйте в зошиті зображення куба, наведене на рис. 3.6, і побудуйте:

1) точку перетину прямої MH із площиною ABC;

2) лінію перетину площин MHC і ADC.

3.4.° Нарисуйте в зошиті зображення піраміди, наведене на рис. 3.7, і побудуйте:

1) точку перетину прямої MH із площиною ABC;

2) лінію перетину площин MHB і ABC.

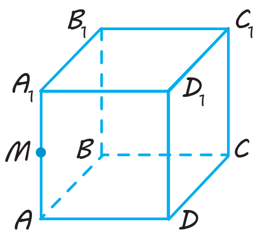


Рис. 3.4

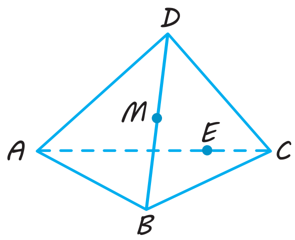


Рис. 3.5

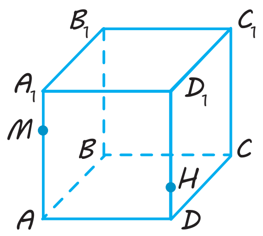


Рис. 3.6

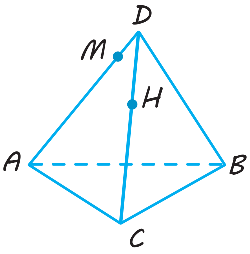


Рис. 3.7

3.5.° Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через:

1) точки A_1, B і C_1;

2) точки B, D і середину ребра CC_1.

3.6.° Побудуйте переріз піраміди $ABCD$ площиною, що проходить через:

1) точки C і D та середину ребра AB;

2) точку C та середини ребер AB і BD.

3.7.° Користуючись рис. 3.8, опишіть побудову перерізу трикутної піраміди $SKLM$ площиною, що проходить через точки A, B, C ($A \in KM$, $B \in SK$, $C \in SL$). Обґрунтуйте побудову, спираючись на відповідні аксіоми і теореми.

3.8. Чи може перерізом тетраедра $ABCD$ площиною бути чотирикутник $KLMN$, зображений на рис. 3.9?

3.9. Нарисуйте в зошиті зображення прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.10) і побудуйте:

1) точку перетину прямої D_1M із площиною основи $ABCD$ ($M \in CC_1$, і $CM = \frac{1}{2}CC_1$);

2) точку перетину прямої D_1K із площиною основи $ABCD$ ($K \in AA_1$ і $AK = \frac{1}{5}AA_1$);

3) слід площини D_1KM на площині основи $ABCD$;

4) переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки D_1, K і M.

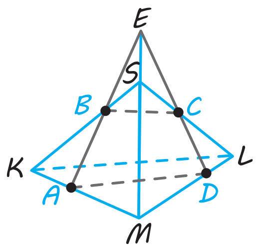


Рис. 3.8

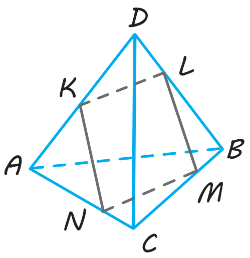


Рис. 3.9

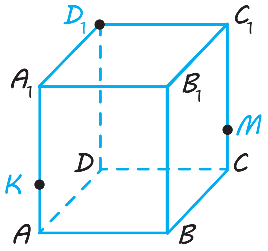


Рис. 3.10

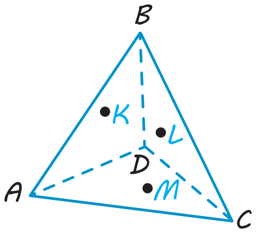


Рис. 3.11

3.10.* Нарисуйте в зошиті зображення піраміди $ABCD$ (рис. 3.11) і побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через точки K, L і M, які розташовані на гранях ABD, BCD і ACB відповідно.

3.11. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ із ребром a точка O — точка перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра DC; точка M лежить на промені BB_1, $B_1M = 2a$. Побудуйте переріз куба площиною OKM.

3.12. Побудуйте переріз піраміди $ABCD$ площиною, яка проходить через точки K, M, N, де K і M — середини ребер DC і BC, а N — точка ребра AB така, що $AN = \frac{1}{3}AB$.

3.13. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через середини M, N, K його ребер AD, DC, BB_1.

3.14. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через середини K, L, M його ребер AA_1, CC_1, DC.

3.15. На рис. 3.12–3.23 вказано точки M, P і R, які лежать або на ребрах, або на гранях куба. Побудуйте переріз куба площиною MRP для кожного із даних розміщень точок.

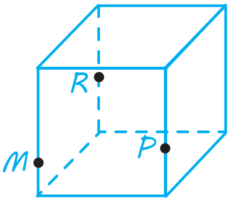


Рис. 3.12

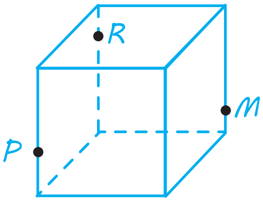


Рис. 3.13

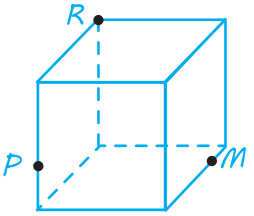


Рис. 3.14

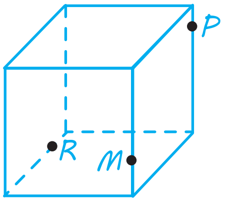


Рис. 3.15

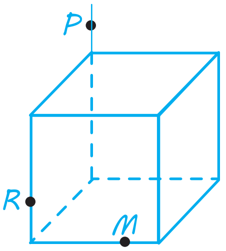


Рис. 3.16

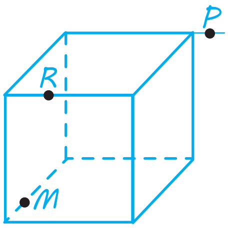


Рис. 3.17

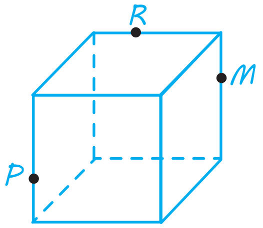


Рис. 3.18

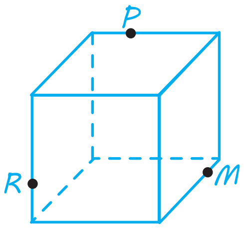


Рис. 3.19

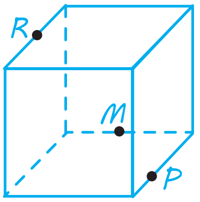
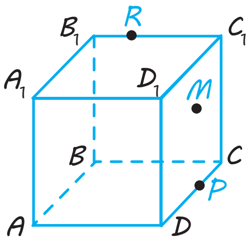
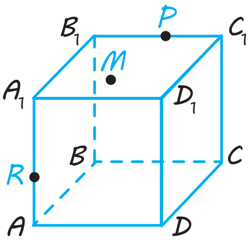


Рис. 3.20



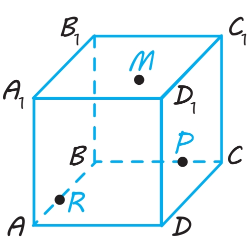
$M \in$ пл. BB_1C_1

Рис. 3.21



$M \in$ пл. $A_1B_1C_1$

Рис. 3.22



$M \in$ пл. $A_1B_1C_1$

Рис. 3.23

3.16.* Ребро правильного тетраедра $MABC$ дорівнює 18. Точки P і K є відповідно серединами ребер AM і BM, а точка T ділить ребро MC у відношенні $MT:TC=4:1$. Знайдіть відстань від вершини C до прямої перетину площин TPK і ABC.

3.17.* У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ довжина ребра дорівнює 4. Точка M належить ребру AA_1, $AM=3$, точка P належить ребру CC_1, $PC_1=1$, точка K ділить ребро DD_1 у відношенні 1 : 3, починаючи від точки D. Знайдіть відстань від вершини B до прямої перетину площин KMP і ADC.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 1

Пройдіть онлайн-тестування

1. Пряма a лежить у площині α. Який знак потрібно поставити замість зірочки в записі $a * \alpha$?

А $\in$ **Б** $\subset$ **В** $\supset$ **Г** $\cup$

2. Відомо, що площини α і β мають спільну точку. Скільки ще спільних точок мають ці площини?

А Тільки одну **Б** Тільки дві **В** Безліч **Г** Жодної

3. Скільки площин можна провести через дві точки?

А Тільки одну **Б** Тільки дві **В** Безліч **Г** Жодної

4. Шість точок не лежать в одній площині. Яка найбільша кількість цих точок може лежати на одній прямій?

А Три **Б** Чотири **В** П’ять **Г** Шість

5. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Серед даних прямих укажіть таку, яка не лежить у площині BCD.

А BC **Б** AD **В** CD **Г** BD

6. Пряма a перетинає площину α і лежить у площині β. Скільки спільних точок мають площини α і β?

А Тільки одну **Б** Тільки дві **В** Жодної **Г** Безліч

7. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Якщо діаметр кола належить площині, то всі точки кола належать цій площині.

II. Якщо три вершини паралелограма належать площині, то всі точки паралелограма належать цій площині.

III. Якщо пряма має спільну точку з кожною зі сторін AC і BC трикутника ABC, то вона лежить у площині цього трикутника.

IV. Якщо бісектриса трикутника та центр кола, вписаного в даний трикутник, належать площині, то всі точки трикутника належать цій площині.

А Усі твердження є правильними **В** Тільки II

Б Тільки II і III **Г** Тільки IV

8. Дано п'ять точок A, B, M, N і K. Площина α проходить через точки A і B, але не проходить через жодну з точок M, N і K. Серед даних точок укажіть таку, яка не може належати прямій AM.

А Точка B

Б Точка N

В Точка K

Г Будь-яка з даних точок може належати прямій AM

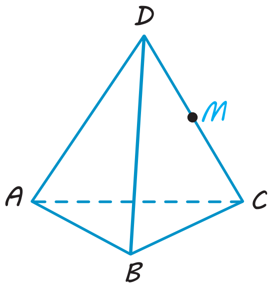


Рис. 1

9. На ребрі DC тетраедра $DABC$ позначили точку M (рис. 1). Укажіть пряму перетину площин AMB і ADC.

А AB **В** AC

Б CD **Г** AM

10. На рис. 2 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M належить ребру AA_1. Серед даних прямих укажіть таку, якій належить точка перетину прямої BM із площиною $A_1D_1C_1$.

А A_1C_1 **В** B_1C_1

Б A_1B_1 **Г** A_1D_1

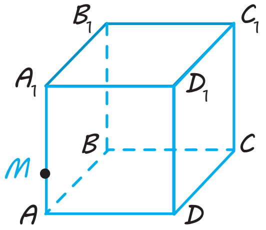


Рис. 2

11. Точки M і K належать ребрам CC_1 і DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відповідно (рис. 3). Укажіть лінію перетину площин CC_1D_1 і AMK.

А MK **В** BM

Б AK **Г** Площини не перетинаються

12. Точки E, F і K є серединами ребер AB, CC_1 і AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відповідно (рис. 4). Скільки ребер куба перетинає площина EFK?

А 3 **В** 5

Б 4 **Г** 6

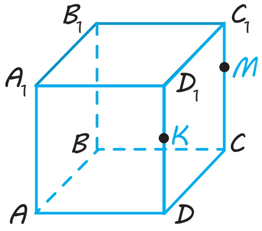


Рис. 3

Навчальний проект

АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Учні та учениці класу об'єднуються в три групи: «Досліджуємо історію», «Опановуємо математику», «Застосовуємо на практиці».

Робота першої групи присвячена дослідженню виникнення і розвитку сучасної системи аксіом.

Робота другої групи стосується альтернативних систем аксіом.

Метою роботи третьої групи є практичне застосування теоретичних тверджень системи аксіом евклідової геометрії.

Результати роботи над проектом кожна група оформлює у вигляді комп'ютерної презентації.

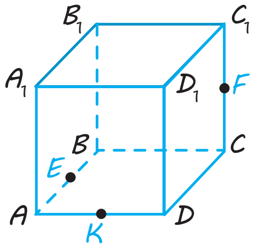


Рис. 4

Розділ 2

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ознайомитеся з паралельністю прямих і площин у просторі, поняттям і властивостями паралельного проектування;
- навчитеся застосовувати властивості паралельності прямих і площин для розв’язування задач та будувати зображення просторових фігур на площині за допомогою паралельного проектування;
- навчитеся розв’язувати складніші задачі на побудову перерізів призми та піраміди

§ 4 РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ: ПРЯМІ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ, ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ, МИМОБІЖНІ ПРЯМІ

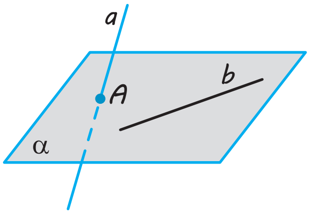
Таблиця 5

Розміщення двох прямих у просторі

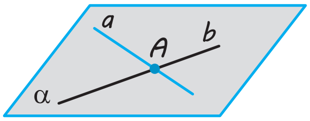
Дві прямі

лежать в одній площині

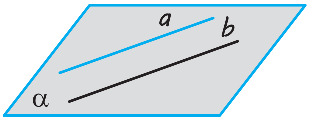
не лежать в одній площині **(мимобіжні)**



мають спільну точку **(перетинаються)**



не мають спільної точки **(паралельні)**



ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Мимобіжні прямі

Якщо дві прямі лежать в одній площині, то, як відомо з курсу планіметрії, вони або перетинаються, або паралельні (див. відповідні рисунки в табл. 5). У стереометрії можливий ще один випадок: прямі не лежать в одній площині і не перетинаються (див. рисунок в табл. 5 та рис. 4.1).

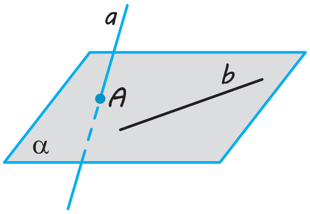


Рис. 4.1

✓ Означення. **Дві прямі в просторі називаються** мимобіжними**, якщо вони не лежать в одній площині.**

Будемо казати також, що два відрізки мимобіжні, якщо вони лежать на мимобіжних прямих.

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.2) ребра DD_1 і B_1C_1 мимобіжні.

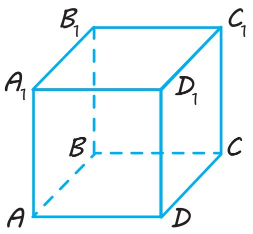


Рис. 4.2

Наступну теорему називають *ознакою мимобіжних прямих*, оскільки вона визначає достатні умови для того, щоб прямі були мимобіжними.

✓ Теорема 4.1. **Якщо одна пряма лежить у даній площині, а друга пряма перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то ці прямі мимобіжні.**

● *Доведення.* Нехай пряма b лежить у площині α, а пряма a перетинає площину α в точці A, яка не належить прямій b (рис. 4.1). Якщо припустити, що прямі a і b лежать в одній площині, то в цій площині лежить і точка A (яка належить прямій a). Але через пряму b і точку A

проходить єдина площина, тому розглядуваною площиною буде площина α. Тоді пряма a повинна лежати в площині α, що суперечить умові. Отже, прямі a і b не лежать в одній площині, тобто вони мимобіжні. ○

Наприклад, у піраміді $ABCD$ (рис. 4.3) ребра AD і BC мимобіжні, оскільки пряма BC лежить у площині ABC, а пряма AD перетинає цю площину в точці A, яка не належить прямій BC.

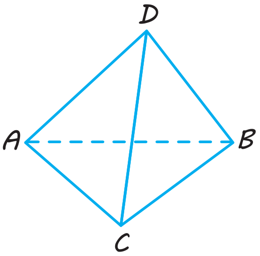


Рис. 4.3

Наочне уявлення про мимобіжні прямі дають дві прямолінійні дороги, одна з яких проходить по естакаді, а інша — під естакадою, та різні елементи будівельних конструкцій.

2 Паралельні прямі в просторі

Нагадаємо, що дві прямі на площині називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються. Для паралельності прямих у просторі потрібно, щоб вони не тільки не перетиналися, але ще й лежали в одній площині.

✓ **Означення. Дві прямі в просторі називаються паралельними, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.**

Як і в планіметрії, будемо казати, що два відрізки паралельні, якщо вони лежать на паралельних прямих. Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AD і A_1D_1 паралельні (див. рис. 4.2).

Наочне уявлення про паралельні прямі дають колони будівлі, корабельний ліс, колоди дерев'яного зрубу.

Як ви вважаєте, чому в корабельному лісі стовбури дерев паралельні один одному?

Як відомо, на площині через точку поза даною прямою можна провести єдину пряму, паралельну даній прямій (аксіома паралельних). Аналогічне твердження є справедливим і в просторі, тільки тут його вже потрібно доводити.

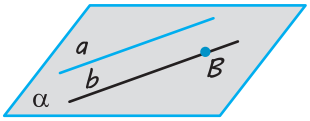


Рис. 4.4

Теорема 4.2. Через точку в просторі, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

● *Доведення.* Нехай точка B не належить прямій a. Проведемо через цю пряму і точку B площину α (рис. 4.4). Ця площина — єдина. У площині α через точку B проходить єдина пряма, назвемо її b, яка паралельна прямій a. Вона і буде єдиною шуканою прямою, яка паралельна даній. ○

З означення паралельності прямих у просторі й теореми 4.2 випливає, що *через дві різні паралельні прямі в просторі можна провести площину, і до того ж тільки одну*. Отже, до відомих із § 1 способів задавання площини можна додати ще один: *площину можна задати двома паралельними прямими*.

Як і на площині, має місце так звана *властивість транзитивності* паралельності прямих, яка виражає також *ознаку паралельності прямих*. Для паралельності прямих транзитивність означає: **«Якщо пряма a паралельна прямій b, а пряма b паралельна прямій c, то пряма a паралельна прямій c».**

Транзитивність — від латин. *transitivus* — перехідний — одна з властивостей логічного відношення величин.

Теорема 4.3. Дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні.

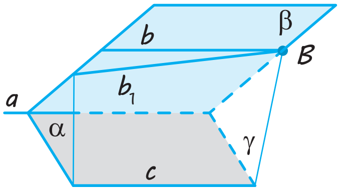


Рис. 4.5

● *Доведення.* Нехай прямі b і c паралельні прямій a. Доведемо, що прямі b і c паралельні.

Випадок, коли прямі a, b, c лежать в одній площині, було розглянуто в планіметрії. Тому припустимо, що наші прямі не лежать в одній площині. Нехай паралельні прямі a і c лежать у площині α, а паралельні прямі a і b — у площині β. Площини α і β різні (рис. 4.5).

Візьмемо на прямій b довільну точку B і проведемо площину γ через пряму c і точку B. Вона перетне площину β по деякій прямій b_1. Пряма b_1 не перетинає площину α (а значить, і пряму c). Дійсно, якщо припустити, що пряма b_1 перетинає площину α, то точка перетину повинна належати прямій a, оскільки пряма b_1 лежить у площині β. З іншого боку, вона повинна лежати на прямій c, оскільки пряма b_1 лежить у площині γ. Але прямі a і c паралельні і не перетинаються. Тоді пряма b_1 лежить у площині β і не перетинає пряму a. Тому вона паралельна прямій a, а значить, збігається з прямою b за аксіомою паралельних. Таким чином, пряма b, що збігається з прямою b_1, лежить в одній площині з прямою c (у площині γ) і не перетинає її. Отже, прямі b і c паралельні. ○

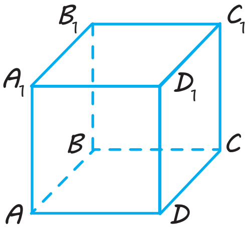


Рис. 4.6

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.6) ребра AB і D_1C_1 паралельні, оскільки кожне з них паралельне ребру DC.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Прямі a і b перетинаються. Доведіть, що всі прямі, які паралельні прямій a і перетинають пряму b, лежать в одній площині.

Розв'язання	**Коментар**
▶ Оскільки прямі a і b перетинаються, через них можна провести єдину площину α. Нехай деяка пряма c паралельна прямій a і перетинає пряму b в точці B (рис. 4.7). Проведемо в площині α через точку B пряму $c' \parallel a$. Але за теоремою 4.2 через точку B проходить єдина пряма, паралельна прямій a. Отже, пряма c збігається з прямою c', тобто пряма c лежить у площині α. ◁	Спочатку, користуючись властивістю, що через дві прямі, які перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну, побудуємо площину, яка проходить через дані прямі. Потім доведемо, що будь-яка пряма, яка перетинає одну пряму і паралельна другій, лежить у цій площині.

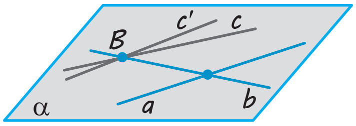


Рис. 4.7

Зауваження. Одержаний результат можна коротко сформулювати так: **усі прямі, які паралельні між собою і перетинають дану пряму, лежать в одній площині.**

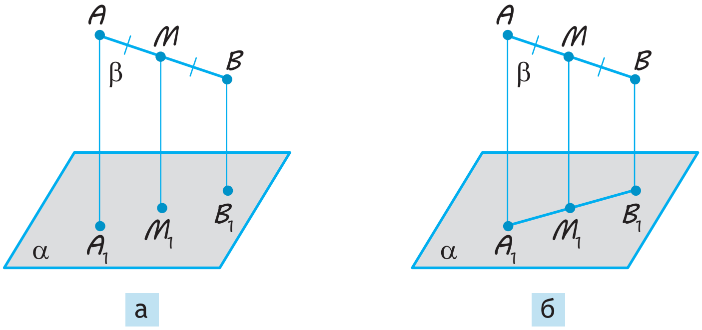
Задача 2

Через кінці відрізка AB і його середину M проведено паралельні прямі, що перетинають деяку площину в точках A_1, B_1 і M_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо відрізок AB не перетинає площину і $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 6$ см.

Дано: M — середина AB, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel MM_1$, $A_1, B_1, M_1 \in \alpha$, відрізок AB не перетинає α, $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 6$ см.

Знайти: MM_1.

Для розв'язування використаємо рис. 4.8.



а

б

Рис. 4.8

Розв'язання

▶ Оскільки паралельні прямі AA_1, BB_1, MM_1, які перетинають пряму AB, лежать в одній площині, то точки A_1, M_1 і B_1 лежать на одній прямій (рис. 4.8, *б*), і ми одержуємо плоский чотирикутник ABB_1A_1, який є трапецією $(AA_1 \parallel BB_1)$.

За умовою точка M — середина відрізка AB і $MM_1 \parallel AA_1$. Тоді за теоремою Фалеса точка M_1 — середина A_1B_1. Отже, MM_1 — середня лінія трапеції та

$$MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{8+6}{2} = 7 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 7 см. ◁

Коментар

Для побудови рисунка до задачі потрібно використати результат задачі 1. Оскільки пряма AA_1 перетинає пряму AB, а прямі MM_1 і BB_1 паралельні прямій AA_1, то всі вони лежать в одній площині β (рис. 4.8, *а*). Тоді площина β перетинає дану площину α по прямій A_1B_1, на якій лежать усі спільні точки цих площин, зокрема і точка M_1. Отже, на рисунку точки A_1, M_1 і B_1 повинні лежати на одній прямій (рис. 4.8, *б*). Фактично після побудови правильного рисунка одержуємо планіметричну задачу в площині β.

Задача 3*

Доведіть, що відрізки, які сполучають середини мимобіжних сторін просторового чотирикутника, перетинаються і точкою перетину діляться навпіл (вершини просторового чотирикутника не лежать в одній площині).

Розв'язання

▶ Нехай $ABCD$ — даний просторовий чотирикутник, а точки A_1, B_1, C_1 і D_1 — середини його сторін (рис. 4.9).

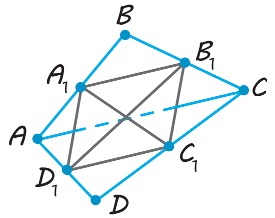


Рис. 4.9

Тоді A_1B_1 — середня лінія трикутника ABC, отже, $A_1B_1 \parallel AC$ і $A_1B_1 = \frac{1}{2}AC$. Аналогічно C_1D_1 — середня лінія трикутника ACD, отже, $C_1D_1 \parallel AC$ і $C_1D_1 = \frac{1}{2}AC$. Тоді за теоремою 4.3 $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ (і тому A_1B_1 і C_1D_1 лежать в одній площині) і, крім того, $A_1B_1 = C_1D_1$. Таким чином, чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ лежить в одній площині і дві його протилежні сторони паралельні й рівні. Отже, це паралелограм, а тому його діагоналі A_1C_1 і B_1D_1 перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. ◁

Коментар

Для того щоб скласти план розв'язування, достатньо згадати, що коли два відрізки перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то їхні кінці є вершинами паралелограма (для якого ці відрізки є діагоналями).

Тому для доведення твердження задачі достатньо довести, що кінці даних відрізків є вершинами паралелограма, а потім використати властивість діагоналей паралелограма.

Запитання

1. Які прямі в просторі називаються паралельними?
2. Які прямі називаються мимобіжними?
3. Поясніть, які дві прямі в просторі будуть непаралельними.
4. Сформулюйте ознаку мимобіжних прямих.
5.* Доведіть ознаку мимобіжних прямих.
6. Доведіть, що через точку поза даною прямою в просторі можна провести пряму, паралельну цій прямій, і до того ж тільки одну.
7.* Доведіть ознаку паралельності прямих.

Вправи

4.1.° Запишіть пари мимобіжних ребер:
1) у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$;
2) у призмі $ABCA_1B_1C_1$;
3) у піраміді $SABCD$.

4.2.° Дано дві площини, які перетинаються. У кожній із них лежить пряма, що перетинає лінію перетину площин. Як можуть бути розташовані ці дві прямі одна відносно одної?

4.3.° Чи правильним є твердження, що, коли дві прямі лежать у різних площинах, вони завжди мимобіжні?

4.4. Пряма a мимобіжна з прямою b, а пряма b мимобіжна з прямою c. Чи випливає звідси, що прямі a і c завжди мимобіжні?

4.5. Точка A не належить прямій a. Проведіть через точку A пряму b так, щоб прямі a і b були мимобіжними.

4.6. Доведіть, що коли прямі AC і BD мимобіжні, то прямі AB і CD теж мимобіжні.

4.7. Доведіть, що площина, яка проходить через одну з двох мимобіжних прямих і точку на другій прямій, перетинає другу пряму.

4.8. Через дану точку простору проведіть пряму, яка перетинає кожну з двох даних мимобіжних прямих. Чи завжди це можливо?

4.9. Скільки пар мимобіжних прямих визначається різними парами з:
1) чотирьох точок;
2) п'яти точок;
3)* n точок, жодні чотири з яких не належать одній площині?

4.10.° Запишіть пари паралельних ребер:
1) у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$;
2) у призмі $ABCA_1B_1C_1$;
3) у правильній піраміді $SABCD$.

4.11. Доведіть, що через дві паралельні прямі проходить єдина площина.

4.12. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині.

4.13. Відомо, що в площині пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає і другу. Чи буде це твердження правильним і для простору?

4.14. Доведіть, що коли площина перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму.

4.15.° Прямі a і b не лежать в одній площині. Чи можна провести пряму c, паралельну і прямій a, і прямій b?

4.16. Паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах. Доведіть, що чотирикутник CDD_1C_1 — також паралелограм.

4.17. Через кінці відрізка CD і його середину N проведено паралельні прямі, що перетинають деяку площину в точках C_1, D_1 і N_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка NN_1, якщо відрізок CD не перетинає площину і:

1) $CC_1 = 3$ м, $DD_1 = 5$ м;

2) $CC_1 = 2{,}5$ дм, $DD_1 = 3{,}5$ дм;

3) $CC_1 = a$, $DD_1 = b$.

4.18.* Розв'яжіть задачу 4.17 за умови, що відрізок CD перетинає площину.

4.19. Через кінець A відрізка AB проведено площину α. Через кінець B і точку C цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і C_1. Знайдіть довжину відрізка BB_1, якщо $AC = 6$ см, $BC = 4$ см, $CC_1 = 3$ см.

4.20. Доведіть, що середини сторін просторового чотирикутника є вершинами паралелограма (вершини просторового чотирикутника не лежать в одній площині).

4.21. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка O — центр грані $ABCD$, а точка O_1 — центр грані $A_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що пряма OO_1 паралельна прямій AA_1.

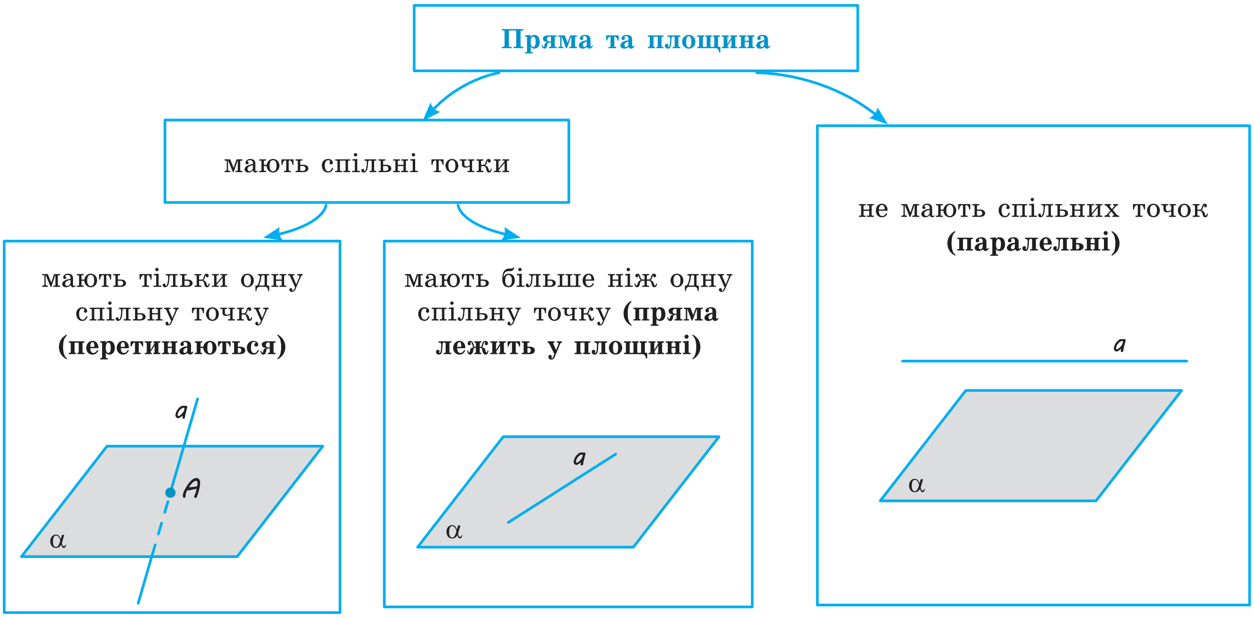
4.22.* Дано паралелограм $ABCD$ і площину, яка не перетинає його. Через вершини паралелограма і точку O перетину діагоналей цього паралелограма проведено паралельні прямі, які перетинають дану площину в точках A_1, B_1, C_1, D_1, O_1. Доведіть, що $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = 4OO_1$.

4.23.* Три площини попарно перетинаються. Доведіть, що лінії їх перетину або перетинаються в одній точці, або паралельні.

§ 5 ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Таблиця 6

Взаємне розміщення прямої та площини в просторі



Пряма та площина

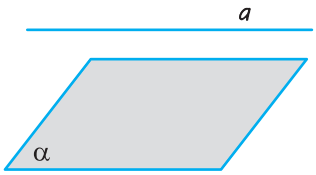
мають спільні точки

маються тільки одну спільну точку **(перетинаються)**

маються більше ніж одну спільну точку **(пряма лежить у площині)**

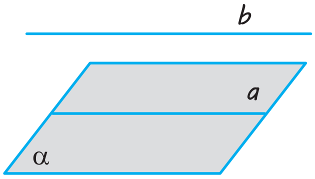
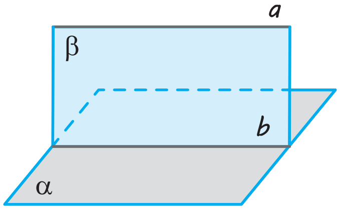
не мають спільних точок **(паралельні)**

Паралельність прямої та площини



$a \parallel \alpha$

Пряма та площина називаються *паралельними*, якщо вони не мають жодної спільної точки.

Ознака	**Властивість**
Якщо $b \parallel a$ (a лежить у площині α), *то* $b \parallel \alpha$.	*Якщо* $a \parallel \alpha$, β проходить через a, β перетинає α по b, *то* $a \parallel b$.
	

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

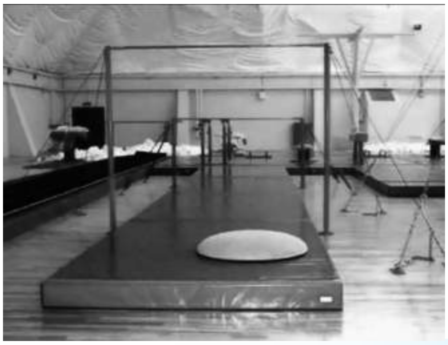
Згадаємо, як можуть розміщуватися пряма і площина одна відносно одної.

Пряма може лежати в площині, тобто всі точки прямої належать площині. Пряма може перетинати площину, тобто мати з площиною тільки одну спільну точку. Нарешті, пряма може не перетинати площину, тобто не мати з площиною жодної спільної точки (див. схему в табл. 6).

✓ **Означення. Пряма і площина називаються паралельними, якщо вони не мають жодної спільної точки.**

Будемо вважати також, що відрізок паралельний площині, якщо він лежить на прямій, паралельній площині.

Наочне уявлення про пряму, паралельну площині, дає деяке спортивне знаряддя. Наприклад, гімнастична перекладина паралельна площині підлоги.



Наступна теорема пов'язує поняття паралельності прямої та площини з поняттям паралельності двох прямих і визначає достатню умову паралельності прямої та площини.

✓ **Теорема 5.1** (ознака паралельності прямої та площини). **Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.**

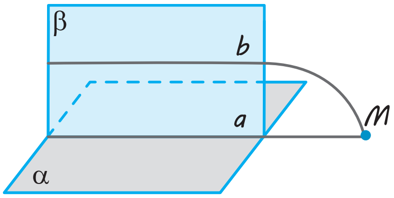


Рис. 5.1

● *Доведення.* Нехай пряма b не лежить у площині α і паралельна прямій a, яка лежить у цій площині (рис. 5.1). Доведемо, що пряма b паралельна площині α. Припустимо протилежне, тобто що пряма b перетинає площину α в деякій точці M. Розглянемо площину β, яка проходить через паралельні прямі a і b ($a \parallel b$ за умовою). Точка M лежить як у площині α, так і в площині β, а тому належить лінії їх перетину — прямій a, тобто прямі a і b перетинаються, що суперечить умові. Отже, наше припущення неправильне і пряма b паралельна площині α. ○

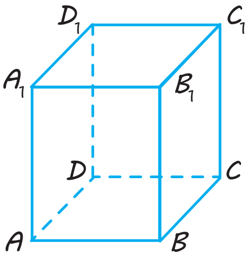


Рис. 5.2

Наприклад (рис. 5.2), у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кожне бічне ребро паралельне площинам бічних граней, які не проходять через це ребро. Дійсно, бічними гранями прямокутного паралелепіпеда є прямокутники. Тому, наприклад, бічне ребро AA_1 паралельне прямій DD_1 бічної грані DD_1C_1C, а значить, за ознакою паралельності прямої і площини, ребро AA_1 паралельне площині DD_1C_1C. Аналогічно ребро AA_1 паралельне площині BB_1C_1C.

Зауваження. Будемо казати, що ребро многогранника паралельне його грані, якщо воно лежить на прямій, паралельній площині цієї грані.

Наступна теорема є ще однією ознакою паралельності двох прямих у просторі.

Теорема 5.2 (ознака паралельності двох прямих у просторі). **Якщо площина проходить через пряму, паралельну іншій площині, і перетинає цю площину, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.**

● *Доведення.* Нехай площина β проходить через пряму b, паралельну площині α, і пряма a є лінією перетину цих площин (рис. 5.3). Доведемо, що прямі a і b паралельні.

Дійсно, вони лежать в одній площині β. Крім цього, пряма a лежить у площині α, а пряма b не перетинається з цією площиною. Отже, пряма b не може перетинатися з прямою a. Таким чином, прямі a і b лежать в одній площині і не перетинаються. Тому вони паралельні. ○

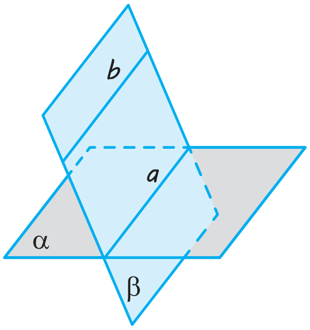


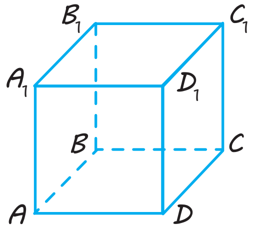
Рис. 5.3

Зазначимо, що з доведення теореми 5.2 випливає така властивість: **якщо пряма b паралельна площині α, то в площині завжди знайдеться пряма a, паралельна прямій b.**

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Чи є правильним твердження: «Пряма, паралельна площині, паралельна будь-якій прямій, що лежить у цій площині»?

Розв'язання	Коментар
▶ Твердження неправильне, оскільки, наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.4) пряма DC паралельна площині AA_1B_1B, але не паралельна прямій AA_1, яка лежить у цій площині (прямі DC і AA_1 мимобіжні). ◁  Рис. 5.4	Якщо якесь твердження не виконується, то, для того щоб його спростувати, достатньо навести хоча б один приклад, коли умова твердження виконується, а висновок — ні (так званий «контрприклад»). Для такого прикладу можна використати відомі геометричні фігури, зокрема многогранники.

Задача 2

Дано трикутник ABC. Площина, паралельна прямій AB, перетинає сторону AC цього трикутника в точці A_1, а сторону BC — у точці B_1. Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо $AB = 10$ см, $AA_1 : A_1C = 2 : 3$.

Дано: $\triangle ABC$, $AB = 10$ см, $\alpha \parallel AB$, $\alpha \cap AC = A_1$, $\alpha \cap BC = B_1$, $AA_1 : A_1C = 2 : 3$.

Знайти: A_1B_1.

Розв'язання

▶ Позначимо дану площину через α (рис. 5.5). Оскільки $AB \parallel \alpha$ і площина ABC перетинає α по A_1B_1, то $A_1B_1 \parallel AB$. Тоді $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$.

Отже, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C}{AC}$, тобто $\frac{A_1B_1}{10} = \frac{3}{5}$.

Таким чином, $A_1B_1 = 6$ (см).

Відповідь: 6 см. ◁

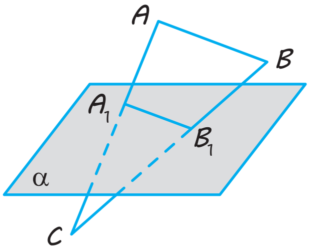


Рис. 5.5

Коментар

Для того щоб скласти план розв'язування, спочатку необхідно врахувати твердження теореми 5.2: *якщо площина проходить через пряму, паралельну іншій площині, і перетинає цю площину, то пряма їх перетину паралельна даній прямій*. Далі слід обґрунтувати, що пряма A_1B_1 паралельна прямій AB. Потім можна використати відомий із планіметрії опорний факт: *пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає трикутник, подібний даному*.

Задача 3

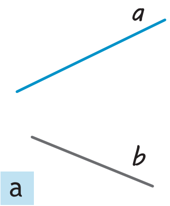


Рис. 5.6

Дано дві мимобіжні прямі (рис. 5.6, *а*). Проведіть через одну з них площину, паралельну другій.

Дано: a і b — мимобіжні прямі.

Побудувати: площину α,

α проходить через b, $\alpha \parallel a$.

Розв'язання

▶ Нехай дано дві мимобіжні прямі a і b.

1. Виберемо на прямій b довільну точку B (рис. 5.6, *б*) і проведемо через точку B пряму a', паралельну прямій a (це завжди можна зробити за теоремою 4.2).

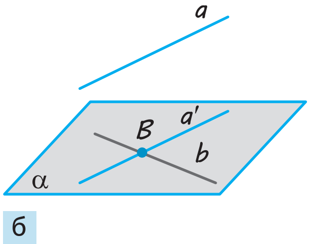


Рис. 5.6

Коментар

Це задача на уявлювану побудову, і тому головним у ході її розв'язування є доведення існування фігури, що задовольняє дані умови (див. «Зміст задач на побудову в стереометрії» в § 3).

Доведення має спиратися на відповідні властивості стереометричних фігур. Зокрема, для того щоб визначити площину, паралельну даній прямій, достатньо використати ознаку паралельності прямої та площини і «забезпечити» наявність у побудованій площині прямої, паралельної даній.

2. Через прямі a' і b, які перетинаються, проведемо площину α. Це і є шукана площина.

Дійсно, оскільки за побудовою $a \parallel a'$, де пряма a' лежить у площині α, то за ознакою паралельності прямої і площини $a \parallel \alpha$ (і площина α проведена через пряму b). ◁

Це дозволяє скласти *план побудови*: провести через довільну точку однієї з прямих пряму, паралельну другій, а потім через дві прямі, що перетинаються, провести площину. Слід також довести, що в результаті побудови дійсно отримали шукану фігуру.

Запитання

1. Назвіть усі випадки взаємного розміщення прямої та площини в просторі.

2. Дайте означення паралельних прямої та площини.

3. Сформулюйте ознаку паралельності прямої та площини.

4.* Доведіть ознаку паралельності прямої та площини.

5. Сформулюйте властивість паралельних прямої та площини (ознаку паралельності прямих у просторі).

6.* Доведіть ознаку паралельності прямих у просторі.

Вправи

5.1.° У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажіть, обґрунтувавши відповідь, яким граням паралельне ребро:
1) AB; 2) A_1D_1; 3) CC_1.

5.2. Основа AB трапеції $ABCD$ лежить у площині α, яка не збігається з площиною трапеції. Як розташовані решта сторін трапеції відносно площини α? Відповідь поясніть.

5.3. Дано паралелограм $ABCD$. Через сторону AD проведено площину α, яка не збігається з площиною паралелограма. Доведіть, що $BC \parallel \alpha$.

5.4. Чи є правильним твердження, що дві прямі, паралельні одній площині, паралельні одна одній?

5.5. Одна з двох паралельних прямих паралельна площині. Чи є правильним твердження, що й друга пряма паралельна цій площині?

5.6. Площина проходить через середини двох сторін трикутника і не збігається з площиною цього трикутника. Доведіть, що дана площина паралельна третій стороні трикутника.

5.7. Дано пряму, паралельну деякій площині. Доведіть, що в цій площині через будь-яку її точку можна провести пряму, паралельну даній прямій.

5.8. Доведіть, що через точку, яка не належить даній площині, можна провести пряму, паралельну цій площині. Скільки таких прямих можна провести?

5.9. Доведіть, що коли дві прямі паралельні, то через одну з них можна провести площину, паралельну другій прямій. Скільки існує таких площин?

5.10. Доведіть, що через кожну з двох мимобіжних прямих можна провести єдину площину, паралельну другій прямій.

5.11. Доведіть, що ребра однієї основи призми паралельні площині другої основи цієї призми.

5.12. Через дану точку проведіть пряму, паралельну кожній із двох даних площин, які перетинаються.

5.13. Дано трикутник BCD. Площина, паралельна прямій BC, перетинає сторону BD цього трикутника в точці B_1, а сторону CD — у точці C_1. Знайдіть довжину відрізка B_1C_1, якщо:

1) $BC = 20$ см, $BB_1 : BD = 2 : 5$;

2) $BC = 14$ см, $CC_1 : C_1D = 5 : 2$;

3) $B_1D = 6$ см, $BC : BD = 2 : 3$.

5.14. Доведіть, що переріз трикутної піраміди $ABCD$ площиною, паралельною двом мимобіжним ребрам AC і BD, завжди є паралелограмом (рис. 5.7).

5.15.* Доведіть, що пряма, паралельна кожній із двох площин, які перетинаються, паралельна і прямій їх перетину.

5.16.* Доведіть, що коли дві площини, які перетинаються по прямій a, перетинають площину α по паралельних прямих, то пряма a паралельна площині α.

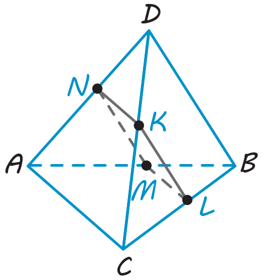


Рис. 5.7

5.17. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що пряма BD паралельна площині AB_1D_1.

5.18. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка O — центр грані $ABCD$. Доведіть, що пряма OC_1 паралельна площині AB_1D_1.

5.19. Площини α, β і γ попарно перетинаються, але не мають спільних для трьох площин точок. Чи існують у просторі прямі, паралельні всім трьом площинам?

5.20.* Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; точки P і Q — середини ребер AB і BC відповідно. Побудуйте переріз цього куба площиною, яка проходить через точки P і Q паралельно діагоналі BD_1 куба.

5.21.* Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка P — середина ребра AA_1. Побудуйте переріз цього куба площиною, яка проходить через точки P і D_1 паралельно діагоналі AC грані $ABCD$ куба.

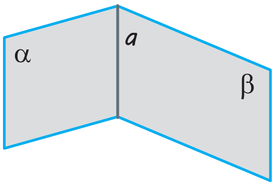
§ 6 ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ДВОХ ПЛОЩИН

Таблиця 7

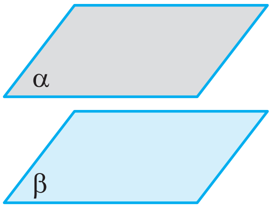
Розміщення двох площин у просторі

Дві площини

мають спільну точку
(перетинаються по прямій)



не мають спільних точок
**(паралельні, тобто
не перетинаються)**

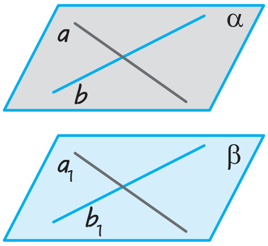


Паралельність площин

Означення

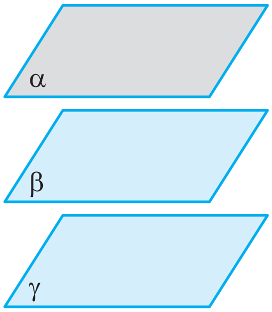
Дві площини називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

Ознака

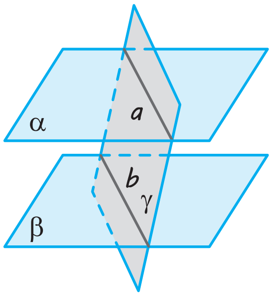


Якщо $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$
(a і b лежать в α
і перетинаються,
a_1 і b_1 лежать у β),
то $\alpha \parallel \beta$.

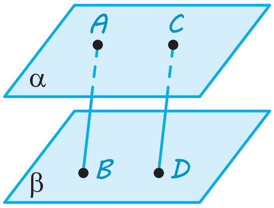
Властивості паралельних площин



Якщо $\beta \parallel \alpha$ і $\gamma \parallel \alpha$,
то $\beta \parallel \gamma$.



Якщо $\alpha \parallel \beta$ і γ
перетинає α по a,
γ перетинає β по b,
то $a \parallel b$.



Якщо $AB \parallel CD$ і $\alpha \parallel \beta$
($A \in \alpha$, $C \in \alpha$,
$B \in \beta$, $D \in \beta$),
то $AB = CD$.

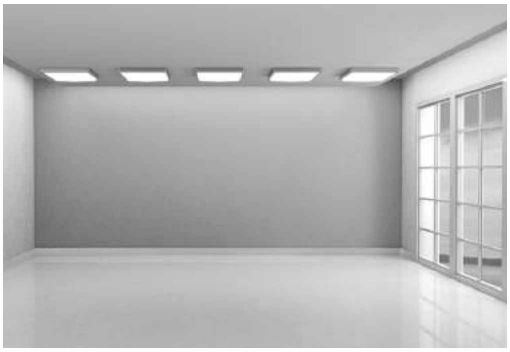
ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Розглянемо питання про взаємне розміщення двох площин. Як відомо, якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку. Звідси випливає, що дві площини або перетинаються по прямій, або не перетинаються, тобто не мають жодної спільної точки (див. схему в табл. 7).

✓ **Означення.** **Дві площини називаються паралельними, якщо вони не перетинаються.**

Якщо площини α і β паралельні, то записують: $\alpha \parallel \beta$. Говорять також, що площина α паралельна площині β або площина β паралельна площині α.

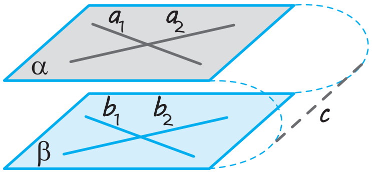
Наочне уявлення про паралельні площини дають стеля та підлога кімнати; поверхня води, налитої в акваріум, і його дно.



Наступна теорема пов’язує поняття паралельності двох площин із поняттям паралельності прямих і визначає достатню умову паралельності площин.

✓ **Теорема 6.1** (ознака паралельності двох площин). **Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.**

● *Доведення.* Нехай прямі a_1 і a_2 площини α паралельні відповідно прямим b_1 і b_2 площини β. Доведемо, що площини α і β паралельні. Припустимо протилежне: площини α та β перетинаються і c — пряма їх перетину (рис. 6.1). За ознакою паралельності прямої і площини пряма a_1 паралельна площині β, а за ознакою паралельності двох прямих у просторі вона паралельна прямій c. Аналогічно пряма a_2 також паралельна прямій c. Таким чином, у площині α ми маємо дві різні прямі, які проходять через одну точку і паралельні одній прямій c, що неможливо. Одержана суперечність показує, що наше припущення неправильне, отже, площини α і β не перетинаються, тобто паралельні. ○



◆ Рис. 6.1

Будемо казати, що дві грані *многогранника паралельні*, якщо вони лежать у паралельних площинах.

Наприклад, *основи призми паралельні*. Дійсно, бічними гранями призми є паралелограми. Тому два суміжних ребра однієї основи призми паралельні відповідно двом суміжним ребрам другої її основи. Отже, основи призми паралельні. Так, на рис. 6.2 зображена п'ятикутна призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, у якої основи $ABCDE$ і $A_1B_1C_1D_1E_1$ паралельні.

Наступна теорема пов'язує поняття паралельності двох площин із поняттям паралельності двох прямих.

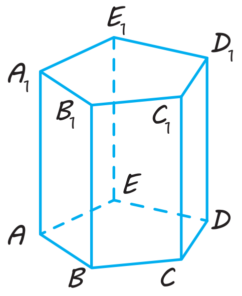


Рис. 6.2

Теорема 6.2 (властивість паралельних площин). **Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину паралельні.**

● *Доведення.* Нехай площина γ перетинає паралельні площини α і β по прямих a і b відповідно (рис. 6.3). Доведемо, що прямі a і b паралельні. Дійсно, вони лежать в одній площині — площині γ. Крім того, вони лежать у площинах α і β, які не перетинаються, отже, і прямі a і b не перетинаються. Значить, вони паралельні. ○

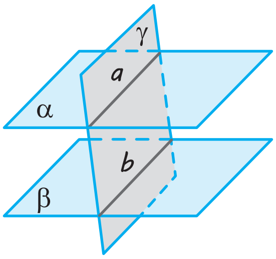


Рис. 6.3

Розглядаючи означення і ознаку паралельності площин та властивість паралельних площин, ми припускали існування таких площин. Доведемо це.

Теорема 6.3. Через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

● *Доведення.* Проведемо в даній площині α дві довільні прямі a і b, що перетинаються (рис. 6.4). Через дану точку A поза площиною α проведемо паралельні їм прямі a_1 і b_1. Площина β, що проходить через прямі a_1 і b_1, за ознакою паралельності площин паралельна площині α. Доведемо, що така площина — єдина. Припустимо, що через точку A проходить інша площина β_1, яка теж паралельна площині α (рис. 6.5). Проведемо площину γ через пряму a площини α і дану точку A, яка не лежить на цій прямій. Площина γ перетне площину α по прямій a, а площини β і β_1 — по прямих a_1 і a_2 відповідно. Оскільки площини β і β_1 паралельні площині α, то за теоремою 6.2 $a_1 \parallel a$ і $a_2 \parallel a$. Але в площині γ через точку A можна провести тільки одну пряму, паралельну прямій a. Одержана суперечність означає, що наше припущення неправильне і площина β єдина. ○

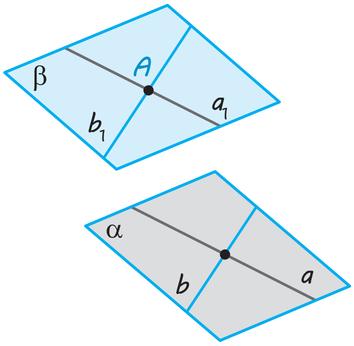


Рис. 6.4

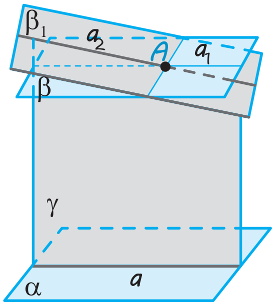


Рис. 6.5

Розглянемо ще одну властивість паралельних площин, пов'язану з паралельними прямими.

Теорема 6.4. Відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами, рівні.

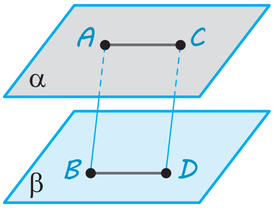


Рис. 6.6

● *Доведення.* Нехай α і β — паралельні площини, *AB* і *CD* — паралельні прямі, що їх перетинають, *A*, *C*, *B*, *D* — точки перетину цих прямих із площинами α і β відповідно (рис. 6.6). Доведемо, що відрізки *AB* і *CD* рівні.

Проведемо через дані паралельні прямі площину, яка перетне площини α і β по паралельних прямих *AC* і *BD*. Тоді чотирикутник *ACDB* — паралелограм, оскільки в нього протилежні сторони паралельні. У паралелограма протилежні сторони рівні, отже, $AB = CD$. ○

? Поясніть, як можна застосувати зміст теореми 6.4. в будівництві, у побуті.

✓ **Теорема 6.5. Якщо дві різні площини паралельні третій, то вони паралельні одна одній.**

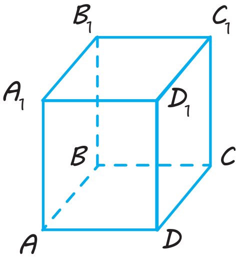
● *Доведення.* Нехай площини α і β паралельні площині γ (див. рисунок у пункті «Властивості паралельних площин» табл. 7). Площини α і β не можуть перетинатися. Якби площини α і β мали спільну точку, то через цю точку проходили б дві площини (α і β), паралельні площині γ, а це суперечить теоремі 6.3. Отже, площини α і β не мають спільних точок, тобто паралельні. ○

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Доведіть, що **в прямокутному паралелепіпеді протилежні грані попарно паралельні.**

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед.

Довести: $ABB_1A_1 \parallel DCC_1D_1$.

Розв'язання	**Коментар**
▶ Нехай дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.7).  Рис. 6.7 Доведемо, наприклад, паралельність граней ABB_1A_1 і DCC_1D_1.	Для того щоб довести паралельність граней паралелепіпеда, достатньо довести паралельність площин, у яких лежать ці грані. А для доведення паралельності площин достатньо використати ознаку їх паралельності, тобто довести, що дві прямі, які перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини. Нагадаємо, що всі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники (а в прямокутнику протилежні сторони попарно паралельні).

Оскільки всі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками, то $ABCD$ та ADD_1A_1 — прямокутники. Тоді $AB \parallel CD$ та $AA_1 \parallel DD_1$ і за ознакою паралельності площини ABB_1A_1 і DCC_1D_1 паралельні. Аналогічно обґрунтовують паралельність інших протилежних граней. ◁	

Задача 2

Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки K, M, N, де $M \in AA_1$, $N \in BB_1$, і точка K лежить у грані DCC_1D_1 (рис. 6.8, *а*).

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед,
$M \in AA_1$, $N \in BB_1$, $K \in DCC_1D_1$.

Побудувати: переріз площиною KMN.

Розв'язання	**Коментар**
▶ 1. Точки M і N лежать і в січній площині, і в грані ABB_1A_1, тому січна площина перетинає цю грань по відрізку MN (рис. 6.8, *б*). 2. Оскільки $DCC_1D_1 \parallel ABB_1A_1$, то січна площина перетинає грань DCC_1D_1 по прямій, яка проходить через точку K і паралельна прямій MN. Проводимо через точку K відрізок $TE \parallel MN$ ($T \in DD_1$, $E \in CC_1$). 3. Сполучаючи відрізками точки перетину січної площини з ребрами призми, одержуємо чотирикутник $MNET$ — шуканий переріз. ◁	Для складання плану побудови достатньо згадати, що в прямокутному паралелепіпеді протилежні грані попарно паралельні, отже, $ABB_1A_1 \parallel DCC_1D_1$. Січна площина, яку задано трьома точками K, M, N, перетинає площину ABB_1A_1 по прямій MN. Тому паралельну їй площину DCC_1D_1 вона перетинатиме по прямій, яка паралельна прямій MN і проходить через точку K. Для того щоб виконати побудову, слід урахувати також, що пряма MN паралельна площині DCC_1D_1 і в цій площині через точку K можна провести пряму, паралельну даній прямій.

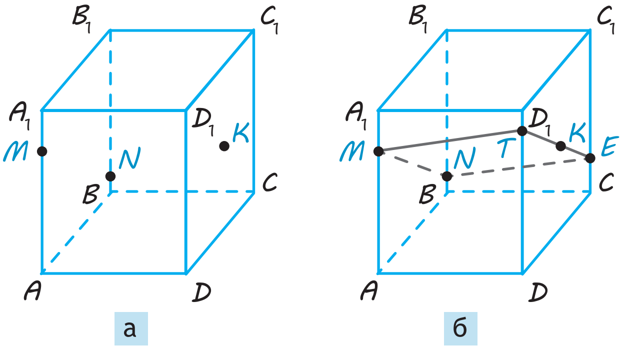


Рис. 6.8

Зауваження. З паралельності протилежних граней паралелепіпеда одержуємо, що в побудованому перерізі протилежні сторони попарно паралельні. Отже, чотирикутник $MNET$ — паралелограм. Це іноді доводиться використовувати під час розв'язування задач, пов'язаних з аналогічним перерізом прямокутного паралелепіпеда.

Задача 3

У піраміді $ABCD$ через дану точку M на ребрі AD (рис. 6.9, *а*) проведіть площину, паралельну площині грані DBC.

Розв'язання

▶ 1. *Аналіз.* Припустимо, що задача розв'язана і відповідний переріз MKT (рис. 6.9, *б*) побудовано. Оскільки пл.$MKT \parallel$ пл.DBC, то $MK \parallel DB$ і $MT \parallel DC$ (грані ADC і ADB перетинають паралельні площини по паралельних прямих). Це дає змогу виконати побудову.

2. *Побудова.* Проведемо через точку M у площині ADC пряму $MT \parallel DC$ $(T \in AC)$, а в площині ADB — пряму $MK \parallel DB$ $(K \in AB)$ і сполучимо відрізком точки T і K. Тоді MKT — шуканий переріз.

3. *Доведення.* За побудовою $MT \parallel DC$ і $MK \parallel DB$, тоді пл.$MKT \parallel$пл.DBC (за ознакою паралельності площин).

4. *Дослідження.* Задача завжди має єдиний розв'язок, оскільки кожен крок розв'язання можна виконати однозначно. ◁

Коментар

У задачах на побудову в стереометрії іноді зручно використовувати схему розв'язування, відому з курсу планіметрії: 1) *аналіз*; 2) *побудова*; 3) *доведення*; 4) *дослідження*.

На етапі аналізу припускаємо, що задачу вже розв'язано, виконуємо відповідний рисунок і, спираючись на відомі властивості прямих і площин, складаємо план побудови.

На етапі побудови описуємо її за планом, деталізуючи до елементарних побудов у зображених площинах.

На етапі доведення обґрунтовуємо, що в результаті побудови дійсно отримали фігуру із заданими властивостями.

На етапі дослідження розглядаємо кожен крок побудови і відповідаємо на два запитання: 1) Чи завжди можна виконати цей крок? 2) Скільки фігур одержимо в результаті?

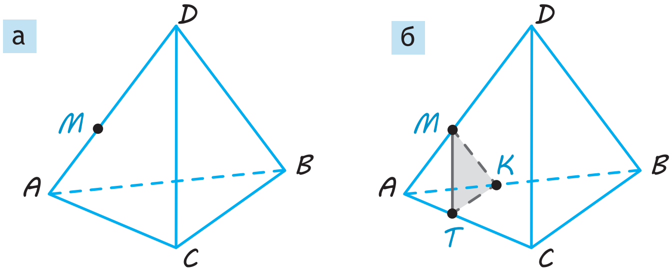


Рис. 6.9

Задача 4

Доведіть, що через дві мимобіжні прямі проходить єдина пара паралельних площин.

Розв'язання

▶ Нехай дано дві мимобіжні прямі a і b. Виберемо на них відповідно довільні точки A і B (рис. 6.10).

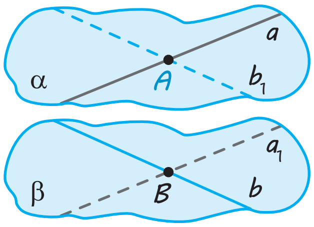


Рис. 6.10

Розв'язання

Проведемо через точку B пряму a_1, паралельну прямій a, а через точку A — пряму b_1, паралельну прямій b. Через прямі a і b_1, які перетинаються, проведемо площину α, а через прямі a_1 і b, які також перетинаються, — площину β. За ознакою паралельності площин $\alpha \parallel \beta$.

Припустимо, що через прямі a і b проходить ще одна пара паралельних площин α' і β' (рис. 6.11).

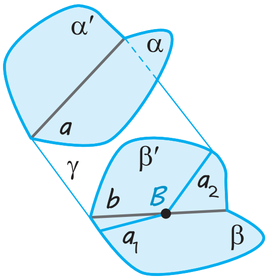


Рис. 6.11

Проведемо через пряму a і точку B, яка не лежить на ній $(B\in\beta)$, площину γ. Ця площина перетинає паралельні площини α і β по паралельних прямих a і a_1, а паралельні площини α' і β' — по паралельних прямих a і a_2. Отримуємо, що через точку B у площині γ проведено дві різні прямі a_1 і a_2, паралельні прямій a, що неможливо. Отже, пара паралельних площин, які проходять через дані мимобіжні прямі, — єдина. ◁

Коментар

Для доведення існування фігур достатньо побудувати ці фігури. Тому проведемо через дані прямі паралельні площини. Для цього достатньо використати ознаку паралельності площин, тобто забезпечити паралельність двох прямих, що перетинаються, однієї площини відповідно двом прямим другої площини. (Нагадаємо, що дві прямі, що перетинаються, однозначно визначають площину.)

Єдиність побудованих площин доведемо методом від супротивного. Щоб отримати суперечність, побудуємо додаткову площину, яка перетинає побудовані паралельні площини (за теоремою 6.2 ця площина перетинає паралельні площини по паралельних прямих).

Запитання

1. Назвіть можливі випадки взаємного розміщення двох площин.
2. Дайте означення паралельних площин.
3. Сформулюйте ознаку паралельності площин.

4.* Доведіть ознаку паралельності площин.

5.* Доведіть, що через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

6. Сформулюйте властивості прямих і площин, пов'язані з паралельними площинами.

7.* Доведіть, що коли дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину є паралельними.

8.* Доведіть, що відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами, рівні.

9.* Доведіть, що коли дві різні площини паралельні третій, то вони паралельні між собою.

Вправи

6.1.° Укажіть паралельні грані:

1) паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$;

2) призми $ABCA_1B_1C_1$.

6.2.° Чи має паралельні грані (якщо має, то скільки пар):

1) тетраедр;

2) куб?

6.3.° Чи є правильним твердження: «Якщо пряма, яка лежить в одній площині, паралельна прямій, що лежить у другій площині, то ці площини паралельні»?

6.4.° Чи є правильним твердження: «Якщо дві прямі, які лежать в одній площині, паралельні двом прямим, що лежать у другій площині, то ці площини паралельні»?

6.5.° Чи можуть бути паралельними дві площини, які проходять через непаралельні прямі? Продемонструйте результат на моделі.

6.6.° Чи можуть перетинатися площини, паралельні одній прямій?

6.7.° Чи через будь-яку пряму можна провести площину, паралельну даній площині? При якому взаємному розміщенні даних прямої та площини це можна зробити?

6.8.° Через кожну з двох паралельних прямих проведено площину. Чи є правильним твердження, що ці площини паралельні?

6.9. Доведіть, що площина, проведена через вершини A, D і A_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, паралельна площині, проведеній через вершини C, B_1 і C_1.

6.10. Через дану точку проведіть площину, паралельну кожній із двох прямих, які перетинаються. Чи завжди це можливо?

6.11. Доведіть, що пряма, яка лежить в одній із двох паралельних площин, паралельна другій площині.

6.12. Доведіть, що всі прямі, які проходять через дану точку паралельно даній площині, лежать в одній площині.

6.13. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й другу.

6.14. Які можливі випадки взаємного розміщення трьох площин у просторі, якщо дві з них паралельні?

6.15. Доведіть, що коли площина перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й другу.

6.16. Які можливі випадки взаємного розміщення трьох площин у просторі, якщо вони попарно перетинаються?

6.17. Дві площини α і β перетинаються. Доведіть, що будь-яка третя площина γ перетинає хоча б одну з площин α і β.

6.18. Нарисуйте в зошиті зображення піраміди, наведене на рис. 6.12, і побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точку M паралельно грані ABC.

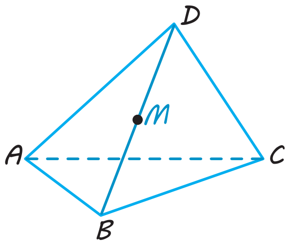


Рис. 6.12

6.19.* Нарисуйте в зошиті зображення куба, наведене на рис. 6.13, і побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки:

1) M, B, C;

2) M, B_1, C.

6.20.* Нарисуйте в зошиті зображення трикутної призми, наведене на рис. 6.14 (точка K лежить у грані ABB_1A_1), і побудуйте переріз призми площиною, яка проходить через точку K паралельно:

1) основі $A_1B_1C_1$;

2) грані BCC_1B_1.

6.21. Дано дві паралельні площини. Через точки A і B однієї площини проведено паралельні прямі, які перетинають другу площину в точках A_1 і B_1. Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо $AB=a$.

6.22. Через вершини трикутника ABC, що лежить в одній із двох паралельних площин, проведено паралельні прямі, які перетинають другу площину в точках A_1, B_1, C_1. Доведіть рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

6.23.* Три прямі, які проходять через одну точку S, перетинають дану площину α в точках A, B, C, а паралельну їй площину β — у точках A_1, B_1, C_1. Доведіть подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 6.15).

6.24. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що площина BDC_1 паралельна площині AB_1D_1.

6.25.* У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площини BDC_1 і AB_1D_1. Доведіть, що вони ділять діагональ A_1C на рівні частини.

6.26.* Прямі a і b перетинають три дані паралельні площини в точках A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3 відповідно (точка A_2 лежить між точками A_1 і A_3, а точка B_2 — між точками B_1 і B_3). Відомо, що $A_1A_2=12$ см, $B_2B_3=27$ см і $A_2A_3=B_1B_2$. Знайдіть довжини відрізків A_1A_3 і B_1B_3.

6.27.* Три паралельні площини перетинають дві мимобіжні прямі в точках A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3 відповідно (точка A_2 лежить між точками A_1 і A_3, а точка B_2 — між точками B_1 і B_3). Відомо, що $A_2A_3=8$ см, $B_1B_2=18$ см і $A_1A_2+B_2B_3=24$ см. Знайдіть довжини відрізків A_1A_3 і B_1B_3.

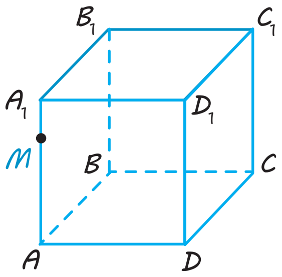


Рис. 6.13

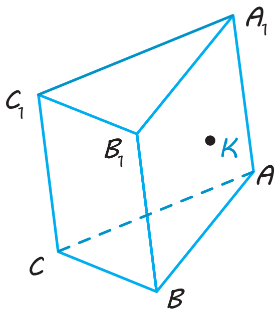


Рис. 6.14

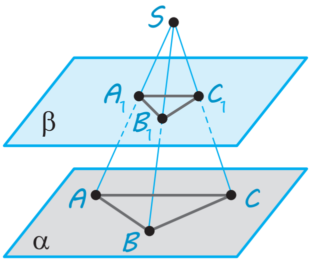


Рис. 6.15

6.28. На ребрах або на гранях куба вказано точки M, P і R (рис. 6.16–6.30). Скориставшись властивостями паралельних прямих і площин, для кожного зображення побудуйте переріз куба площиною MRP.

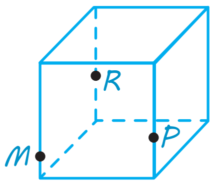


Рис. 6.16

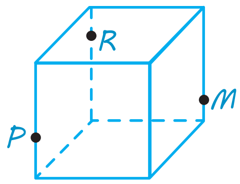


Рис. 6.17

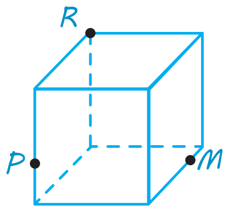


Рис. 6.18

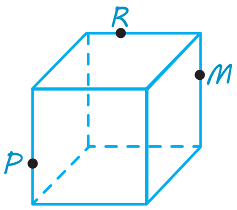


Рис. 6.19

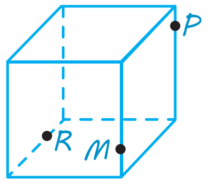


Рис. 6.20

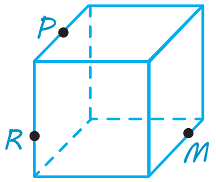


Рис. 6.21

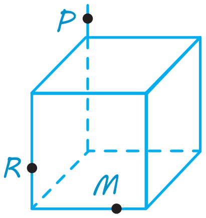


Рис. 6.22

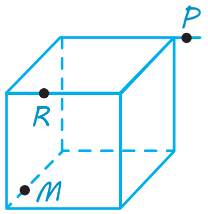


Рис. 6.23

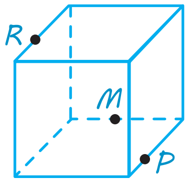
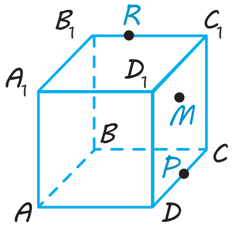
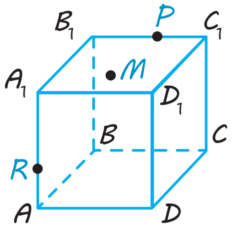


Рис. 6.24



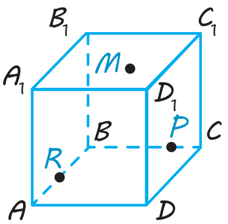
$M \in$ пл. BB_1C_1

Рис. 6.25



$M \in$ пл. $A_1B_1C_1$

Рис. 6.26



$M \in$ пл. $A_1B_1C_1$

Рис. 6.27

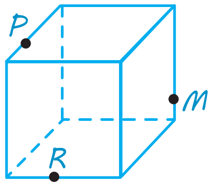
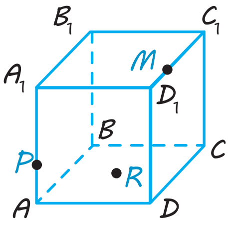
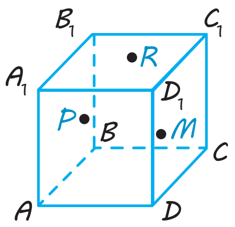


Рис. 6.28



$R \in$ пл. ABC

Рис. 6.29



$P \in$ пл. AA_1B_1

$R \in$ пл. $A_1B_1C_1$

$M \in$ пл. DD_1C_1

Рис. 6.30

Виявіть свою компетентність

6.29. Для того щоб перевірити горизонтальність установки лімба кутовимірювальних інструментів, користуються двома рівнями, розташованими в одній площині (рис. 6.31). Чому рівні розміщують на діаметрах?

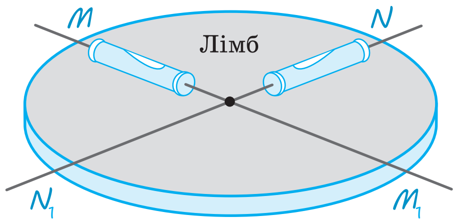


Рис. 6.31. Лімб

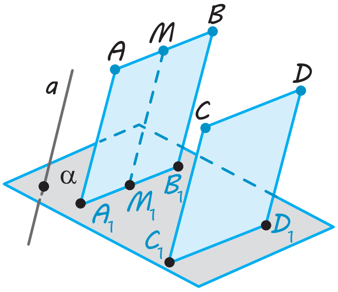
§ 7 ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ. ЗОБРАЖЕННЯ ПЛОСКИХ І ПРОСТОРОВИХ ФІГУР У СТЕРЕОМЕТРІЇ. ВЛАСТИВОСТІ ЗОБРАЖЕНЬ ДЕЯКИХ МНОГОКУТНИКІВ У ПАРАЛЕЛЬНІЙ ПРОЕКЦІЇ

Таблиця 8

Зображення просторових фігур на площині

Для зображення просторових фігур на площині зазвичай використовують *паралельне проектування.*
Візьмемо довільну пряму a, яка перетинає площину α. Через довільну точку A деякої фігури проводимо пряму $AA_1 \parallel a$, яка перетинає площину α в точці A_1.

Точка A проектується в точку A_1 на площині α: $A \to A_1$. Аналогічно $B \to B_1$, $AB \to A_1B_1$ $(BB_1 \parallel AA_1 \parallel a)$.

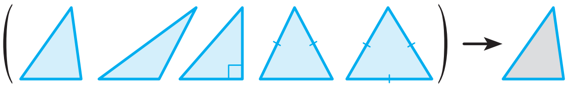


Властивості паралельного проектування

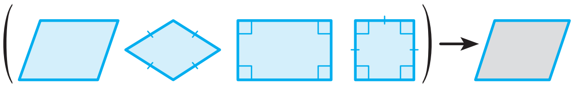
1. Відрізок проектується у відрізок або в точку, пряма проектується в пряму або в точку.
2. *Якщо* $AB \parallel CD$, $(AB \to A_1B_1,\ CD \to C_1D_1,\ AB \nparallel AA_1)$, *то* $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ або збігаються.
3. $\boxed{\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{A_1M_1}{M_1B_1}}$

   Наслідок. Якщо точка M — середина відрізка AB, $AB \to A_1B_1$, $M \to M_1$, *то* точка M_1 — середина відрізка A_1B_1.
4. *Якщо плоска фігура F лежить у площині, паралельній площині проекцій, то її проекція F' на цю площину дорівнює фігурі F.*

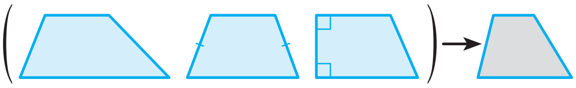
Паралельні проекції деяких плоских фігур
(Площина фігури не паралельна напряму проектування)



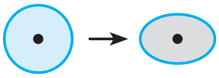
Проекція трикутника — довільний ***трикутник.***



Проекція паралелограма— довільний ***паралелограм.***



Проекція трапеції — довільна ***трапеція*** за умови збереження відношення довжин основ.



Проекція кола — довільний ***еліпс.***

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття паралельного проектування та його властивості.

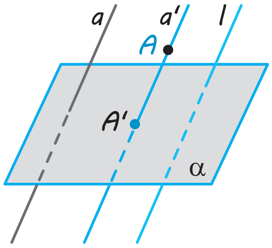


Рис. 7.1

Для зображення просторових фігур на площині зазвичай використовують паралельне проектування. Розглянемо цей спосіб зображення фігур.

Нехай дано площину α і пряму *a*, яка її перетинає. Візьмемо в просторі довільну точку *A*. У тому випадку, коли точка *A* не лежить на прямій *a*, через точку А проводимо пряму $a' \parallel a$ (рис. 7.1). Пряма *a′* перетинає площину α в деякій точці *A′*. Ця точка називається проекцією[*] точки *A* на площину[**] α під час проектування паралельно прямій *a*, або паралельною проекцією точки *A* на площину α.

Якщо ж точка *A* лежить на прямій *a*, то її паралельною проекцією *A′* називається точка, у якій пряма *a* перетинає площину α. Про пряму *a* кажуть, що вона задає *напрям проектування*. Якщо пряму *a* замінити будь-якою іншою прямою *l*, паралельною прямій *a*, то результат проектування залишається той самий, незалежно від того, як проводять прямі — паралельно прямій *a* або прямій *l*.

Якщо таким чином побудувати проекцію кожної точки фігури, то одержимо *проекцію* самої *фігури*. Паралельною проекцією реальної фігури є, наприклад, її тінь, що падає на плоску поверхню в разі сонячного освітлення, оскільки сонячні промені можна вважати паралельними (рис. 7.2). Так, дивлячись на власну тінь на поверхні землі, ви бачите свою паралельну проекцію.

Рис. 7.2

Наведемо деякі властивості паралельного проектування, які випливають з описаного способу побудови проекцій.

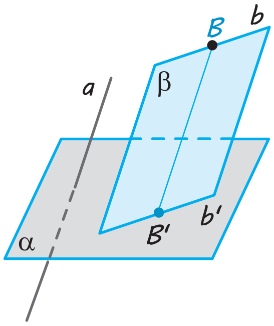


Рис. 7.3

***Властивість 1*. Якщо пряма паралельна прямій *a* або збігається з прямою *a*, то її проекцією в напрямі цієї прямої є точка. Якщо пряма не паралельна прямій *a* і не збігається з прямою *a*, то її проекцією є пряма.**

● *Доведення*. Нехай пряма *b* не паралельна прямій *a* і не збігається з нею (рис. 7.3). Тоді всі прямі, які проектують точки прямої *b* на площину α, лежать в одній площині β, що перетинає площину α по прямій *b′*. Довільну точку *B* прямої *b* зображують точкою *B′* прямої *b′*. Отже, пряма *b′* є проекцією прямої *b* на площину α. ○

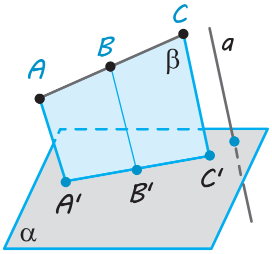
---

[*] Іноді буває зручно той факт, що точка *A′* є проекцією точки *A* (тобто точка *A* проектується в точку *A′*), записувати так: $A \to A'$ (знак «→» у наведеному записі означає: «проектується в»; див., наприклад, записи в табл. 8).

[**] Площину α часто називають **площиною проекцій**.

***Властивість 2.* Проекцією відрізка в результаті паралельного проектування є точка або відрізок**, залежно від того, на якій прямій він лежить — на прямій, паралельній прямій a (або на самій прямій a), чи непаралельній прямій a. **Відношення довжин відрізків, які лежать на одній прямій, зберігається в результаті паралельного проектування.** Зокрема, **середина відрізка при паралельному проектуванні переходить у середину проекції відрізка.**

● *Доведення.* Розглянемо відрізок AC, не паралельний напряму проектування (тобто не паралельний прямій a і такий, що не лежить на ній), та точку B, яка належить відрізку AC (рис. 7.4).



◆ Рис. 7.4

Нехай пряма $A'C'$ є проекцією прямої AC на площину α, а точки A', B', C' — відповідно проекціями точок A, B, C. Оскільки $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, то прямі AA', BB' і CC' лежать в одній площині β, тоді за узагальненою теоремою Фалеса з планіметрії одержуємо $AB : BC = A'B' : B'C'$. Зокрема, якщо точка B — середина відрізка AC, то точка B' — середина відрізка $A'C'$ ○

Зауважимо, що *в результаті паралельного проектування зберігається не тільки відношення довжин відрізків, які лежать на одній прямій, а й відношення довжин відрізків, які лежать на паралельних прямих* (обґрунтуйте самостійно).

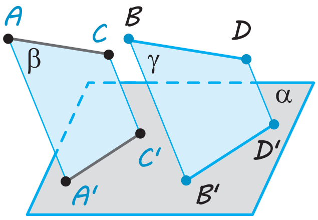
***Властивість 3.* Якщо дві прямі паралельні одна одній** і не паралельні деякій прямій a, то **їх проекції** в напрямі прямої **a теж будуть паралельними прямими (або однією прямою).**

● *Доведення.* Нехай прямі AC і BD паралельні (і не паралельні напряму проектування). Аналогічно тому, як це було зроблено під час доведення властивості 1, розглянемо проекції $A'C'$ і $B'D'$ даних прямих як прямі перетину площини α з площинами β і γ відповідно (рис. 7.5).

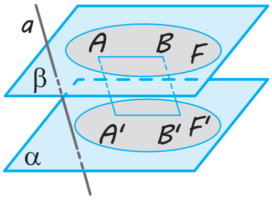
Якщо площини β і γ збігаються, то проекції прямих AC і BD також збігаються. Якщо ж ці площини різні, то вони паралельні за ознакою паралельності двох площин (пряма AC паралельна прямій BD, пряма AA' паралельна прямій BB'). Тоді за властивістю паралельних площин лінії перетину цих площин із площиною α паралельні. Отже, $A'C' \parallel B'D'$. ○

***Властивість 4.* Якщо плоска фігура F лежить у площині, паралельній площині проекцій, то її проекція F' на цю площину дорівнює фігурі F.**

● *Доведення.* Задамо відповідність між точками фігури F і точками фігури F', ставлячи кожній точці фігури F у відповідність її проекцію. То ж якщо A і B — точки фігури F, а точки A' і B' — їх проекції, то $ABB'A'$ — паралелограм (рис. 7.6). Отже, $A'B' = AB$. Таким чином, ця відповідність зберігає відстань між точками, а тому фігури F і F' рівні. ○



◆ Рис. 7.5



◆ Рис. 7.6

З наведеного доведення властивості 4 випливає ще одна властивість паралельного проектування: *якщо пряма паралельна площині проекцій, то вона проектується в пряму, паралельну даній прямій* ($AB \parallel \alpha$, $A'B'$ — проекція AB, тоді $A'B' \parallel AB$).

2 Паралельні проекції деяких плоских фігур. Властивості зображень деяких многокутників у паралельній проекції.

Якщо фігура F лежить у площині, не паралельній площині проекцій α, то її проекція F' не дорівнює фігурі F.

Із властивостей паралельного проектування випливає, що паралельною проекцією многокутника є або многокутник із тим самим числом сторін, або відрізок (якщо площина многокутника паралельна напряму проектування). Причому якщо в многокутнику будь-які дві сторони паралельні, то їх проекції також будуть паралельними (у разі коли вони не лежать на одній прямій). Проте оскільки при паралельному проектуванні довжини відрізків і кути зазвичай не зберігаються, то проекцією, наприклад, рівностороннього чи прямокутного трикутника може бути довільний трикутник. Аналогічно, хоча проекцією паралелограма є паралелограм, проекцією прямокутника може бути не прямокутник, проекцією ромба — не обов'язково ромб, проекцією правильного многокутника — неправильний многокутник.

Найпростішим многокутником є трикутник. Як випливає із властивостей паралельного проектування, паралельною проекцією трикутника є трикутник або відрізок. При цьому якщо площина трикутника паралельна площині проекцій, то, як ми з'ясували, його проекцією буде трикутник, рівний даному.

Покажемо, що *в загальному випадку довільний трикутник може служити паралельною проекцією рівностороннього трикутника.*

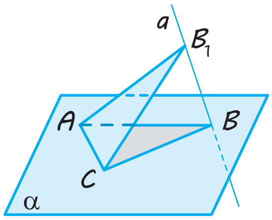


Рис. 7.7

● Дійсно, нехай дано довільний трикутник ABC в площині α (рис. 7.7). Побудуємо на одній із його сторін, наприклад AC, рівносторонній трикутник AB_1C так, щоб точка B_1 не належала площині α. Позначимо через a пряму, що проходить через точки B_1 і B. Тоді трикутник ABC є паралельною проекцією трикутника AB_1C на площину α в напрямі прямої a. ○

З'ясуємо, яка фігура є паралельною проекцією **кола**.

Нехай фігура F — коло в просторі, а фігура F' — проекція цього кола на площину α в напрямі прямої a. Якщо пряма a паралельна площині кола або лежить у ній, то проекцією кола є відрізок, що дорівнює його діаметру.

Розглянемо випадок, коли пряма a перетинає площину кола.

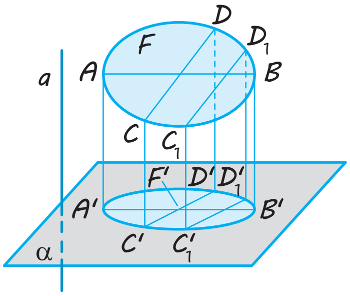
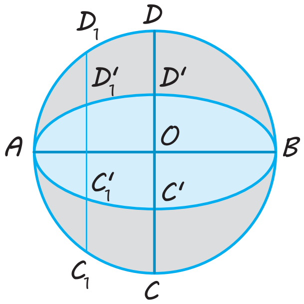


Рис. 7.8

Нехай AB — діаметр кола, паралельний площині α, і $A'B'$ — його проекція на цю площину (рис. 7.8). Тоді $AB = A'B'$. Візьмемо будь-який інший діаметр CD, і нехай $C'D'$ буде його проекцією. Позначимо відношення $C'D' : CD$ через k. Оскільки під час виконання паралельного проектування зберігаються паралельність і відношення довжин паралельних відрізків, то для довільної хорди C_1D_1, паралельної діаметру CD, її проекція $C_1'D_1'$ буде паралельною $C'D'$ і відношення $C_1'D_1' : C_1D_1$ дорівнюватиме k (якщо $CD : C_1D_1 = C'D' : C_1'D_1'$, то $C_1'D_1' : C_1D_1 = C'D' : CD = k$).

Отже, проекцію кола одержують стискуванням або розтягуванням його в напрямі будь-якого діаметра в одне й те саме число разів. Таку фігуру на площині називають *еліпсом*.

Наприклад, на рис. 7.9 зображено еліпс, одержаний стискуванням кола в напрямі діаметра CD у два рази.



◆ Рис. 7.9

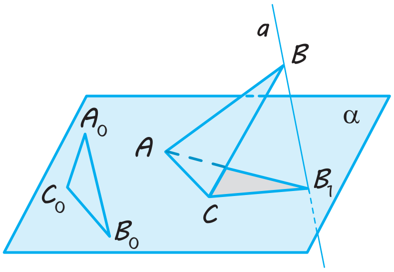
Розглянемо детальніше зображення деяких многокутників на площині, отримані за допомогою паралельного проектування.

Зображенням фігури називають або паралельну проекцію фігури, або будь-яку фігуру, подібну до проекції даної фігури.

У разі коли площина многокутника паралельна площині проекцій, його проекцією буде многокутник, рівний даному. Тому розглянемо випадки, коли площина многокутника не паралельна площині проекцій (і не паралельна напряму проектування).

Трикутник. *Зображенням будь-якого трикутника може бути довільний трикутник.*

● Нехай дано трикутник ABC (який будемо вважати оригіналом) і довільний трикутник $A_0B_0C_0$. Покажемо, що трикутник $A_0B_0C_0$ можна вважати зображенням трикутника ABC в результаті деякого паралельного проектування. Розглянемо площину α, яка не збігається з площиною трикутника ABC і проходить через його сторону AC (рис. 7.10).

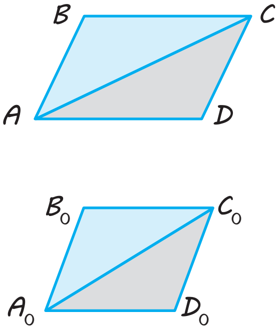


◆ Рис. 7.10

Побудуємо в площині α трикутник AB_1C, подібний до трикутника $A_0B_0C_0$ (з коефіцієнтом подібності $k=\dfrac{AC}{A_0C_0}$). Позначимо через a пряму, що проходить через точки B і B_1. Тоді трикутник AB_1C є паралельною проекцією трикутника ABC на площину α в напрямі прямої a, а, значить, подібний йому трикутник $A_0B_0C_0$ є зображенням трикутника ABC. ○

Паралелограм. *Зображенням будь-якого паралелограма* (зокрема, прямокутника, ромба, квадрата) *може бути довільний паралелограм.*

● Дійсно, нехай $ABCD$ і $A_0B_0C_0D_0$ — два довільних паралелограми (рис. 7.11). Проведемо в цих паралелограмах діагоналі AC і A_0C_0 відповідно. За попередньою властивістю зображень трикутник $A_0B_0C_0$ можна вважати зображенням трикутника ABC. Оскільки при паралельному проектуванні паралельність прямих зберігається, зображенням паралелограма $ABCD$ (оригіналу) буде паралелограм $A_0B_0C_0D_0$. ○



◆ Рис. 7.11

Трапеція. *Зображенням будь-якої трапеції може бути довільна трапеція, у якої відношення основ дорівнює відношенню відповідних основ оригіналу.*

● Дійсно, нехай $ABCD$ і $A_0B_0C_0D_0$ — дві довільні трапеції, у яких $\frac{CD}{AB}=\frac{C_0D_0}{A_0B_0}$ (рис. 7.12). Проведемо в цих трапеціях діагоналі AC і A_0C_0 відповідно. Трикутник $A_0B_0C_0$ можна вважати зображенням трикутника ABC. Оскільки при паралельному проектуванні паралельність прямих зберігається, то зображенням прямої CD, паралельної прямій AB, буде пряма C_0D_0, паралельна прямій A_0B_0. Крім того, при паралельному проектуванні зберігається відношення довжин відрізків, які лежать на паралельних прямих. Отже, зображенням трапеції $ABCD$ (оригіналу) буде трапеція $A_0B_0C_0D_0$. ○

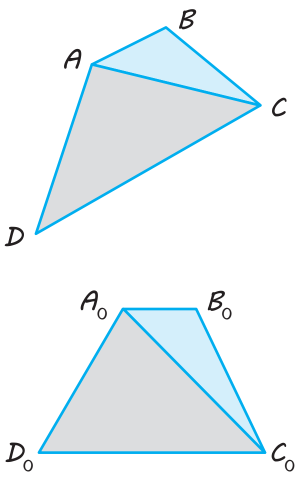


Рис. 7.12

Правильний шестикутник. *Зображенням правильного шестикутника може бути довільний шестикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні й рівні.*

● Розглянемо паралельну проекцію правильного шестикутника $ABCDEF$ із центром у точці O (рис. 7.13, *а*).

Проведемо через точку O діагоналі. Виберемо будь-який трикутник, наприклад AOB. Його проекцією може бути довільний трикутник $A_0O'B_0$ на площині проекцій. Беручи до уваги те, що в результаті паралельного проектування середина відрізка проектується в середину відрізка проекції, відкладемо $O'D_0=A_0O'$ і $O'E_0=B_0O'$. А враховуючи те, що при паралельному проектуванні зберігається паралельність прямих, проведемо через точки A_0 і D_0 прямі, паралельні прямій B_0O'; через точки B_0 і E_0 — прямі, паралельні прямій A_0O'. Точки перетину відповідних прямих позначимо F_0 і C_0. Шестикутник $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ (рис. 7.13, *б*) і буде шуканою проекцією правильного шестикутника $ABCDEF$. ○

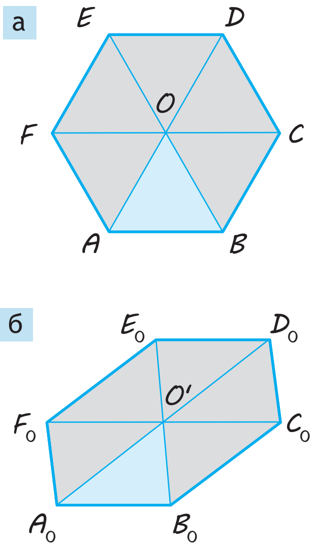


Рис. 7.13

3 Зображення деяких просторових фігур на площині.

Як ми вже відзначали, для зображення просторових фігур зазвичай використовують паралельне проектування. Усі рисунки просторових фігур, розглянуті нами раніше, було виконано в паралельній проекції. Площину, на яку проектується фігура, називають *площиною зображення*, а проекцію фігури — *зображенням*. Нагадаємо, що зображенням даної фігури називають також і будь-яку фігуру, подібну до проекції даної фігури.

Розглянемо приклади зображень просторових фігур — многогранників. Зображення многогранника складається із зображення його ребер, одержаних за допомогою паралельного проектування. При цьому всі ребра діляться на два типи: видимі й невидимі. (Уявіть собі, що паралельно напряму проектування йдуть промені світла. У результаті поверхня многогранника розіб'ється на дві частини: освітлену й неосвітлену. Видимими є ребра, які розміщені на освітленій частині.) Видимі ребра зображають суцільними лініями, а невидимі — штриховими.

Зображуючи куб, площину зображень зазвичай вибирають паралельною одній із його граней. У цьому випадку дві грані куба (передня і задня), паралельні площині зображень, зображують рівними квадратами, решту граней — паралелограмами (рис. 7.14). Аналогічним чином зображують прямокутний паралелепіпед (рис. 7.15).

Якщо не дотримуватися правила, що площина зображень має бути паралельною одній із граней, то в одержаному зображенні зберігатиметься тільки паралельність і рівність протилежних сторін квадрата чи прямокутника (тобто всі грані будуть паралелограмами). Тоді зображення куба чи прямокутного паралелепіпеда може мати вигляд, наведений на рис. 7.16. Але таке зображення недостатньо наочне і може утруднювати розв'язування задач, пов'язаних із цими тілами. Тому ми не будемо користуватися ними (але ще раз підкреслимо, що такі зображення є правильними).

Для побудови зображення призми достатньо побудувати многокутник, що зображає її основу. Потім із вершин многокутника слід провести прямі, паралельні деякій фіксованій прямій, і відкласти на них рівні відрізки. Сполучивши кінці цих відрізків, одержимо многокутник, що є зображенням другої основи призми (рис. 7.17).

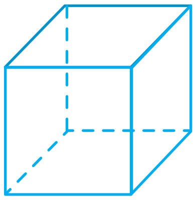


Рис. 7.14

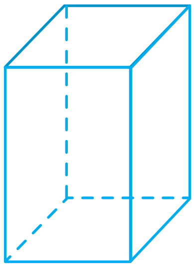


Рис. 7.15

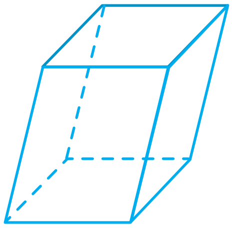


Рис. 7.16

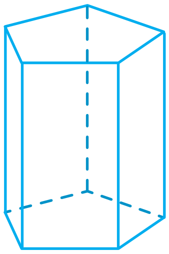


Рис. 7.17

Щоб побудувати зображення піраміди, достатньо побудувати многокутник, що зображає її основу. Потім потрібно вибрати довільну точку, яка зображатиме вершину піраміди, і сполучити її відрізками з вершинами многокутника (рис. 7.18). Одержані відрізки зображатимуть бічні ребра піраміди.

Зауважимо, що, наприклад, рис. 7.18 є зображенням піраміди тільки у випадку, коли з тексту, який супроводить цей рисунок, ми знаємо, що розглядається піраміда. Якщо ж такого пояснення немає, то можна вважати також, що на рис. 7.18 зображено плоску фігуру — чотирикутник $SABC$ із діагоналлю SB, усередині якого взято точку D, що сполучена штриховими лініями з точками S, A і C.

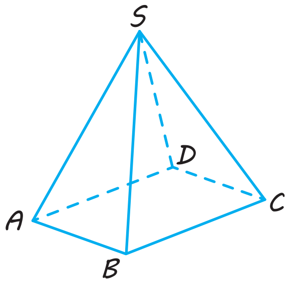


Рис. 7.18

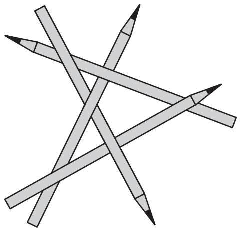


Рис. 7.19

Звернемо увагу на той факт, що плоске зображення, підпорядковуючись певним законам, здатне передати уявлення про тривимірний предмет. Проте при цьому можуть виникати ілюзії. Наприклад, на рис. 7.19 зображено фігуру, яку неможливо скласти з дерев'яних прямолінійних олівців (поясніть чому).

У живописі існує напрям, який називають «імпосибілізм» — зображення неможливих фігур, парадоксів. Відомий голландський художник М. Ешер у гравюрах «Бельведер» (рис. 7.20), «Підіймаючись і опускаючись» (рис. 7.21), «Водоспад» (рис. 7.22) тощо зобразив неможливі об’єкти.


Рис. 7.20

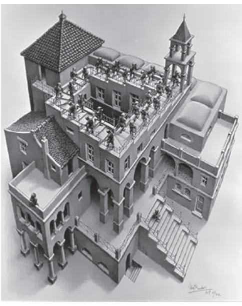


Рис. 7.21

Імпосибілізм — від англ. *impossibility* — неможливість.


Рис. 7.22

Сучасний шведський архітектор О. Рутерсвард присвятив неможливим об’єктам серію своїх художніх робіт. Деякі з них наведено на рис. 7.23–7.25.

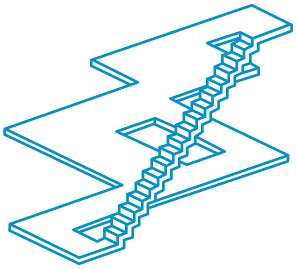


Рис. 7.23

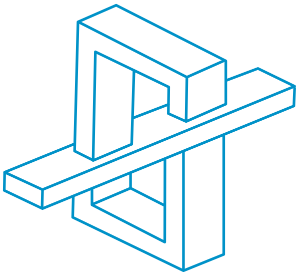


Рис. 7.24

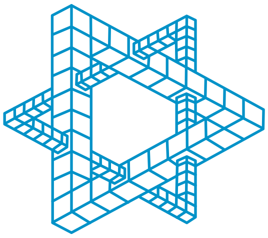


Рис. 7.25

Докладніше про **центральне проектування** можна дізнатися, звернувшися до інтернет-підтримки підручника.

4 Зображення просторових фігур в результаті центрального проектування.

Разом із паралельним проектуванням, що використовують у геометрії для зображення просторових фігур, велике значення має так зване *центральне проектування*, яке застосовують у живописі, фотографії тощо. Сприйняття людиною навколишніх предметів за допомогою зору здійснюється за законами центрального проектування.

Нехай α — деяка площина, а точка S, що не належить їй,— центр проектування (рис. 7.26). Для точки A простору проведемо пряму a через точки S і A. Точку перетину цієї прямої з площиною α називають *центральною проекцією точки A на площину* α. Позначимо її A'.

Спосіб проектування, при якому точкам A простору ставлять у відповідність їх центральні проекції A', називається *центральним проектуванням*.[*]

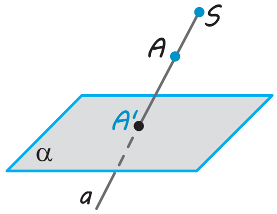


Рис. 7.26

Центральна проекція не означена для точок, які лежать у площині, що проходить через центр проектування і паралельна площині проекцій (оскільки в цьому випадку пряма SA буде паралельною площині α).

Центральні проекції всіх точок фігури F у просторі на площину α утворюють фігуру F', яку називають центральною проекцією фігури F на площину α.

Наведемо приклади зображення куба в центральній проекції.

На рис. 7.27 зображено куб у центральній проекції на площину, паралельну грані ABB_1A_1. (Поясніть, чому в цьому разі зображення AD, BC, B_1C_1, A_1D_1 паралельних прямих перетинаються в одній точці.)

На рис. 7.28 зображено куб у центральній проекції на площину, паралельну ребру BB_1, але не паралельну його граням.

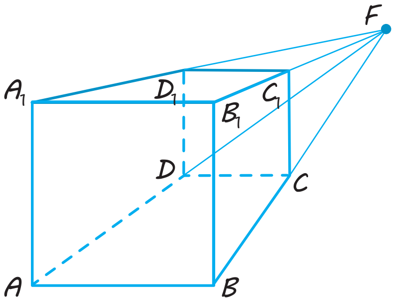


Рис. 7.27

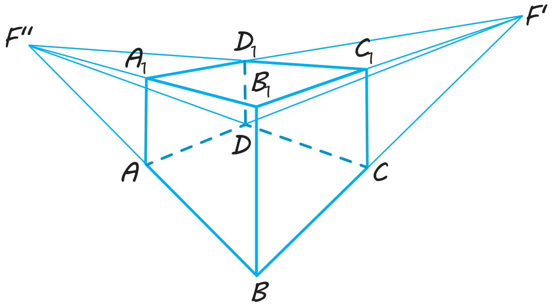


Рис. 7.28

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Чи може паралелограм бути паралельною проекцією трапеції?

Розв'язання	Коментар
▶ Ні, не може, оскільки в трапеції прямі, на яких лежать бічні сторони, перетинаються. Отже, точка перетину цих прямих повинна проектуватися в точку перетину їх проекцій, тобто в точку перетину прямих, на яких лежать протилежні сторони паралелограма-проекції. Але це неможливо, оскільки протилежні сторони паралелограма лежать на паралельних прямих, тобто не перетинаються. ◁	Щоб спростувати дане твердження, використаємо метод доведення від супротивного. Припустимо, що паралельною проекцією трапеції є паралелограм. Спираючись на властивості паралельного проектування та властивості трапеції і паралелограма, одержимо суперечність із якоюсь із цих властивостей.

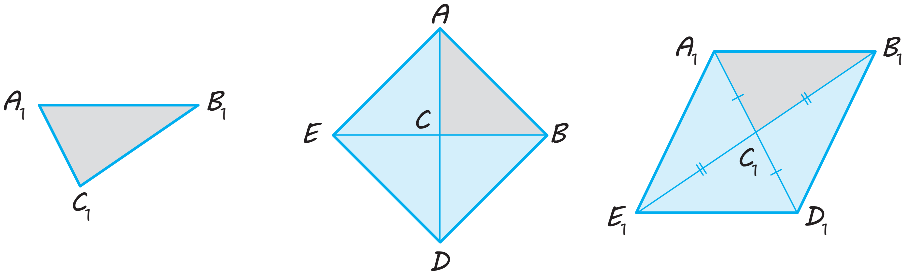
---

[*] Часто центральне проектування ще називають перспективою.

Задача 2*

На зображенні $A_1B_1C_1$ (рис. 7.29, *а*) рівнобедреного прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$ побудуйте зображення квадрата, який лежить у площині трикутника, якщо стороною квадрата служить гіпотенуза трикутника і вершина прямого кута розташована всередині квадрата.

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай на гіпотенузі AB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC побудовано квадрат $ABDE$ так, що вершина C розташована всередині квадрата (рис. 7.29, *б*). Тоді точка C є точкою перетину його діагоналей (оскільки діагоналі квадрата, а також катети AC та BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC утворюють кути по 45° зі стороною AB). Отже, точка C — середина діагоналей BE і AD. Однак в результаті проектування середина відрізка проектується в середину проекції відрізка. Тому продовжимо сторони A_1C_1 і B_1C_1 за точку C_1 та відкладемо $C_1D_1 = A_1C_1$ і $C_1E_1 = C_1B_1$. Послідовно сполучаючи точки A_1, E_1, D_1, B_1 відрізками, одержуємо чотирикутник $A_1B_1D_1E_1$ (рис. 7.29, *в*) — шукане зображення квадрата $ABDE$. ◁	На етапі аналізу умови задачі розглядаємо фігури-оригінали та виділяємо такі їх властивості, які зберігаються при паралельному проектуванні (паралельність прямих і відношення відрізків однієї прямої чи паралельних прямих). Зокрема, після з'ясування того, що у квадраті $ABDE$ (рис. 7.29, *б*) точка C — середина відрізків BE і AD, складаємо *план побудови*: продовжити сторони A_1C_1 і B_1C_1 за точку C_1 і відкласти відрізки, що дорівнюють відповідним сторонам даного трикутника, так, щоб точка C_1 була серединою діагоналей A_1D_1 і B_1E_1 побудованого чотирикутника $A_1B_1D_1E_1$.

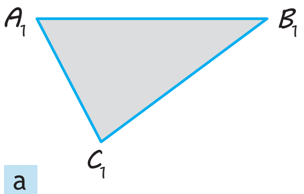


а б в

Рис. 7.29

Задача 3

Трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 7.30, *а*) служить зображенням прямокутного трикутника ABC, у якого відношення катетів $BC : AC = 3 : 4$. Побудуйте зображення центра кола, вписаного в трикутник ABC.



а

Рис. 7.30

Розв’язання

▶ Розглянемо трикутник-оригінал ABC (рис. 7.30, *б*). За умовою катети трикутника пропорційні числам 3 і 4. Якщо позначити коефіцієнт пропорційності через k, то $BC=3k$, $AC=4k$. Тоді за теоремою Піфагора $AB=5k$.

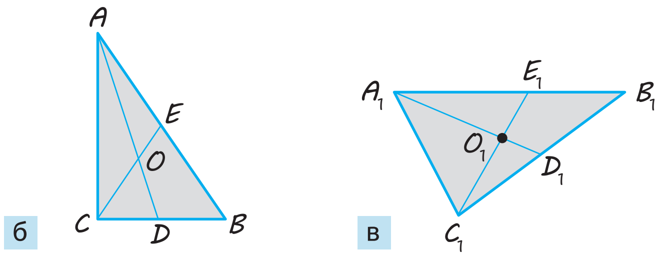
Центр O вписаного кола є точкою перетину бісектрис CE і AD трикутника ABC. За властивістю бісектриси трикутника маємо:

$$\frac{BE}{AE}=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{4}.$$

При паралельному проектуванні зберігається відношення відрізків однієї прямої. Тому якщо E_1 і D_1 — проекції точок E і D відповідно, то

$$\frac{B_1E_1}{A_1E_1}=\frac{BE}{AE}=\frac{3}{4} \text{ і } \frac{C_1D_1}{B_1D_1}=\frac{CD}{BD}=\frac{4}{5}.$$

Отже, будуємо точки E_1 і D_1, які відповідно ділять дані відрізки A_1B_1 і B_1C_1 у вказаних відношеннях (рис. 7.30, *в*). Сполучивши точки C_1 і E_1 та A_1 і D_1 відрізками, дістаємо зображення C_1E_1 і A_1D_1 бісектрис трикутника ABC і точку O_1 їх перетину — шукане зображення центра кола, вписаного в трикутник ABC. ◁



◆ Рис. 7.30

Коментар

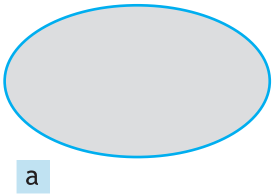
На етапі аналізу умови задачі розглядаємо фігуру-оригінал і пробуємо визначити такі її властивості, які зберігаються при паралельному проектуванні (паралельність прямих і відношення відрізків однієї прямої чи паралельних прямих).

Центр вписаного кола розташований у точці перетину бісектрис, а бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам. Тому для побудови бісектрис достатньо знайти відношення відповідних сторін даного прямокутного трикутника.

Одержуємо *план побудови*: крім даного відношення катетів, знайти відношення катета і гіпотенузи та побудувати бісектриси, ураховуючи, що відношення відрізків однієї прямої при паралельному проектуванні зберігається.

Задача 4

На зображенні кола (рис. 7.31, *а*) побудуйте зображення перпендикулярних діаметрів.



◆ Рис. 7.31

Розв’язання

▶ Нехай в даному колі (рис. 7.31, *б*) діаметри AB і CD перпендикулярні (перетинаються в центрі O, який є серединою кожного з них). Проведемо дві хорди KM і ET перпендикулярно до діаметра AB (тоді $ET \parallel KM \parallel CD$). Ураховуючи, що діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл, дістаємо точки L і N, що є серединами хорд ET і KM відповідно. Оскільки при проектуванні зберігається паралельність прямих і проекцією середини відрізка є середина проекції відрізка, будуємо шукані зображення таким чином.

1. На зображенні кола проводимо дві довільні паралельні хорди E_1T_1 і K_1M_1 (рис. 7.31, *в*).
2. Через середини L_1 і N_1 цих хорд проводимо хорду A_1B_1 — шукане зображення діаметра AB кола.
3. Через середину O_1 хорди A_1B_1 паралельно хорді K_1M_1 проводимо хорду C_1D_1, яка і є зображенням діаметра CD, перпендикулярного до діаметра AB. ◁

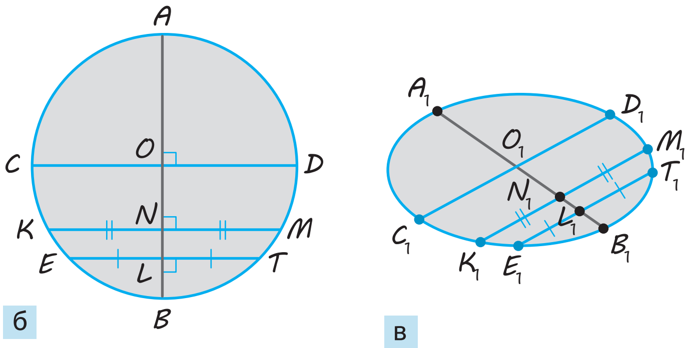


Рис. 7.31

Коментар

На етапі аналізу умови задачі розглядаємо фігуру-оригінал і пробуємо виділити такі її властивості, які зберігаються при паралельному проектуванні (паралельність прямих і відношення відрізків однієї чи паралельних прямих). На цьому і ґрунтується план розв’язування (іноді для його складання доводиться виконувати на оригіналі якісь додаткові побудови).

Оскільки на рис. 7.31, *а* немає навіть зображення центра кола, то для його отримання достатньо побудувати зображення довільного діаметра (серединою якого і буде зображення центра).

Розглядаючи коло-оригінал на рис. 7.31, *б*, згадуємо такі властивості діаметра, які можна використати під час проектування. Зокрема, діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її (а отже, і паралельну їй хорду) навпіл.

Складаємо *план побудови*: на зображенні кола провести довільні паралельні хорди; через їх середини провести зображення діаметра; через середину одержаного відрізка провести хорду, паралельну першим двом хордам.

Запитання

1. Поясніть, що називається паралельною проекцією точки та фігури на дану площину.
2. Сформулюйте властивості паралельного проектування.
3.* Доведіть властивості паралельного проектування.
4. Якою фігурою може бути паралельна проекція трикутника, паралелограма, трапеції, кола, якщо площина фігури не паралельна напряму проектування?
5.* Доведіть, що зображенням даного трикутника може бути довільний трикутник.
6.* Доведіть, що зображенням будь-якого паралелограма може бути довільний паралелограм.

7.* Доведіть, що зображенням будь-якої трапеції може бути довільна трапеція, у якої відношення основ дорівнює відношенню відповідних основ оригіналу.

8. Поясніть, як можна побудувати проекцію правильного шестикутника.

9. На прикладі зображення прямокутного паралелепіпеда поясніть, як виконують зображення многогранника.

Вправи

7.1.° Які фігури можуть служити паралельними проекціями трикутника?

7.2.° Чи може паралельною проекцією правильного трикутника бути:
1) прямокутний трикутник;
2) рівнобедрений трикутник;
3) різносторонній трикутник?

7.3.° Якою фігурою може бути паралельна проекція:
1) прямокутника; 2) паралелограма; 3) трапеції?

7.4.° Чи може паралельною проекцією прямокутника бути:
1) квадрат; 2) паралелограм; 3) ромб; 4) трапеція?

7.5.° Чи є правильним, що проекцією ромба, якщо він не проектується у відрізок, завжди буде ромб? Коли це твердження виконується?

7.6.° Чи є правильним, що в результаті паралельного проектування трикутника завжди:
1) медіани проектуються в медіани;
2) висоти проектуються у висоти;
3) бісектриси проектуються в бісектриси?

7.7.° Дано паралельну проекцію трикутника. Як побудувати проекції медіан цього трикутника?

7.8.° Дано паралельну проекцію трикутника. Як побудувати проекції середніх ліній цього трикутника?

7.9. Чи може проекцією трапеції з основами 4 см і 8 см бути трапеція з основами 2 см і 6 см? Відповідь поясніть.

7.10. Чи може паралельною проекцією двох непаралельних прямих бути пара паралельних прямих? Якщо може, то наведіть приклад таких прямих.

7.11. Які з властивостей ромба є правильними і для зображення цього ромба? Які можуть не зберегтися?

7.12. Які властивості прямокутника є правильними і для його проекції?

7.13. Побудуйте довільний паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ і, прийнявши його за паралельну проекцію квадрата $ABCD$, побудуйте проекцію:
1) центра кола, описаного навколо квадрата $ABCD$;
2) перпендикуляра OM, проведеного з центра O квадрата $ABCD$ на сторону AD.

7.14. Побудуйте довільний трикутник $A_1B_1C_1$ і, прийнявши його за паралельну проекцію трикутника ABC зі сторонами $AB = 2$ см, $BC = 6$ см, $AC = 5$ см, побудуйте зображення бісектриси трикутника, проведеної з вершини B.

7.15. На зображенні рівнобедреного прямокутного трикутника побудуйте зображення квадрата, який лежить у площині трикутника, якщо стороною квадрата служить катет даного трикутника.

7.16.* Зобразіть еліпси, одержані з даного кола:

1) стискуванням;
2) розтягуванням у 3 рази.

7.17.* Трикутник $A_1B_1C_1$ є паралельною проекцією трикутника ABC. Знайдіть відстань між точками перетину медіан цих трикутників, якщо відстані між відповідними вершинами цих трикутників дорівнюють:

1) 4 см, 6 см, 8 см; 2) a, b, c.

7.18. Чи можна паралелограм $ABCD$ перегнути по діагоналі AC так, щоб проекцією трикутника ABC на площину ADC був трикутник ADC?

7.19. Точки A, B і C лежать на одній прямій і проектуються на площину α в точки A_1, B_1, C_1 відповідно. Знайдіть A_1B_1, якщо $AB = 7$, $AC = 3$, а $B_1C_1 = 5$, а точка A лежить між точками B і C.

7.20. Доведіть, що паралельною проекцією центрально-симетричної фігури також є центрально-симетрична фігура.

7.21. Дано мимобіжні прямі a і b. Проведіть площину α так, щоб у випадку довільного вибору проектуючої прямої паралельні проекції прямих a і b на площину α перетиналися.

7.22. Дано мимобіжні прямі a і b та площину проекцій α. Проведіть проектуючу пряму l так, щоб паралельні проекції прямих a і b на площину α були паралельними. Чи завжди має розв'язок ця задача?

7.23. Дано зображення рівнобедреного трикутника у вигляді різностороннього трикутника. На цьому зображенні побудуйте:

1) зображення бісектриси кута, протилежного основі;
2) зображення перпендикуляра до основи, проведеного через середину бічної сторони.

7.24. Трикутник $A_1B_1C_1$ є зображенням трикутника ABC, у якого $AB : BC = 2 : 3$. Побудуйте зображення бісектриси кута B.

7.25. Дано зображення трикутника і двох його висот. Побудуйте зображення центра кола, описаного навколо трикутника-оригіналу.

7.26. Трикутник $A_1B_1C_1$ є зображенням прямокутного трикутника ABC, у якого відношення катета до гіпотенузи $BC : AB = 5 : 12$. Побудуйте зображення центра кола, вписаного в трикутник ABC.

7.27. На зображенні правильного шестикутника побудуйте зображення:

1) бісектриси одного з його зовнішніх кутів;
2) перпендикуляра, проведеного із центра на одну з менших діагоналей.

7.28. Побудуйте на зображенні ромба зображення його висоти, якщо гострий кут ромба дорівнює 45°.

7.29. Використовуючи зображення кола в паралельній проекції, побудуйте зображення вписаного в нього квадрата.

7.30. Використовуючи зображення кола, побудуйте зображення прямокутного трикутника, вписаного в це коло.

7.31. Використовуючи зображення кола в паралельній проекції, побудуйте зображення дотичної, яка:
1) паралельна даній хорді;
2) проходить через дану точку на зображенні кола.

7.32. Зобразіть паралельну проекцію квадрата:
1) із вписаним у нього колом;
2) з описаним навколо нього колом.

7.33. Дано зображення кола. Побудуйте зображення правильного трикутника:
1) вписаного в дане коло; 2) описаного навколо нього.

7.34. Дано зображення $A_1B_1C_1D_1$ рівнобічної трапеції $ABCD$ з основами AB і CD, кути при основі якої дорівнюють 45°. Побудуйте зображення центра кола, описаного навколо трапеції.

7.35.* У трапецію $ABCD$ з основами AB і CD можна вписати коло, а кути при її основі дорівнюють 90° і 60°. На зображенні $A_1B_1C_1D_1$ даної трапеції побудуйте зображення центра вписаного в неї кола.

7.36. Дано зображення ромба, у якого одна з діагоналей дорівнює стороні. Зобразіть проекції висот ромба, що проходять через точку перетину діагоналей.

7.37.* Дано зображення рівнобічної трапеції, у яку можна вписати коло. Позначте точки дотику цього кола до сторін трапеції.

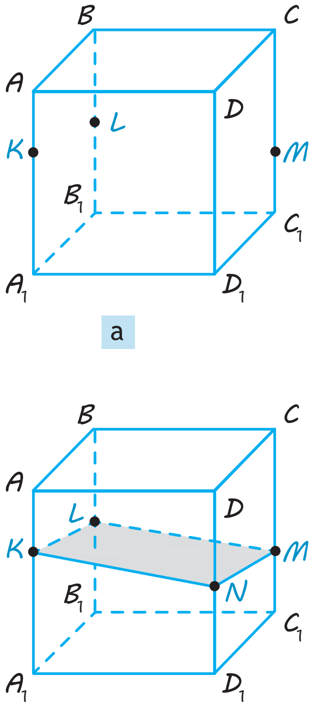
Виявіть свою компетентність

7.38. Створіть презентацію за темою «Неможливі фігури Рутерсварда». Поясніть, чому ці фігури не можуть існувати в реальному житті.

§ 8 МЕТОДИ ПОБУДОВИ ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Використання властивостей паралельних прямих і площин



а

б

Рис. 8.1

Якщо даний многогранник містить паралельні грані, які перетинає площина перерізу, то за теоремою 6.2 прямі перетину січної площини з цими гранями будуть паралельними.

Наприклад, побудуємо переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.1, *а*) площиною, яка проходить через точки K, L, M, розташовані на його ребрах ($K \in AA_1$, $L \in BB_1$, $M \in CC_1$). Спочатку сполучаємо відрізками пари точок, що лежать в одній грані, і одержуємо відрізки KL і LM (рис. 8.1, *б*), по яких площина перерізу перетинає грані ABB_1A_1 і BCC_1B_1 відповідно.

Потім ураховуємо, що протилежні грані паралелепіпеда попарно паралельні, наприклад, пл. $AA_1D_1D \parallel$ пл. BCC_1B_1, і робимо висновок, що площина перерізу перетинає грань AA_1D_1D по прямій KN, паралельній LM. Проводимо $KN \parallel LM$, $N \in D_1D$ і сполучаємо відрізками точки N і M. Чотирикутник $KLMN$ — шуканий переріз.

Іноді використання властивостей паралельних прямих і площин поєднують з іншими методами побудови перерізів многогранників.

2 Метод слідів

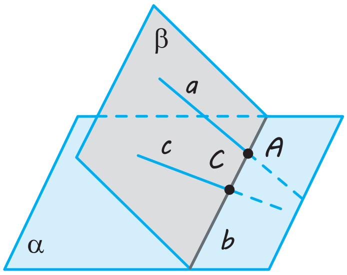


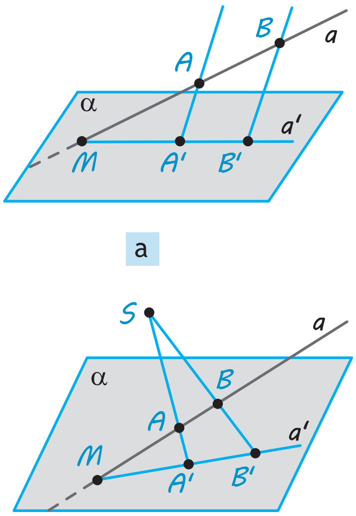
Рис. 8.2

Як зазначалося в § 3, для побудови складніших перерізів многогранників часто буває зручним застосовувати *метод слідів*. Використовуючи його, спочатку будують пряму перетину січної площини з площиною якоїсь грані (*слід* січної площини на цій грані), а потім уже знаходять точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (чи з їх продовженнями). Іноді потрібно розглядати певні допоміжні площини, для яких також будують слід січної площини (або слід цієї допоміжної площини на площині якоїсь грані). Нагадаємо, що *для отримання сліду* (прямої b) *площини* β *на площині* α (рис. 8.2) *достатньо знайти точки перетину двох прямих площини* β *з площиною* α (оскільки дві точки, наприклад A і C, однозначно визначають пряму b). *Точка перетину будь-якої прямої* a *площини* β *з площиною* α *завжди лежить на сліді площини* β *на площині* α (на прямій b).

Після розгляду паралельного та центрального проектування ми можемо уточнити зміст методу слідів, пов'язаного з використанням відповідних проекцій. Якщо розглядати слід січної площини на площині проекцій, то разом із кожною точкою можна розглядати і її проекцію на цю площину. Тоді для побудови відповідного сліду січної площини доводиться двічі знаходити точки перетину прямої і площини за двома даними точками цієї прямої та їх проекціями на площину.

Наприклад, нехай пряма a проходить через точки A, B і відомо паралельні (рис. 8.3, *а*) чи центральні (рис. 8.3, *б*) проекції A', B' цих точок на площину α. Тоді точка M перетину прямої a з її проекцією — прямою a' (яка проходить через точки A', B') і буде шуканим перетином прямої a з площиною α. Отже, **щоб знайти точку перетину прямої з площиною проекцій, достатньо знайти точку перетину прямої з її проекцією на цю площину.**

Таким чином, для побудови перерізів многогранників методом слідів ми можемо використовувати паралельне проектування (у задачах, пов'язаних із призмами) чи центральне проектування (у задачах, пов'язаних із пірамідами). Часто як площину проекцій вибирають площину основи многогранника (як центр проектування — вершину піраміди, протилежну до основи).



а

б

Рис. 8.3

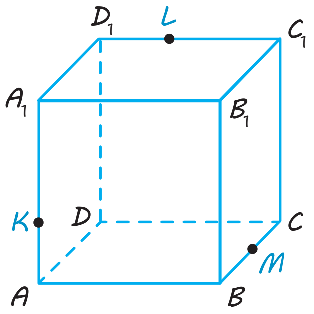


Рис. 8.4

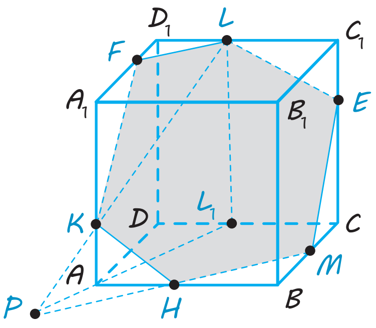


Рис. 8.5

Використовуючи метод слідів, побудуємо переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через три точки K, L, M, які лежать на попарно мимобіжних ребрах куба (рис. 8.4).

Розглянемо паралельне проектування даних точок на площину основи $ABCD$ в напрямі бічного ребра куба. Тоді проекціями точок K, M, L будуть відповідно точки A, M, L_1, де $LL_1 \parallel D_1D$ (рис. 8.5).

Знайдемо точку перетину прямої LK, яка лежить у площині перерізу, з площиною основи куба. Шуканою точкою буде точка P перетину прямої LK з її проекцією L_1A. Ця точка належить площині перерізу і площині основи куба. Отже, площина перерізу перетинає основу куба по прямій MP (це і є слід січної площини на площині основи куба). Точка H перетину цієї прямої з ребром AB є ще однією точкою перерізу куба. Сполучаємо точки K і H, H і M відрізками.

Далі використаємо паралельність протилежних граней куба — січна площина перетинає їх по паралельних прямих. Через точку L проведемо пряму, паралельну KH, і точку її перетину з ребром CC_1 позначимо E. Сполучимо точки E і M відрізком. Через точку L проведемо також пряму, паралельну HM, і точку її перетину з ребром A_1D_1 позначимо F. Сполучимо точки L і F, K і F відрізками. Шестикутник $KHMELF$ і буде шуканим перерізом куба даною площиною.

Іноді метод слідів достатньо складно реалізувати на практиці, якщо точка перетину прямої, що лежить у січній площині, та її проекції розташовані поза межами аркуша, на якому виконують побудову перерізу. У цьому випадку використовують інший метод, який дозволяє виконувати всі необхідні побудови в межах зображення даного многогранника.

3 Метод внутрішнього проектування

Розглянемо *суть цього метода*. Маючи три точки, які визначають площину перерізу, знаходять їх проекції на деяку площину (найчастіше на площину основи многогранника). Також знаходять проекцію якоїсь, ще не побудованої, точки перерізу. Цю невідому точку перерізу вибирають (як правило, на бічному ребрі многогранника) таким чином, щоб будь-які два відрізки, які сполучають чотири точки-проекції, перетиналися у внутрішній точці цих відрізків. За трьома даними точками і чотирма проекціями знаходять четверту точку, що належить площині перерізу. Якщо потрібно, так само одержують п'яту, шосту і т. д. точки, які належать площині перерізу і ребрам многогранника, тобто одержують переріз.

Використовуючи метод внутрішнього проектування, ще раз розв'яжемо попередню задачу та побудуємо переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через три точки K, L, M, які лежать на попарно мимобіжних ребрах (рис. 8.6).

Як і в наведеному вище розв'язанні, розглянемо паралельне проектування даних точок на площину основи $ABCD$ в напрямі бічного ребра куба — проекціями точок K, M, L будуть відповідно точки A, M, L_1, де $LL_1 \parallel D_1D$ (рис. 8.7). Знайдемо точку E перетину січної площини з ребром CC_1. Проекцією точки E на площину основи є точка C. Сполучимо чотири одержані точки-проекції двома відрізками AC і L_1M. Вони перетинаються в точці X_1, яка є проекцією деякої точки X січної площини. У цій точці пряма LM перетинається з поки що не повністю визначеною прямою KE. Проводячи через точку X_1 пряму, паралельну напряму проектування $\left(X_1X \parallel L_1L\right)$, у перетині її з прямою LM одержуємо точку X. Тепер проводимо пряму KX до перетину її з ребром CC_1 у точці E. Сполучаючи одержану точку E з даними точками L і M відрізками, одержуємо дві сторони шуканого перерізу.

Подальші побудови, як і в першому способі розв'язування, спираються на паралельність протилежних граней куба, які січна площина перетинає по паралельних прямих. Через точку K проведемо пряму, паралельну LE, і точку її перетину з ребром AB позначимо H. Сполучаємо точки H і M відрізком. Через точку K проведемо також пряму, паралельну ME, і точку її перетину з ребром A_1D_1 куба позначимо F. Сполучаємо точки L і F відрізком. Шестикутник $KHMELF$ і буде шуканим перерізом куба даною площиною.

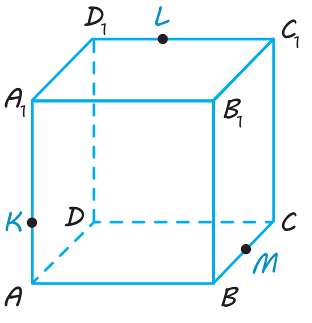


Рис. 8.6

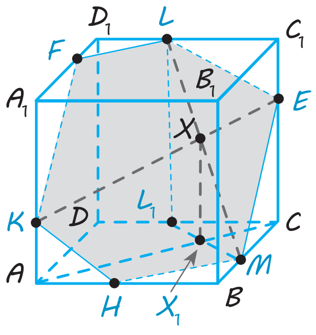


Рис. 8.7

Запитання

1. Наведіть приклад використання властивостей паралельних прямих і площин для побудови перерізу многогранника.
2. Поясніть, як можна знайти слід прямої на площині, використовуючи проекцію прямої на цю площину.
3.* Поясніть зміст методу внутрішнього проектування для побудови перерізів многогранників.

Вправи

8.1. Дайте відповідь на запитання щодо перерізу куба площиною. Якщо відповідь ствердна, проілюструйте її, якщо ні — обґрунтуйте. Чи можна в перерізі куба площиною одержати:
1) трикутник;
2) правильний трикутник;
3) рівнобедрений трикутник;
4) прямокутний трикутник;
5) тупокутний трикутник?

8.2. Чи можна в перерізі куба площиною одержати:
1) квадрат;
2) ромб;
3) прямокутник;
4) трапецію;
5) паралелограм, кути якого не є прямими;
6) прямокутну трапецію?

8.3. Чи можна в перерізі куба площиною одержати:
1) п’ятикутник; 2) правильний п’ятикутник?

8.4. Чи можна в перерізі куба площиною одержати:
1) шестикутник;
2) правильний шестикутник;
3) многокутник із числом сторін більше шести?

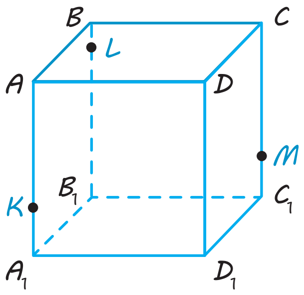


Рис. 8.8

8.5. Якою фігурою є переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через вершини A_1, C і точку K — середину ребра DD_1?

8.6. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки M, N, K — відповідно середини ребер A_1D_1, C_1D_1, AD. Визначте форму перерізу.

8.7. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки K, L, M (рис. 8.8). Визначте форму перерізу.

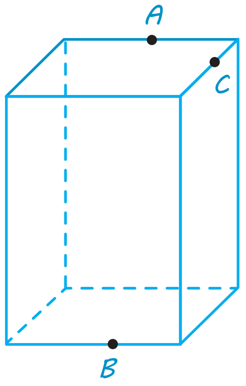


Рис. 8.9

8.8. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через вершини B, D і точку M, узяту на ребрі C_1D_1. Визначте форму перерізу.

8.9. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда площиною, що проходить через три точки, розташовані так, як показано на рис. 8.9.

8.10. Побудуйте переріз правильної чотирикутної піраміди площиною, що проходить через точки, зображені на рис. 8.10.

8.11. Побудуйте переріз правильної чотирикутної піраміди площиною, що проходить через середину бічного ребра паралельно бічній грані.

8.12. Які многокутники можна одержати в перерізі чотирикутної піраміди площиною?

8.13.* Чи можна в перерізі правильного тетраедра площиною одержати квадрат?

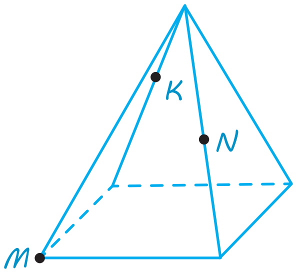


Рис. 8.10

8.14. Побудуйте переріз правильної шестикутної призми площиною, яка проходить через точки, зображені на рис. 8.11.

8.15. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через вершини C і D_1 та точку K ребра B_1C_1.

8.16. Побудуйте переріз тетраедра $ABCD$ площиною, що проходить через середину ребра DC та вершину B і паралельна прямій AC.

8.17. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через середину ребра A_1D_1 та вершини D і C_1.

8.18. Побудуйте переріз тетраедра $DABC$ площиною, що проходить через вершину A та точку M ребра DB і паралельна ребру BC.

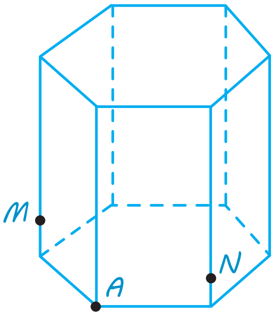


Рис. 8.11

8.19. У тетраедрі $DABC$ точки E, P, M належать відповідно ребрам AD, DB, BC, причому прямі EP і AB не паралельні. Побудуйте переріз тетраедра площиною EPM.

8.20. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E належить ребру CD. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через цю точку і паралельна площині BC_1D.

8.21. У тетраедрі $DABC$ точки E, K, P належать ребрам AB, DB і DC відповідно, причому пряма PK не паралельна ребру BC. Побудуйте переріз тетраедра площиною EKP.

8.22. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка H належить ребру CD. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через цю точку і паралельна площині ACD_1.

8.23. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a. Побудуйте переріз куба площиною і знайдіть площу перерізу, якщо площина перерізу проходить через:

1) вершини A і D_1 та середину ребра BB_1;

2) вершину A і паралельна площині DBC_1;

3) середини ребер BB_1 і B_1C_1 та середину відрізка AB_1.

Виявіть свою компетентність

8.24. Дерев'яний куб розпилюють так, що пилка проходить через точки K, P і T — середини відповідних ребер куба (рис. 8.12). Яка фігура буде в перерізі?

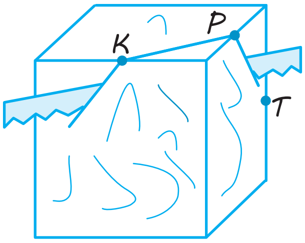


Рис. 8.12

Відомості з історії

Центральне проектування, або перспектива, як спосіб зображення просторових тіл виникло ще в Стародавній Греції. Перші згадки про перспективу містяться в роботах **Есхіла** (525—456 рр. до н. е.). Значну увагу зображенню просторових фігур з використанням перспективи приділив у трактаті «Про геометрію» відомий мислитель і вчений **Демокріт** (бл. 460—370 рр. до н. е.).

Наступну згадку про перспективу знаходимо в роботах Евкліда. Крім своїх знаменитих «Начал», він написав багато інших творів. Зокрема, у роботі «Оптика» Евклід із позицій геометрії детально виклав природу людського зору — того, як одержується зображення різних предметів на сітківці ока. Евклід писав, що ми відчуваємо предмети, коли прямолінійні промені, які йдуть від них, сходяться в нашому оці. Тому всю систему променів зору можна уявити собі у вигляді піраміди, вершина якої міститься в оці, а її основою служить предмет, що розглядається нами. Евклід увів також постулат про те, що видимі розміри предмета залежать від кута, під яким його розглядають.

Найвизначнішими роботами з перспективи давньогрецького періоду вважають твори римського архітектора й інженера **Марка Вітрувія Полліона** (бл. 80—70 — бл. 15 р. до н. е.). Способи побудови зображень у перспективі вчений виклав у праці «Про архітектуру», що складається з десяти книг.

Подальшим важливим етапом у розвитку теорії перспективи стала епоха Відродження. Теоретиком перспективи вважають італійського архітектора **Філіппо Брунеллескі** (1377—1446).

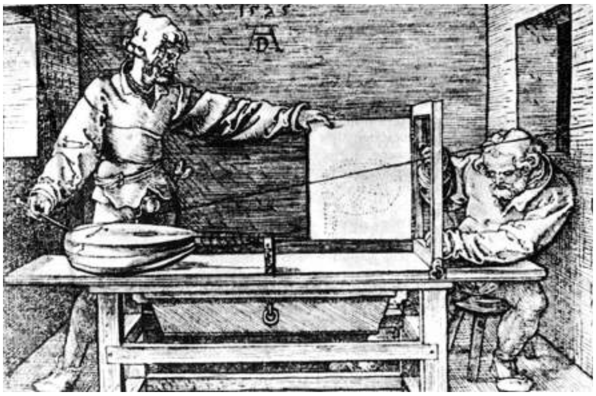


Рис. 8.13

На практиці теоретичні досягнення втілили у своїх полотнах великі художники **Леонардо да Вінчі** (1452—1519), **Альбрехт Дюрер** (1471—1528) і багато інших.

А. Дюрер запропонував у своїх книгах декілька пристроїв, що дають змогу одержувати перспективу, деякі з них він зобразив на гравюрах. Наприклад, на одній (рис. 8.13) показав, що для отримання перспективного зображення предмета між оком спостерігача і предметом поміщається рамка, розділена на невеликі квадрати сіткою. За допомогою натягнутої нитки спочатку копіюють контури моделі, а потім одержане зображення переносять на папір.

Леонардо да Вінчі описав принцип дії камери-обскури у своєму творі «Трактат про живопис» і використав цей апарат для створення картин. (Зауважимо, що подібний пристрій згадувався у працях Евкліда, Аристотеля та інших учених давнини.) У тому ж творі Леонардо да Вінчі виокремив три основних види перспективи.

1. Лінійна перспектива, яка вивчає закони побудови зменшення фігур у міру віддалення їх від спостерігача.
2. Повітряна та колірна перспектива, яка трактує зміну кольору предметів залежно від їх відстані до спостерігача і впливу шару повітря на насиченість і локальність кольору.
3. Перспектива чіткості контура предмета, яка визначає ступінь виразності меж фігур і контрасту світла та тіні на них у міру віддалення їх у глибину простору, що зображають на картині.

Два останніх види перспективи не набули подальшого теоретичного розвитку через складність дослідження проблеми. Дослідження першого виду дозволили розвинути галузь точної науки — лінійну перспективу, яка пізніше ввійшла як складова до нарисної геометрії.

Засновником цього розділу геометрії вважають французького вченого, геометра, інженера й активного громадського діяча Великої французької революції **Гаспара Монжа** (1746—1818). Його книга «Нарисна геометрія», видана в 1795 р., була першим систематизованим викладом методів зображення просторових фігур на площині.

Звернемо увагу на те, що в XV ст. картини європейських художників стали значно якіснішими — з'явилося більше реалістичних деталей, точніше відображалася гра світла й тіні, з'явився об'єм. Взагалі картини стали нагадувати сучасні фотографії. Як приклади можна згадати картини Яна ван Ейка та Яна Вермера (рис. 8.14, 8.15). Одним із секретів художників того часу стало використання оптичних пристроїв, зокрема камери-обскури (рис. 8.16). Підтвердженням цього є значне збільшення шульг на картинах внаслідок дзеркального зображення (рис. 8.17).

Наступним кроком практичного застосування перспективи стало відкриття фотографії, яка поєднала можливості отримання та фіксації зображення предметів у зменшеному розмірі, але в точних пропорціях і кольорах. Так з'явився спосіб одержання зображень, який не потребував довгої та стомлюючої праці художників (рис. 8.18).

Рис. 8.14. Ян ван Ейк «Портрет подружжя Арнолфіні»

Рис. 8.15. Ян Вермер «Молочниця»

Рис. 8.17. Йоганн Петрус ван Хорсток «Обман»

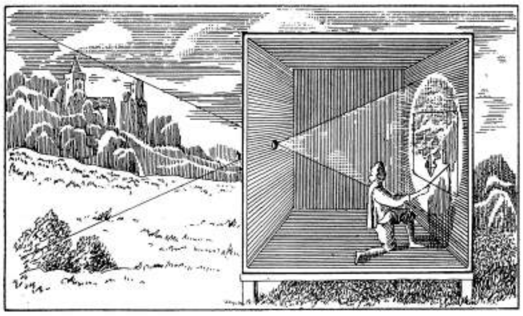


Рис. 8.16. Використання камери-обскури для написання пейзажів

Рис. 8.18. Аркади на Плаза де Пареха в Аранхуес (Спільнота Мадрида, Іспанія).

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 2

1. Дві прямі не паралельні і не перетинаються. Скільки площин можна провести через ці прямі?

А Одну **Б** Дві **В** Жодної **Г** Безліч

2. Прямі a і b паралельні площині α. Яким є взаємне розміщення прямих a і b?

А Обов'язково паралельні **В** Обов'язково мимобіжні

Б Обов'язково перетинаються **Г** Однозначно визначити неможливо

Пройдіть онлайн-тестування

3. Точка K лежить поза площиною трикутника ABC. Яким є взаємне розміщення прямих BK і AC?

А Перетинаються

Б Паралельні

В Мимобіжні

Г Визначити неможливо

4. На рис. 1 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Серед даних пар прямих укажіть пару паралельних прямих.

А A_1D і B_1C_1

Б AA_1 і BD

В A_1B_1 і A_1C_1

Г DC і A_1B_1

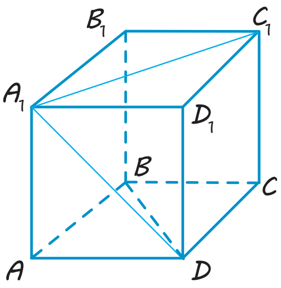


Рис. 1

5. Бічні сторони трапеції паралельні площині α. Яким є взаємне розміщення площини α і площини трапеції?

А Паралельні

Б Перетинаються

В Збігаються

Г Визначити неможливо

6. Прямі a і b паралельні. Скільки існує площин, які проходять через пряму a і паралельні прямій b?

А Тільки одна

Б Тільки дві

В Безліч

Г Жодної

7. Прямі a і b мимобіжні. Скільки існує площин, які проходять через пряму a і паралельні прямій b?

А Тільки одна

Б Дві

В Безліч

Г Жодної

8. Дано трикутник ABC. Площина, паралельна прямій AB, перетинає сторону AC у точці M, а сторону BC — у точці K. Яка довжина відрізка MK, якщо точка M — середина сторони AC і $AB=12$ см?

А 12 см

Б 6 см

В 4 см

Г Визначити неможливо

9. На рис. 2 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Серед даних прямих укажіть пряму, паралельну площині AA_1B_1.

А C_1D

Б BD

В A_1B

Г BC_1

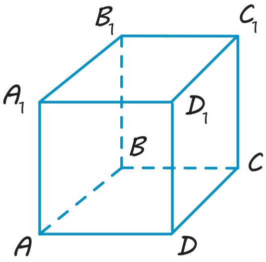


Рис. 2

10. Яка з даних фігур не може бути паралельною проекцією прямокутника на площину?

А Відрізок

Б Квадрат

В Трапеція

Г Ромб

11. Яке з наведених тверджень є правильним?

А Якщо пряма a не паралельна прямій b, що лежить у площині α, то пряма a не паралельна площині α.

Б Якщо пряма a, яка не лежить у площині α, паралельна прямій b цієї площини, то пряма a паралельна площині α.

В Якщо пряма a перетинає площину α, а пряма b належить площині α, то пряма a перетинає пряму b.

Г Якщо дві прямі в просторі не мають спільних точок, то вони паралельні.

12. Яке з наведених тверджень є правильним?

А Якщо пряма в просторі перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму.

Б Якщо пряма паралельна площині, то вона паралельна будь-якій прямій цієї площини.

В Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає і другу площину.

Г Якщо дві прямі в просторі не перетинаються, то вони не лежать в одній площині.

13. Яка з даних фігур не може бути паралельною проекцією на площину двох паралельних прямих?

А Дві точки

Б Пряма

В Дві прямі, що перетинаються

Г Дві паралельні прямі

14. На рис. 3 зображено піраміду *SABCDEF*, основою якої є правильний шестикутник *ABCDEF*. Площина якої з бічних граней паралельна прямій *AB*?

А *CSD*

Б *DSE*

В *ESF*

Г Такої грані не існує

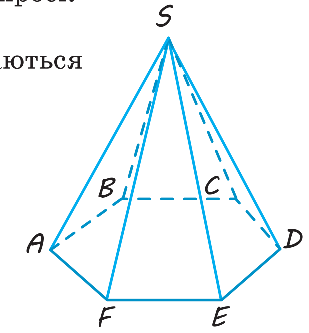


Рис. 3

15. Скільки площин можуть визначати три паралельні прямі?

А Тільки одну

Б Одну або дві

В Дві або три

Г Одну або три

16. Через точку перетину медіан трикутника *ABC* паралельно прямій *AB* проведено площину, яка перетинає сторони *AC* і *BC* у точках *D* і *E* відповідно. Знайдіть відрізок *DE*, якщо $AB = 18$ см.

А 6 см

Б 9 см

В 3 см

Г 12 см

17. Площини α і β паралельні. З точки *O*, яка не належить цим площинам і області між ними, проведено два промені. Один із них перетинає площини α і β у точках C_1 і D_1, а другий — у точках C_2 і D_2 відповідно. Знайдіть відрізок C_1C_2, якщо він на 5 см менший від відрізка D_1D_2, $OC_1 = 4$ см, $C_1D_1 = 10$ см.

А 2 см

Б $3\frac{1}{3}$ см

В 6 см

Г $4\frac{2}{3}$ см

18. Дано трикутник *ABC* і площину α, яка не перетинає його. Через вершини трикутника *ABC* і середину *M* його медіани *BD* проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1 і M_1 відповідно. Знайдіть відрізок MM_1, якщо $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 12$ см, $CC_1 = 19$ см.

А 12 см

Б 14 см

В 13 см

Г 26 см

Теми навчальних проектів

1. Геометричні форми в мистецтві.
2. Архітектура і математика.

Розділ 3

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

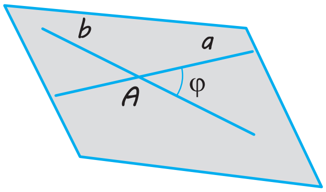
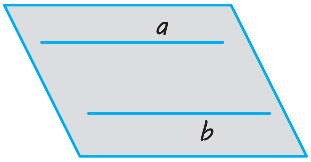
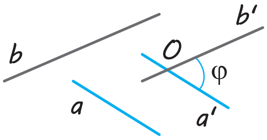
У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ознайомитеся з основними поняттями та властивостями перпендикулярності прямих і площин у просторі, кутами в просторі;
- навчитеся застосовувати ці поняття і властивості для розв’язування геометричних задач на доведення, на обчислення відстаней і кутів у просторі;
- зможете ознайомитися з узагальненням понять відстані в геометрії та геометричного місця точок, відомих вам із курсу планіметрії

§ 9 КУТ МІЖ ПРЯМИМИ В ПРОСТОРІ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ

Таблиця 9

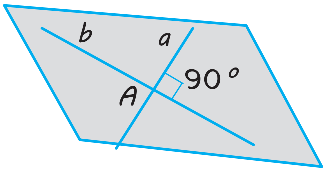
Кути між прямими в просторі

Прямі лежать в одній площині		**Прямі не лежать в одній площині**
Прямі перетинаються	Прямі паралельні	Прямі мимобіжні
		
φ — найменший* із утворених кутів; $\angle(a;b)=\varphi$; $0° < \varphi \leqslant 90°$	$\angle(a;b)=0°$; $\varphi = 0°$	$a' \parallel a$, $b' \parallel b$; $\angle(a;b)=\angle(a';b')=\varphi$; $0° < \varphi \leqslant 90°$

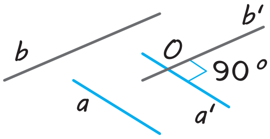
---

* Якщо при перетині прямих утворюються рівні кути (по 90°), то як кут між прямими вибирають будь-який із них.

Перпендикулярні прямі $(a \perp b)$



$\angle(a;b)=90°$



$\angle(a;b)=90°$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Як зазначалося в розділі 2, дві прямі в просторі можуть лежати в одній площині (коли вони перетинаються або паралельні) або не лежати в одній площині (тоді вони мимобіжні). Дамо означення кута між прямими в просторі для кожного з цих випадків.

Дві прямі, які перетинаються, утворюють суміжні і вертикальні кути. Вертикальні кути дорівнюють один одному, а суміжні кути доповнюють один одного до 180°.

✓ Означення. Кутом між двома прямими, що перетинаються, **називається найменший із кутів, утворених променями цих прямих, із вершиною в точці їх перетину.**

Як і на площині, **дві прямі в просторі, що перетинаються, називаються** перпендикулярними, **якщо вони перетинаються під прямим кутом.** Вважають, що *кут між двома паралельними прямими (чи прямими, що збігаються) дорівнює нулю.*

Також вважатимемо, що *два відрізки перпендикулярні*, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Якщо позначити кут між прямими, які лежать в одній площині, через φ, то з наведеного означення випливає, що $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 9.1) ребра, що перетинаються, перпендикулярні, діагональ A_1B грані куба утворює з її ребрами кути по 45°.

Використовуючи властивості паралельного проектування, доведемо таку теорему.

Теорема 9.1. **Кут між прямими, що перетинаються, дорівнює куту між прямими, які паралельні даним прямим і перетинаються.**

● *Доведення.* Випадок, коли прямі лежать в одній площині, розглядався в планіметрії. Нехай прямі a і b перетинаються в точці O і лежать у площині α, а відповідно паралельні їм прямі a_1 і b_1 ($a_1 \parallel a$ і $b_1 \parallel b$) перетинаються в точці O_1 і лежать у площині β (рис. 9.2). За ознакою паралельності площини α і β паралельні.

Розглянемо паралельне проектування в напрямі прямої OO_1 на площину β. Оскільки площина, яка проходить через прямі a і OO_1, перетинає площину β по прямій a_1, а площина, що проходить через прямі b і OO_1, — по прямій b_1 (поясніть чому), то проекціями прямих a і b на площину β є прямі a_1 і b_1 відповідно. Але за властивостями паралельного проектування, якщо плоска фігура F (наприклад, менший із кутів, утворених променями прямих a і b, з вершиною в точці O) лежить у площині α, паралельній площині проекцій β, то її проекція на площину β дорівнює фігурі F.

Отже, кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими a_1 і b_1. ○

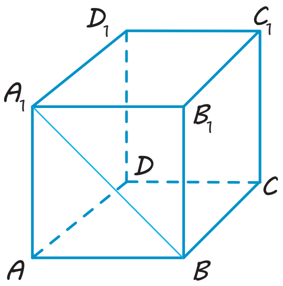


Рис. 9.1

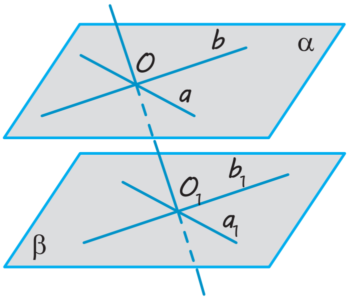


Рис. 9.2

Означимо тепер поняття «кут між мимобіжними прямими».

Нехай прямі a і b — мимобіжні (рис. 9.3). Розглянемо довільну точку O в просторі та проведемо через неї прямі a' і b', паралельні прямим a і b відповідно. Кут між прямими a' і b' приймають за кут між мимобіжними прямими a і b.

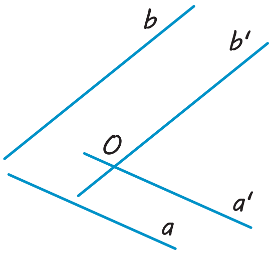


Рис. 9.3

Означення. **Кутом між мимобіжними прямими** **називається кут між прямими, які паралельні даним мимобіжним прямим і перетинаються.**

Оскільки за теоремою 9.1 кути з відповідно паралельними сторонами дорівнюють один одному, то це означення не залежить від вибору точки O. Зокрема, точка O може належати також прямій a або b. У цьому випадку як пряму a' або b' слід узяти саму пряму a або b відповідно.

Якщо позначити кут між мимобіжними прямими через φ, то з наведеного означення випливає, що $0° < \varphi \leqslant 90°$.

Дві мимобіжні прямі називають *перпендикулярними*, якщо кут між ними прямий.

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 9.4) мимобіжні ребра AA_1 і BC перпендикулярні, оскільки $BB_1 \parallel AA_1$ (ABB_1A_1 — квадрат). Отже, $\angle(AA_1; BC) = \angle(BB_1; BC) = \angle B_1BC = 90°$, тобто $AA_1 \perp BC$.

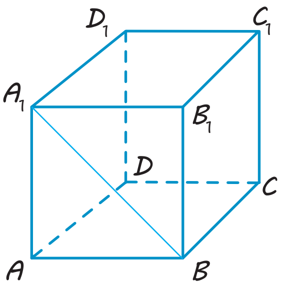


Рис. 9.4

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Із планіметрії відомо, що дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні. Чи є правильним це твердження для стереометрії?

Розв'язання	Коментар
▶ Ні, це твердження неправильне, якщо всі три прямі не лежать в одній площині. Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рис. 9.5) прямі AA_1 і BC перпендикулярні до прямої AB, але не паралельні (вони мимобіжні, оскільки не лежать в одній площині). ◁	*На запитання «Чи є правильним твердження?» відповідь може бути ствердною* («Так»), *тоді потрібно довести це твердження для всіх можливих випадків. Якщо відповідь «Ні», то достатньо навести хоча б один приклад, коли це твердження не виконується* (так званий *контрприклад* для даного твердження). Цей приклад можна сконструювати самому або знайти його серед елементів відомих фігур.

Задача 2

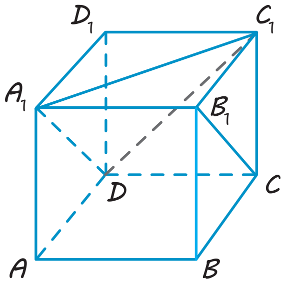


Рис. 9.5

У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 9.5) знайдіть кут між прямими A_1C_1 і B_1C.

Розв'язання	Коментар
▶ Розглянемо площину, яка проходить через паралельні ребра куба A_1B_1 і DC — вона перетинає паралельні грані куба AA_1D_1D і BB_1C_1C по паралельних прямих A_1D і B_1C. Отже, $A_1D \parallel B_1C$, але тоді кут між мимобіжними прямими A_1C_1 і B_1C дорівнює куту між прямими A_1C_1 і A_1D. Сполучаючи точки D і C_1 відрізком, отримуємо рівносторонній трикутник A_1C_1D (його сторони дорівнюють одна одній як діагоналі рівних квадратів). Звідси $\angle C_1A_1D = 60°$. Отже, $\angle(A_1C_1; B_1C) = 60°$. *Відповідь*: 60°. ◁	Прямі A_1C_1 і B_1C — мимобіжні. Щоб знайти кут між ними, можна провести через довільну точку простору паралельні їм прямі або (що роблять частіше) через точку однієї прямої — пряму, паралельну другій прямій. Відповідну паралельну пряму можна будувати в просторі, що не завжди просто. Також цю пряму можна одержати як елемент даного многогранника. Для цього достатньо згадати, що довільна площина перетинає паралельні грані куба по паралельних прямих.

Запитання

1. Дайте означення кутів між прямими в просторі (між прямими, що перетинаються; між паралельними прямими; між мимобіжними прямими).
2. Сформулюйте властивість кутів, утворених відповідно паралельними прямими.
3.* Доведіть властивість кутів, утворених відповідно паралельними прямими.
4. Які прямі в просторі називаються перпендикулярними? Наведіть приклади таких прямих, користуючись моделлю прямокутного паралелепіпеда.

Вправи

9.1° Знайдіть кут між ребрами, які перетинаються:
1) куба; 2) правильного тетраедра.

9.2° Знайдіть кут між діагоналлю грані куба і ребром, що перетинає її.

9.3° Знайдіть кут між діагоналями, які перетинаються, двох різних граней куба.

9.4° Дано пряму в просторі, на ній узято точку. Скільки можна побудувати прямих, що проходять через цю точку і перпендикулярні до даної прямої? Відповідь проілюструйте на моделі.

9.5° Дано пряму і точку поза нею. Скільки можна побудувати прямих, що проходять через цю точку і перпендикулярні до даної прямої?

9.6° Дано площину і паралельну їй пряму. Скільки прямих, перпендикулярних до цієї прямої, можна провести в даній площині?

9.7. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть перпендикулярність прямих:
1) BC і C_1D_1; 2) BD і A_1C_1; 3) BD і AA_1.

9.8. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайдіть кути, які утворюють прямі:
1) AA_1 і B_1C_1; 2) AA_1 і CC_1; 3) BB_1 і CD.

9.9. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайдіть кути між мимобіжними прямими:
1) AB і B_1D_1, 2) AB_1 і BC_1.

9.10. У правильній чотирикутній піраміді зі стороною основи, що дорівнює бічному ребру, знайдіть кут між стороною основи і мимобіжним до неї бічним ребром.

9.11. Точки A, B, C лежать на попарно перпендикулярних променях OA, OB, OC. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо відомо, що $OA = OB = OC$.

9.12. Прямі AB, AC і AD попарно перпендикулярні (рис. 9.6). Знайдіть довжину відрізка CD, якщо:
1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1{,}5$ см;
2) $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AB = 5$ см;
3) $AB = b$, $BC = a$, $AB = d$.

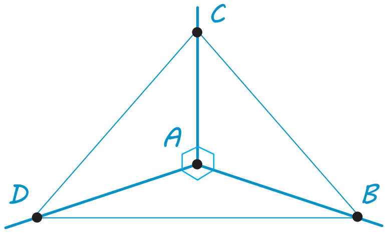


Рис. 9.6

9.13.* Діагональ прямокутного паралелепіпеда, основою якого є квадрат, удвічі більша за сторону основи. Знайдіть кути між діагоналями паралелепіпеда.

9.14. Прямі a і b паралельні. Прямі a і c перетинаються під прямим кутом. Укажіть взаємне розташування прямих b і c та кут між ними.

9.15. Прямі a і b паралельні. Прямі a і c перетинаються під кутом 30°. Укажіть взаємне розташування прямих b і c та кут між ними.

9.16. Якщо дві прямі, які перетинаються, паралельні відповідно двом перпендикулярним прямим, то вони теж перпендикулярні. Доведіть.

9.17.* У просторовому чотирикутнику $ABCD$ сторона AB дорівнює стороні CD. Доведіть, що прямі AB і CD утворюють рівні кути з прямою, яка проходить через середини відрізків BC і AD.

9.18.* Усі грані чотирикутної призми — ромби з кутом 60°. Знайдіть кут між мимобіжними меншими діагоналями двох суміжних граней призми.

9.19. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої. Доведіть.

9.20. Точки K і M — відповідно середини ребер AB і DC трикутної піраміди $DABC$, кожне ребро якої дорівнює a. Доведіть, що $KM \perp AB$. Знайдіть довжину відрізка KM.

9.21.* Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що пряма BD перпендикулярна до прямої BB_1.

9.22. Знайдіть довжину діагоналі AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо його ребро дорівнює a.

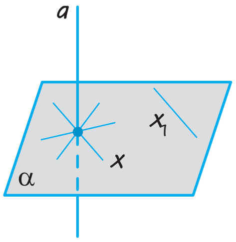
9.23.* Знайдіть кут між мимобіжними діагоналлю грані куба і діагоналлю куба.

§ 10 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Таблиця 10

Перпендикулярність прямої та площини

Означення

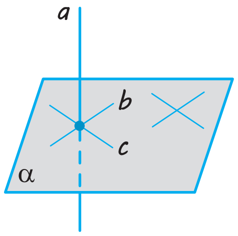


$\boxed{a\perp\alpha} \Leftrightarrow \boxed{a\perp x}$.

x — будь-яка пряма площини α;

$\boxed{a\perp x_1}$

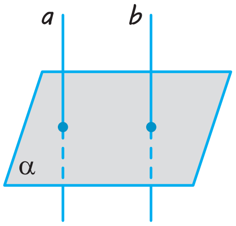
Ознака



Якщо $a\perp b$ і $a\perp c$ (b і c лежать у площині α і перетинаються),

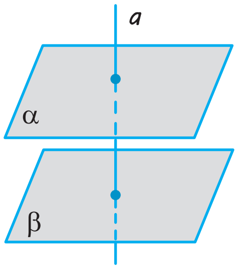
то $a\perp\alpha$.

Залежність між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин



Якщо $a\parallel b$ і $a\perp\alpha$,
то $b\perp\alpha$.

Якщо $a\perp\alpha$ і $b\perp\alpha$,
то $a\parallel b$.



Якщо $\alpha\parallel\beta$ і $a\perp\alpha$,
то $a\perp\beta$.

Якщо $\alpha\perp a$ і $\beta\perp a$,
то $\alpha\parallel\beta$.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Перпендикулярність прямої та площини.

У попередньому параграфі ми розглянули перпендикулярність прямих у просторі.

✓ Означення. **Пряма називається** перпендикулярною до площини, **якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.**

Відрізок називатимемо перпендикулярним до площини, якщо він лежить на прямій, перпендикулярній до цієї площини.

Позначають перпендикулярність прямої a і площини α так: $a\perp\alpha$ або $\alpha\perp a$. Отже, за означенням, якщо $a\perp\alpha$ і довільна пряма x лежить у площині α, то $a\perp x$ (рис. 10.1, *а*, *б*).

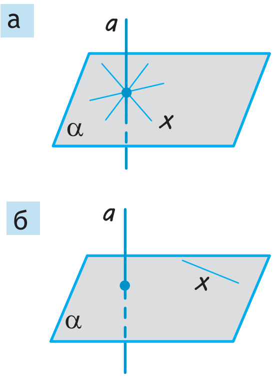


Рис. 10.1

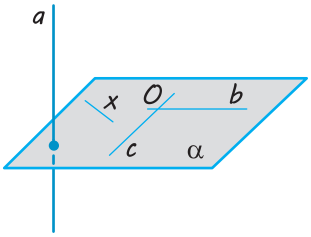


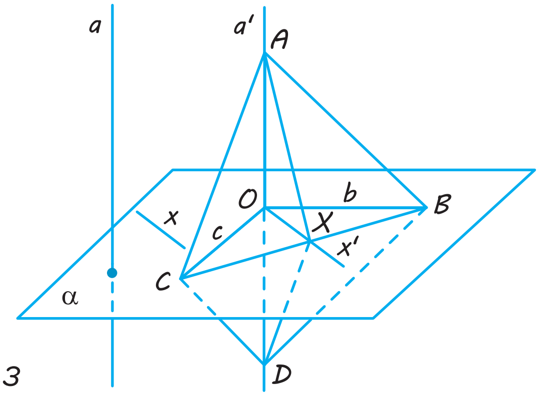
Рис. 10.2

Зазначимо, що пряма, перпендикулярна до площини, обов'язково перетинає цю площину. Дійсно, якби пряма лежала в площині або була їй паралельна, то в цій площині знайшлася б пряма, паралельна даній, а отже, дана пряма не була б перпендикулярною до даної площини.

Теорема 10.1. (*ознака перпендикулярності прямої та площини*). **Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих площини, які перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини.**

● *Доведення.* Нехай пряма a перпендикулярна до прямих b і c площини α, які перетинаються в точці O (рис. 10.2). Розглянемо довільну пряму x площини α. Доведемо, що пряма a перпендикулярна до прямої x.

Оскільки подальші міркування пов'язані з додатковими побудовами та розглядом п'яти пар рівних трикутників, наведемо далі доведення разом із його планом.

План	**Продовження доведення**
I. Виконати додаткові побудови, щоб: 1) одержати кути між даними прямими, якщо вони мимобіжні (як показано на рисунку); 2) поєднати дані й одержані елементи в трикутники.	Проведемо через точку O прямі a' і x', паралельні відповідно прямим a і x (рис. 10.3). Для доведення перпендикулярності прямих a і x достатньо довести перпендикулярність прямих a' і x'. Для цього в площині α проведемо пряму, що не проходить через точку O і перетинає прямі b, x', c у точках B, X, C відповідно. Відкладемо на прямій a' від точки O рівні відрізки $OA = OD$ і сполучимо точки A і D з точками B, X, C відрізками.  Рис. 10.3
II. Послідовно обґрунтувати рівність трикутників: 1) $\triangle AOC = \triangle DOC$; 2) $\triangle AOB = \triangle DOB$; 3) $\triangle ABC = \triangle DBC$; 4) $\triangle ABX = \triangle DBX$; 5) $\triangle AOX = \triangle DOX$.	Прямокутні трикутники AOC і DOC дорівнюють один одному (за двома катетами). Отже, $AC = DC$. Аналогічно з рівності прямокутних трикутників AOB і DOB одержуємо $AB = BD$. Тоді трикутники ABC і DBC рівні (за трьома сторонами). Отже, $\angle ABC = \angle DBC$. Трикутники ABX і DBX є рівними (за двома сторонами і кутом між ними). Звідси одержуємо $AX = DX$. Трикутники AOX і DOX рівні (за трьома сторонами), отже, $\angle AOX = \angle DOX = 90°$.

III. Зробити висновок про перпендикулярність прямих a' і x', a і x та прямої a і площини α.	Таким чином, прямі a' і x' перпендикулярні. Але тоді перпендикулярні й прямі a і x, а це означає, що пряма a перпендикулярна до площини α. ○

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 10.4) бічне ребро AA_1 перпендикулярне до прямих AB і AD площини основи $ABCD$. Отже, за ознакою перпендикулярності прямої і площини це бічне ребро перпендикулярне до площини основи $ABCD$.

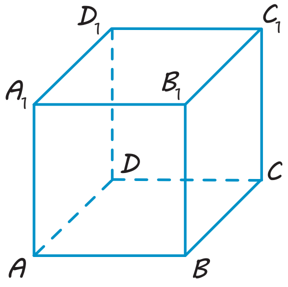


Рис. 10.4

Зміст теореми 10.1 часто використовують на практиці. Наприклад, підставка для новорічної ялинки має форму хрестовини. Якщо ялинку встановити так, щоб її стовбур був перпендикулярним до прямих хрестовини, то він стоятиме перпендикулярно до площини підлоги (див. рисунок).

2 Залежність між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин

Теорема 10.2. **Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то і друга пряма перпендикулярна до цієї площини.**

● *Доведення.* Нехай прямі a і m паралельні $(m \parallel a)$ та пряма a перпендикулярна до площини α (рис. 10.5). Доведемо, що $m \perp \alpha$.

Виберемо в площині α дві довільні прямі b і c, які перетинаються. Оскільки $a \perp \alpha$, то за означенням прямої, перпендикулярної до площини, $a \perp b$ та $a \perp c$. Якщо $m \parallel a$, то $m \perp b$ і $m \perp c$ (оскільки за означенням кута між мимобіжними прямими $\angle(a;b)=\angle(m;b)$ і $\angle(a;c)=\angle(m;c)$). Тоді за ознакою перпендикулярності прямої і площини $m \perp \alpha$. ○

Теорема 10.3. **Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.**

● *Доведення.* Нехай прямі a і b перпендикулярні до площини α (рис. 10.6). Доведемо, що $a \parallel b$, методом від супротивного. Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Виберемо на прямій b довільну точку M і проведемо через неї пряму b_1, паралельну a. Оскільки $a \perp \alpha$, то $b_1 \perp \alpha$ за теоремою 10.2. Якщо точки B і C — відповідно точки перетину прямих b і b_1 із площиною α, то в трикутнику MBC отримуємо два прямих кути, що неможливо. Отже, наше припущення неправильне і прямі a та b паралельні. ○

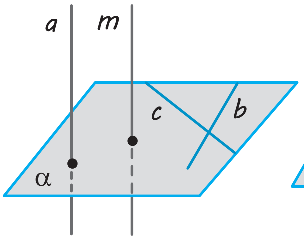


Рис. 10.5

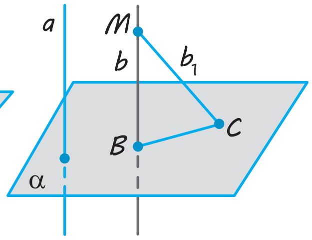


Рис. 10.6

Теорема 10.4. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона перпендикулярна і до другої площини.

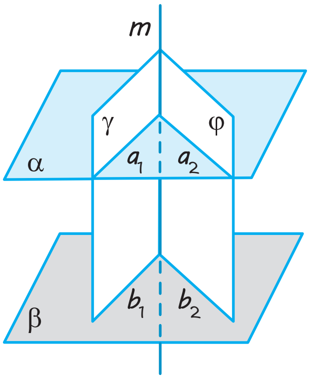


Рис. 10.7

● *Доведення.* Нехай площини α і β паралельні $(\alpha \parallel \beta)$, а пряма m перпендикулярна до площини α $(m \perp \alpha)$ (рис. 10.7). Доведемо, що $m \perp \beta$.

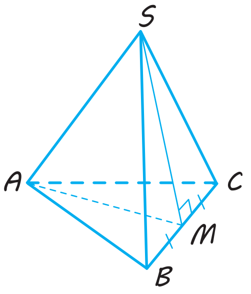
Проведемо через пряму m дві різні площини γ і φ, які перетинають площину α по прямих a_1 і a_2, а площину β — по прямих b_1 і b_2 відповідно. Оскільки $\alpha \parallel \beta$, то $a_1 \parallel b_1$ і $a_2 \parallel b_2$. За умовою $m \perp \alpha$, тоді $m \perp a_1$ і $m \perp a_2$. У кожній із площин γ і φ пряма m перпендикулярна до однієї з паралельних прямих, отже, перпендикулярна і до другої, тобто $m \perp b_1$ і $m \perp b_2$. Але тоді $m \perp \beta$. ○

Теорема 10.5 *(ознака паралельності площин)*. **Дві різні площини, перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої, паралельні.**

● *Доведення.* Нехай площини α і β перпендикулярні до прямої m (рис. 10.7). Доведемо, що $\alpha \parallel \beta$. Проведемо через пряму m дві різні площини γ і φ, які перетинають площину α по прямих a_1 і a_2, а площину β — по прямих b_1 і b_2 відповідно. Оскільки за умовою $m \perp \alpha$, то $m \perp a_1$ і $m \perp a_2$; також за умовою $m \perp \beta$, тоді $m \perp b_1$ і $m \perp b_2$. У кожній із площин γ і φ одержуємо по дві прямі, які перпендикулярні до однієї прямої m. Отже, $a_1 \parallel b_1$ і $a_2 \parallel b_2$, тобто дві прямі, що перетинаються, площини α паралельні відповідно двом прямим площини β. Таким чином, $\alpha \parallel \beta$. ○

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Доведіть, що **в правильній трикутній піраміді мимобіжні ребра перпендикулярні.**

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай $SABC$ — правильна піраміда (рис. 10.8).  Рис. 10.8	Щоб довести перпендикулярність двох мимобіжних прямих SA і BC, можна довести перпендикулярність однієї з них до площини, у якій лежить друга пряма. Нагадаємо, що піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний многокутник, а всі бічні ребра рівні.

Розв'язання

Візьмемо точку M — середину BC і сполучимо її відрізками з точками S і A. Оскільки в правильній піраміді бічні ребра рівні: $SA = SB = SC$, то трикутник SBC рівнобедрений і медіана SM є його висотою, тобто $SM \perp BC$.

Аналогічно $AM \perp BC$, оскільки трикутник ABC — правильний.

Тоді $BC \perp \text{пл.}\, SAM$ (за ознакою перпендикулярності прямої і площини). Отже, $BC \perp SA$ (за означенням прямої, перпендикулярної до площини). ◁

Задача 2

Доведіть, що **через дану точку прямої можна провести одну і тільки одну перпендикулярну до неї площину.**

Розв'язання

▶ Нехай a — дана пряма і A — точка на ній (рис. 10.9). Проведемо через пряму дві площини, а в них — через точку A прямі b і c, перпендикулярні до прямої a. Площина α, яка проходить через ці прямі, перпендикулярна до прямої a за ознакою перпендикулярності прямої і площини (теорема 10.1).
Доведемо, що ця площина єдина. Припустимо, що крім площини α існує інша площина α', яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a (рис. 10.10).

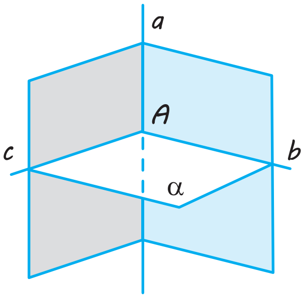


Рис. 10.9

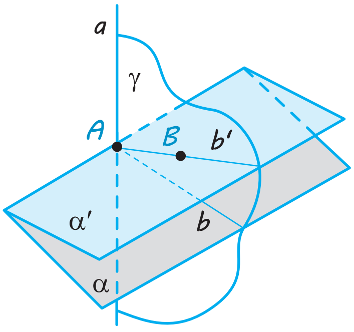


Рис. 10.10

Нехай B — точка площини α', яка не лежить у площині α. Проведемо через точку B і пряму a площину γ. Вона перетне площини α і α' по різних прямих b і b', перпендикулярних до прямої a. А це, як ми знаємо, неможливо, оскільки в площині γ через дану точку прямої проходить тільки одна перпендикулярна до неї пряма. Отже, площина, яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a, єдина. ◁

Коментар

Щоб одержати площину, перпендикулярну до даної прямої, можна використати ознаку перпендикулярності прямої та площини і побудувати дві прямі, що перпендикулярні до даної прямої і перетинаються. Але будувати перпендикулярні прямі зручно в площині. Тому доцільно побудувати спочатку дві різні площини, які проходять через дану пряму, а потім у кожній із них провести пряму, перпендикулярну до даної прямої.

Задача 3

Доведіть, що **через дану точку площини можна провести одну і тільки одну перпендикулярну до неї пряму.**

Розв'язання

▶ Нехай α — дана площина і A — точка на ній (рис. 10.11).
Проведемо в площині α через точку A дві прямі b і c. Проведемо через точку A перпендикулярні до них площини ($\gamma \perp b$ і $\beta \perp c$). Вони перетнуться по деякій прямій a, перпендикулярній до прямих b і c. Отже, пряма a перпендикулярна до площини α за ознакою перпендикулярності прямої і площини.
Доведемо, що ця пряма єдина. Припустимо, що, крім прямої a, існує інша пряма a', яка проходить через точку A і перпендикулярна до площини α (рис. 10.12).

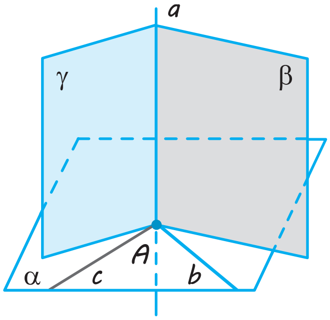


Рис. 10.11

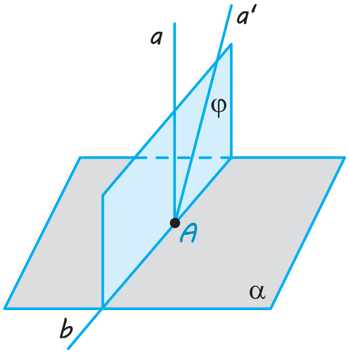


Рис. 10.12

Проведемо через прямі a і a' площину φ. Вона перетне площину α по деякій прямій b, перпендикулярній до прямих a і a', а це неможливо. Отже, пряма, яка проходить через дану точку площини і перпендикулярна до цієї площини, єдина. ◁

Коментар

Для побудови шуканої прямої можна використати результат попередньої задачі і отримати цю пряму як перетин двох площин, кожна з яких буде перпендикулярною до якоїсь прямої даної площини. Тому зручно спочатку провести в даній площині дві прямі, які перетинаються в даній точці, а потім виконати вказані побудови.
Для того щоб обґрунтувати перпендикулярність прямої a перетину побудованих площин до проведених прямих b і c, потрібно використати означення прямої, перпендикулярної до площини ($b \perp \gamma$, отже, $b \perp a$ і $c \perp \beta$, таким чином, $c \perp a$).
Єдиність побудованої прямої доводимо методом від супротивного. Після припущення про існування ще однієї прямої, яка проходить через дану точку перпендикулярно до даної площини, розглядаємо ще одну площину, у якій отримаємо суперечність із відомим фактом планіметрії.

Задача 4

Через точки A і B проведено прямі, перпендикулярні до площини α, які перетинають її в точках C і D відповідно. Знайдіть відстань між точками A і B, якщо $AC = 3$ м, $BD = 2$ м, $CD = 2{,}4$ м і відрізок AB не перетинає площину α.

Розв'язання

▶ Оскільки дві прямі, перпендикулярні до площини α, паралельні, то $AC \parallel BD$, отже, $ABDC$ — трапеція (рис. 10.13, *а*). За умовою $AC \perp \alpha$, тоді $AC \perp CD$, тобто трапеція $ABDC$ прямокутна. Проведемо у трапеції $ABDC$ із точки B перпендикуляр BK до сторони AC (рис. 10.13, *б*).

Коментар

За зображенням просторової конфігурації (рис. 10.13) ми не можемо визначити, чи лежить чотирикутник $ABDC$ в одній площині (отже, не знаємо, чи можна до його елементів застосовувати відомі з планіметрії співвідношення).

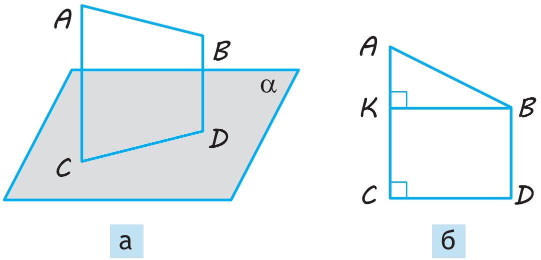
Одержимо прямокутник $BKCD$ (оскільки у чотирикутника $BKCD$ усі кути прямі), отже, $CK = BD = 2$ м і $KB = CD = 2{,}4$ м. Тоді $AK = AC - CK = 3 - 2 = 1$ (м).

Із прямокутного трикутника AKB:

$$AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = \sqrt{1^2 + 2{,}4^2} = \sqrt{6{,}76} =$$
$$= 2{,}6 \text{ (м)}.$$

Відповідь: 2,6 м. ◁

Оскільки паралельні прямі лежать в одній площині, то для обґрунтування того, що цей чотирикутник плоский, достатньо довести паралельність двох його сторін. Слід також урахувати, що *для розв'язання багатьох стереометричних задач часто доцільно виконувати виносні рисунки розглядуваних плоских фігур* (рис. 10.13, *б*), на яких зручно здійснювати певні побудови, обчислення та обґрунтування.



а б

Рис. 10.13

Запитання

1. Яка пряма називається перпендикулярною до площини?
2. Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої і площини. Використовуючи модель прямокутного паралелепіпеда, наведіть приклад її використання.
3. Доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.
4. Сформулюйте властивості прямих і площин, які виражають залежність між їх паралельністю та перпендикулярністю.
5. Доведіть властивості прямих і площин, які виражають залежність між їх паралельністю та перпендикулярністю.

Вправи

10.1°. Чи є правильним, що коли пряма перпендикулярна до будь-яких двох прямих площини, то вона перпендикулярна до цієї площини?

10.2°. У разі якого взаємного розташування двох прямих через одну з них можна провести площину, перпендикулярну до другої?

10.3°. Як розташована відносно площини трикутника пряма, перпендикулярна до двох його сторін?

10.4°. Чи є правильним, що пряма є перпендикулярною до площини круга, якщо вона перетинає круг в центрі й перпендикулярна до: 1) його діаметра; 2) двох його діаметрів?

10.5°. У площині α розташований трикутник ABC. Пряма MN, яка перетинає цю площину, перпендикулярна до відрізків AB і BC. Яким є взаємне розташування прямих MN і AC?

10.6°. Пряма паралельна площині. Чи може вона бути перпендикулярною до якої-небудь прямої, що лежить у цій площині?

10.7. Доведіть, що в прямокутному паралелепіпеді бічне ребро перпендикулярне до площини основи.

10.8. Доведіть, що в прямокутному паралелепіпеді діагональ основи перпендикулярна до кожного бічного ребра.

10.9. Доведіть, що кожне ребро куба перпендикулярне до двох його граней.

10.10. Два прямокутних трикутники *ABC* і *DBC*, площини яких не збігаються, мають спільний катет, а через два інші катети — *AC* і *CD* — проведено площину α. Доведіть, що спільний катет перпендикулярний до будь-якої прямої *c* площини α.

10.11. На зображенні правильного тетраедра *ABCD* (рис. 10.14) побудуйте площину, перпендикулярну до його ребра *AD*.

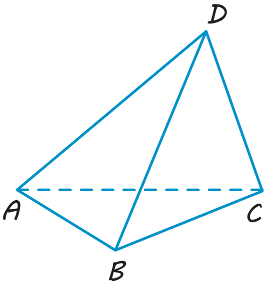


Рис. 10.14

10.12. Доведіть перпендикулярність прямих BD_1 і *AC* у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

10.13.* Доведіть, що **через будь-яку точку простору можна провести єдину пряму, перпендикулярну до даної площини.**

10.14.* Доведіть, що **через будь-яку точку простору можна провести єдину площину, перпендикулярну до даної прямої.**

10.15.* Через точку *A* прямої *a* проведено перпендикулярні до неї площину α і пряму *b*. Доведіть, що пряма *b* лежить у площині α.

10.16. Через вершину квадрата *ABCD* проведено пряму *BM*, перпендикулярну до його площини. Доведіть, що:

1) пряма *AD* перпендикулярна до площини, визначеної прямими *AB* і *BM*;
2) пряма *CD* перпендикулярна до площини, визначеної прямими *BC* і *BM*.

10.17. Через точки *M* і *N* проведено прямі, перпендикулярні до площини β, які перетинають її в точках *T* і *E* відповідно. Знайдіть відстань між точками *M* і *N*, якщо $MT = 2$ м, $NE = 5$ м, $TE = 4$ м і відрізок *MN* не перетинає площину β.

10.18. Верхні кінці двох вертикальних стовпів, розташованих на відстані 6,8 м один від одного, з'єднано поперечкою. Висота одного стовпа 11,6 м, а другого — 7,8 м. Знайдіть довжину поперечки.

10.19. Телефонний дріт завдовжки 15 м протягнуто від телефонного стовпа, де він закріплений на висоті 8 м від поверхні землі, до будинку, де його закріпили на висоті 20 м. Знайдіть відстань між будинком і стовпом, вважаючи, що дріт не провисає.

10.20.* З вершини квадрата проведено перпендикуляр до його площини. Відстані від кінця цього перпендикуляра до решти вершин квадрата дорівнюють *a* і *b* $(a < b)$. Знайдіть довжини перпендикуляра і сторони квадрата (рис. 10.15).

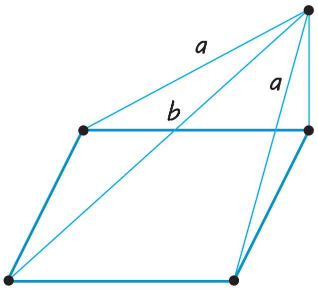


Рис. 10.15

10.21.* З вершини прямокутника проведено перпендикуляр до його площини. Відстані від кінця цього перпендикуляра до решти вершин прямокутника дорівнюють a, b, c ($a<c$, $b<c$). Знайдіть довжини перпендикуляра і сторін прямокутника (рис. 10.16).

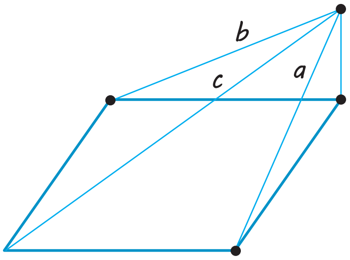


Рис. 10.16

10.22. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей однієї з граней до вершин протилежної грані.

10.23. Діагональ BD_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a, діагональ AD_1 — b. Знайдіть AB.

10.24. Пряма CD перпендикулярна до площини правильного трикутника ABC. Через центр O цього трикутника проведено пряму OK, паралельну прямій CD. Відомо, що $AB=16\sqrt{3}$ см, $OK=12$ см, $CD=16$ см. Знайдіть відстань від точок D і K до вершин A і B трикутника.

10.25. Точка O — точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$, точка M однаково віддалена від усіх його вершин. Доведіть, що пряма MO перпендикулярна до площини прямокутника.

Виявіть свою компетентність

10.26.° Щоб розпил дерев'яного бруска (рис. 10.17) був перпендикулярним до його ребра, через точку A ребра проводять перпендикулярно до ребра прямі AB і AC. Потім пиляють так, щоб розпил ішов по цих прямих. Чи правильно це?

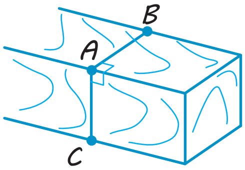


Рис. 10.17

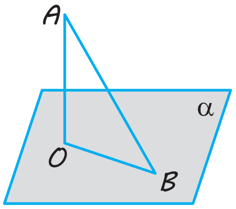
§ 11 ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА. ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ

Таблиця 11

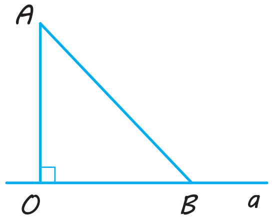
Перпендикуляр і похила

У просторі	**На площині**

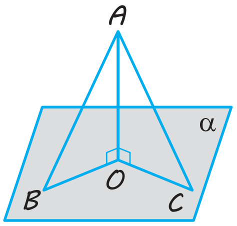
AO — **перпендикуляр**



AO — відстань від точки A до площини α;
$AO \perp \alpha$; $O \in \alpha$;
OB — проекція похилої AB на площину α

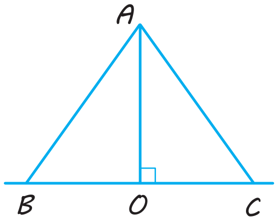


AO — відстань від точки A до прямої a;
$AO \perp \alpha$; $O \in \alpha$;
OB — проекція похилої AB на пряму a

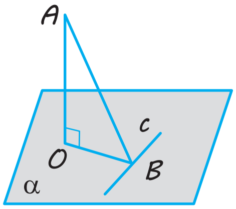


AB — **похила**

$AO < AB$ *(перпендикуляр є коротшим від похилої)*
$AB = AC \Leftrightarrow BO = OC$
$AB > AC \Leftrightarrow BO > OC$



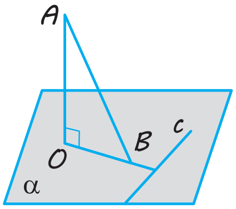
Теорема про три перпендикуляри



OB — проекція AB на площину α;
c — пряма на площині α,
$OB \perp c$

$\Leftrightarrow$

$AB \perp c$



ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

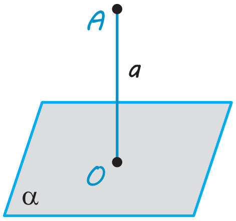


Рис. 11.1

Поняття перпендикуляра і похилої в просторі вводять аналогічно до відповідних понять на площині (табл. 11).

Нехай дано площину α і точку A, яка не належить площині. Проведемо пряму a, що проходить через цю точку перпендикулярно до площини α. Точку перетину прямої a з площиною α позначимо через O (рис. 11.1). Відрізок AO називають *перпендикуляром*, проведеним із точки A до площини α, точку O — *основою перпендикуляра*.

Означення. Відстанню від точки до площини **називається довжина перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини.**

Означення. Похилою до площини **називається пряма, що перетинає площину і не перпендикулярна до неї.**

Похилою називають також відрізок, який сполучає точку, що не належить площині, з точкою площини, якщо цей відрізок не є перпендикуляром до площини. Кінець цього відрізка, що лежить у площині, називають *основою похилої*.

Означення. Відрізок, який сполучає основи перпендикуляра і похилої, проведених з однієї точки, називається проекцією[*] похилої**.**

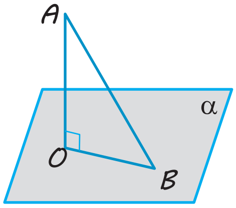


Рис. 11.2

На рис. 11.2 з точки A до площини α проведено перпендикуляр AO і похилу AB. Точка O — основа перпендикуляра, точка B — основа похилої, OB — проекція похилої AB на площину α.

Властивості перпендикуляра і похилої в просторі аналогічні відповідним властивостям на площині.

Теорема 11.1. Якщо з однієї точки, узятої поза площиною, проведено до цієї площини перпендикуляр і декілька похилих, то:

1) перпендикуляр коротший від будь-якої похилої, проведеної з тієї самої точки до тієї ж площини;

2) рівні похилі мають рівні проекції, і навпаки, похилі, які мають рівні проекції, є рівними;

3) більша (за довжиною) похила має більшу проекцію, і навпаки, з двох похилих більша та, у якої проекція більша.

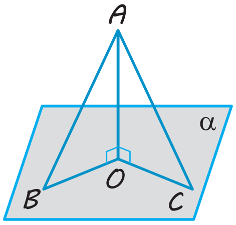


Рис. 11.3

● *Доведення.* Нехай AO — перпендикуляр, проведений до площини α, AB і AC — похилі до цієї площини, а OB і OC — відповідно їхні проекції на площину α (рис. 11.3).

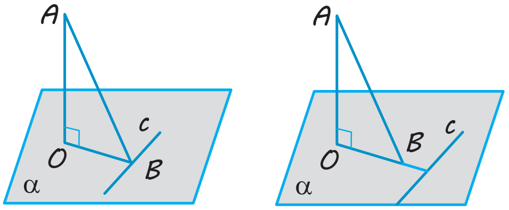
1) Оскільки $AO \perp \alpha$, то $AO \perp OB$. Тоді трикутник AOB прямокутний, AB — гіпотенуза, AO — катет. Отже, $AO < AB$.

2) Якщо виконується рівність похилих: $AB = AC$ (або відповідно їхніх проекцій $OB = OC$), то прямокутні трикутники AOB і AOC є рівними за катетом і гіпотенузою (або за двома катетами). Отже, одержуємо потрібну рівність проекцій: $OB = OC$ (або самих похилих: $AB = AC$).

3) Оскільки за теоремою Піфагора з прямокутних трикутників AOB і AOC: $AB^2 = AO^2 + OB^2$ і $AC^2 = AO^2 + OC^2$, то нерівність $AB > AC$ виконується тоді і тільки тоді, коли виконується нерівність $OB > OC$. ○

---

[*] Точніше цей відрізок називається ортогональною, або прямокутною, проекцією похилої (коли всі проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій). Далі, говорячи про проекції, ми будемо мати на увазі ортогональні проекції.



а б

Рис. 11.4

Теорема 11.2. *(про три перпендикуляри)*. **Якщо пряма на площині перпендикулярна до проекції похилої на цю площину, то вона перпендикулярна і до похилої. І навпаки: якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.**

● *Доведення.* Нехай пряма *c* площини α (рис. 11.4, *а*, *б*) перпендикулярна до проекції *OB* похилої *AB* (або до самої похилої *AB*). Оскільки $AO \perp \alpha$, то $AO \perp c$. Тоді пряма *c* буде перпендикулярною до двох прямих, що перетинаються, — *OB* і *AO* (чи *AB* і *AO*). За ознакою перпендикулярності прямої і площини пряма *c* перпендикулярна до площини *AOB*, а отже, вона буде перпендикулярною і до похилої *AB* (чи до її проекції *OB*). ○

Спробуйте довести цю теорему в інший спосіб. Обговоріть свій варіант доведення з друзями та подругами.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Через центр описаного навколо трикутника кола проведено пряму, перпендикулярну до площини трикутника. Доведіть, що кожна точка цієї прямої рівновіддалена від вершин трикутника.

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай у трикутнику *ABC* через центр *O* описаного кола проведено пряму *a*, перпендикулярну до площини *ABC* (рис. 11.5). Розглянемо довільну точку $M \in a$. Сполучаємо точку *M* із точками *A*, *B*, *C* відрізками. Похилі *MA*, *MB* і *MC* мають рівні проекції ($AO = BO = CO$ як радіуси описаного кола), отже, ці похилі дорівнюють одна одній: $MA = MB = MC$, тобто точка *M* рівновіддалена від вершин трикутника. ◁	У даній конфігурації фактично з точки *M*, вибраної на даній прямій, проведено до площини трикутника перпендикуляр та похилі (рис. 11.5). Тому доцільно використати відповідні властивості, які пов'язують довжини похилих, проведених з однієї точки до однієї площини, та їх проекцій.

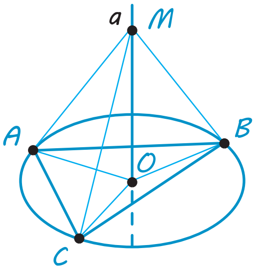


Рис. 11.5

Задача 2

Відстань від даної точки до площини ромба дорівнює 8 м, а до кожної з його сторін — 10 м. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей ромб.

Розв'язання

▶ Нехай дано ромб *ABCD* і точку *S*, розташовану поза площиною ромба. Проведемо з точки *S* перпендикуляр *SO* до площини *ABCD* та перпендикуляри *SK*, *SM*, *SN*, *SL* на сторони ромба (рис. 11.6). Тоді за умовою $SO = 8$ м і $SK = SM = SN = SL = 10$ м.

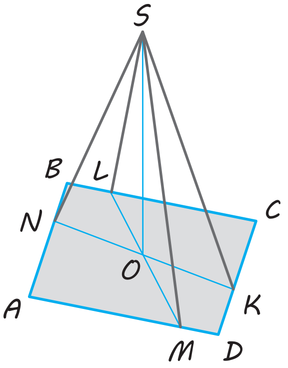


Рис. 11.6

Беручи до уваги, що рівні похилі, проведені з однієї точки до однієї площини, мають рівні проекції, отримуємо: $OK = OM = ON = OL$. Оскільки $SK \perp DC$, то $OK \perp DC$ за теоремою про три перпендикуляри. Аналогічно $OM \perp AD$, $ON \perp AB$, $OL \perp BC$. Тоді точка *O* рівновіддалена від усіх сторін ромба і є центром кола, вписаного в ромб[*], а *OK* — радіус цього кола. Із прямокутного трикутника *SOK* ($SO \perp \text{пл.}\, ABCD$, отже, $SO \perp OK$): $OK = \sqrt{SK^2 - SO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\,(\text{м})$.

Відповідь: 6 м. ◁

Коментар

Оскільки відстань від точки до площини вимірюють за перпендикуляром, то ми маємо фактично перпендикуляр і похилі до площини і можемо використати відповідні властивості, які пов'язують довжини похилих, проведених із однієї точки до однієї площини, та їх проекцій.

Щоб обґрунтувати, що одержані проекції похилих є саме радіусами вписаного в ромб кола, зручно використати теорему про три перпендикуляри.

Для обґрунтування того, що трикутник *SOK* є прямокутним, достатньо використати означення прямої (*SO*), перпендикулярної до площини (*ABCD*), — тоді пряма *SO* перпендикулярна до будь-якої прямої площини *ABCD*, зокрема до прямої *OK*.

Задача 3

Доведіть, що **діагональ куба перпендикулярна до площини, яка проходить через кінці трьох ребер куба, які виходять із тієї самої вершини, що й діагональ.**

Розв'язання

▶ Розглянемо в кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.7) діагональ BD_1. Оскільки $D_1D \perp \text{пл.}\, ABCD$, то *BD* — проекція похилої BD_1 на пл. *ABCD*. Але $AC \perp BD$ (як діагоналі квадрата *ABCD*), отже, $AC \perp BD_1$.

Коментар

Для того щоб довести перпендикулярність прямої і площини, використаємо відповідну ознаку перпендикулярності: доведемо, що пряма BD_1 перпендикулярна до двох прямих, які перетинаються, площини AB_1C.

---

[*] Точка *O* є точкою перетину діагоналей ромба, відрізки *OL* та *OM* лежать на одній прямій, *LM* — висота ромба (аналогічно *NK* — теж висота ромба).

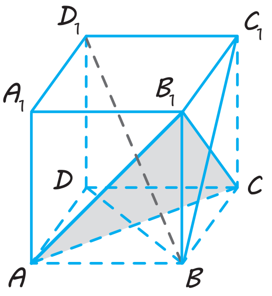


Рис. 11.7

Аналогічно $D_1C_1 \perp \text{пл.}\, BB_1C_1C$. Тоді BC_1 — проекція похилої BD_1 на пл. BB_1C_1C. Але $B_1C \perp BC_1$ (як діагоналі квадрата BB_1C_1C), отже, $B_1C \perp BD_1$. Таким чином, пряма BD_1 перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, площини AB_1C.

Отже, $BD_1 \perp \text{пл.}\, AB_1C$ за ознакою перпендикулярності прямої і площини. ◁

Для обґрунтування цього зручно використати теорему про три перпендикуляри, послідовно проектуючи діагональ BD_1 на дві різні грані куба.

Запитання

1. Поясніть, як вводять поняття перпендикуляра і похилої до площини та проекції похилої на площину.
2. Сформулюйте властивості перпендикуляра і похилої до площини.
3. Доведіть властивості перпендикуляра і похилої до площини.
4. Сформулюйте теорему про три перпендикуляри.
5. Доведіть теорему про три перпендикуляри.

Вправи

11.1. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.8) назвіть проекції діагоналі A_1C на всі грані куба.

11.2. Основа піраміди $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Ребро SA перпендикулярне до площини основи. Порівняйте попарно довжини відрізків SA, SB, SC і SD. Обґрунтуйте результат.

11.3. Основа піраміди $SABCD$ — прямокутник $ABCD$, $AB < BC$. Ребро SD перпендикулярне до площини основи. Серед відрізків SA, SB, SC і SD укажіть найменший і найбільший. Обґрунтуйте свій вибір.

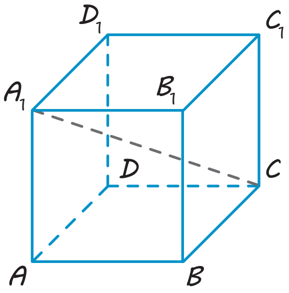


Рис. 11.8

11.4. З точки A до даної площини проведено перпендикуляр і похилу, що перетинають площину відповідно в точках B і C. Знайдіть довжину проекції похилої AC, якщо $AC = 50$ см, $AB = 30$ см.

11.5. З точки A до даної площини проведено перпендикуляр і похилу, що перетинають площину відповідно в точках B і C. Знайдіть відрізок AC, якщо $AB = 8$ см і $\angle BAC = 60°$.

11.6. Відрізки двох похилих, проведених із однієї точки до площини, дорівнюють 15 см і 20 см. Проекція одного з цих відрізків дорівнює 16 см. Знайдіть проекцію другого відрізка.

11.7. Відрізок BC завдовжки 12 см є проекцією відрізка AC на площину α. Точка D належить відрізку AC і $AD:DC=2:3$. Знайдіть довжини відрізка AD і його проекції на площину α, якщо відомо, що $AB=9$ см.

11.8. Із точки S поза площиною α проведено до неї три рівні похилі SA, SB, SC і перпендикуляр SO. Доведіть, що основа перпендикуляра O є центром кола, описаного навколо трикутника ABC.

11.9. Точка A розташована на відстані a від вершин рівностороннього трикутника зі стороною a. Знайдіть відстань від точки A до площини трикутника.

11.10.* У рівнобедреному трикутнику основа і висота дорівнюють 4 м. Задана точка розміщена на відстані 6 м від площини трикутника і на однаковій відстані від його вершин. Знайдіть відстань від даної точки до вершин трикутника.

11.11. Відстані від точки A до вершин квадрата дорівнюють a. Знайдіть відстань від точки A до площини квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює b.

11.12. З точки до площини проведено дві похилі завдовжки 10 см і 17 см. Різниця довжин проекцій цих похилих становить 9 см. Знайдіть довжини проекцій похилих.

11.13. З точки до площини проведено дві похилі. Знайдіть довжини похилих, якщо:

1) одна з них на 26 см більша від другої, а проекції похилих дорівнюють 12 см і 40 см;
2) похилі відносяться як 1 : 2, а проекції похилих дорівнюють 1 см і 7 см.

11.14. З точки до площини проведено дві похилі завдовжки 23 см і 33 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини, якщо довжини проекцій похилих відносяться як 2 : 3.

11.15.* На даному зображенні куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведіть перпендикуляр із вершини B_1 на площину ABD_1 Укажіть проекцію відрізка AB_1 на цю площину.

11.16.* Дано прямокутний трикутник ABC, катети якого AC і BC дорівнюють відповідно 20 см і 15 см. Через вершину A проведено площину α, паралельну прямій BC. Проекція одного з катетів на цю площину дорівнює 12 см. Знайдіть проекцію гіпотенузи на цю площину.

11.17.* Сторона ромба дорівнює 10 см, гострий кут — 60°. Через одну зі сторін ромба проведено площину. Проекція другої сторони на площину дорівнює 8 см. Знайдіть проекції діагоналей ромба на цю площину.

11.18. Чи залишиться справедливою теорема про три перпендикуляри, якщо в її формулюванні слова «пряма на площині» замінити словами «пряма, паралельна площині»? Відповідь обґрунтуйте.

11.19. Пряма a перетинає площину α і не є перпендикулярною до цієї площини. Чи існують у площині α прямі, перпендикулярні до прямої a? Якщо існують, то як їх можна побудувати?

11.20.* Доведіть перпендикулярність прямих AC_1 і BD у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

11.21.* На даному зображенні куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведіть перпендикуляр із вершини B_1 на площину ACD_1. Укажіть основу цього перпендикуляра.

11.22. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AK, перпендикулярну до його площини. Знайдіть відрізок AK, якщо $BK = 6$ см, $DK = 7$ см, $CK = 9$ см.

11.23. Якщо через центр кола, описаного навколо многокутника, проведено пряму, перпендикулярну до площини многокутника, то кожна точка цієї прямої рівновіддалена від вершин многокутника. Доведіть.

11.24. Якщо деяка точка рівновіддалена від вершин многокутника, то основа перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини многокутника, збігається з центром кола, описаного навколо многокутника. Доведіть.

11.25.* У рівнобедреному трикутнику кут при вершині дорівнює 120°, а бічні сторони — по 10 см. Поза площиною трикутника дано точку, яка віддалена від кожної з вершин на 26 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини трикутника.

11.26.* У трикутнику ABC, $\angle A = 45°$, $BC = 12$ см. Точка S розташована на відстані 6 см від його площини і на однаковій відстані від кожної вершини трикутника. Знайдіть відстань від точки S до вершин трикутника.

11.27.* Трапеція вписана в коло, причому менша основа, яка дорівнює 16 см, стягує дугу 60°. На відстані 12 см від площини трапеції розташована точка, рівновіддалена від кожної її вершини. Знайдіть відстань від цієї точки до вершини трапеції.

11.28. У трикутнику ABC сторони $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см. З вершини A проведено до його площини перпендикуляр AD завдовжки 5 см. Знайдіть відстань від точки D до сторони BC.

11.29.* До площини ромба $ABCD$, у якого $\angle A = 45°$, $AB = 8$ см, проведено перпендикуляр MC завдовжки 7 см. Знайдіть відстань від точки M до прямих, які містять сторони ромба.

11.30. Якщо через центр кола, вписаного в многокутник, проведено перпендикуляр до площини многокутника, то кожна точка перпендикуляра рівновіддалена від сторін многокутника. Доведіть.

11.31.* Якщо точка рівновіддалена від сторін многокутника і основа перпендикуляра, опущеного з даної точки до його площини, лежить усередині многокутника, то основа перпендикуляра є центром кола, вписаного в многокутник. Доведіть.

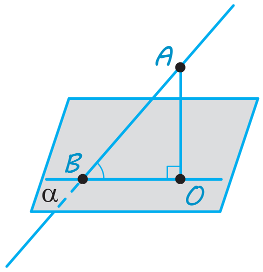
11.32. Доведіть, що сума відстаней від двох протилежних вершин паралелограма до площини, яка не перетинає його, дорівнює сумі відстаней від двох інших протилежних вершин паралелограма до цієї площини.

11.33.* Відстані від вершин A, B, C паралелограма $ABCD$ до деякої площини дорівнюють 11 см, 29 см і 13 см відповідно. Знайдіть відстань від цієї площини до четвертої вершини паралелограма.

§ 12 КУТ МІЖ ПРЯМОЮ ТА ПЛОЩИНОЮ

Таблиця 12

Кут між прямою та площиною

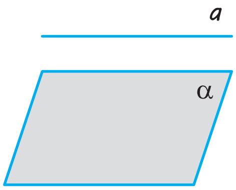


BO — проекція AB на площину α

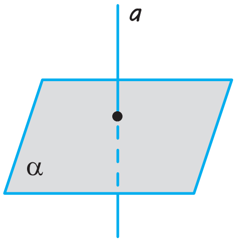
$AO \perp \alpha$

$\angle ABO$ — кут між прямою AB і площиною α

Особливі випадки



$\dfrac{a \parallel \alpha}{a \text{ лежить в } \alpha} \Leftrightarrow \angle(a;\alpha) = 0°$



$a \perp \alpha \Leftrightarrow \angle(a;\alpha) = 90°$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

У стародавні часи для визначення курсу корабля моряки орієнтувалися по зірках. Для цього вимірювали кут, що утворював із площиною горизонту промінь, який ішов від даної точки до відомої зірки.

Сьогодні в практичній діяльності людини часто доводиться визначати кут нахилу прямих і площин до даної площини (див. рисунки).

Дамо означення кута між прямою і площиною, а в наступному параграфі — кута між площинами.

✓ **Означення. Кутом між похилою* і площиною називається кут між цією похилою та її проекцією на площину.**

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між нею і площиною вважають рівним 90°, а якщо пряма паралельна площині або лежить у площині, — то рівним 0°.

З наведеного означення випливає: якщо φ — кут між прямою і площиною, то $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$, а якщо γ — кут між похилою і площиною, то $0° < \gamma < 90°$.

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.1) проекцією діагоналі A_1B бічної грані куба на площину його основи $ABCD$ є відрізок AB (оскільки $A_1A \perp \text{пл.}\, ABCD$). Отже, кутом між A_1B і площиною $ABCD$ є кут A_1BA, який дорівнює 45°.

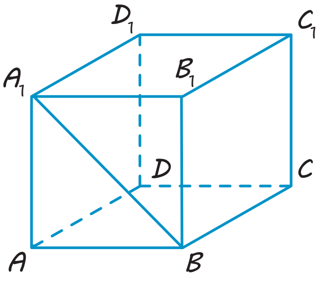


Рис. 12.1

---

* Термін «похила» може означати як пряму, так і відрізок, тобто кутом між відрізком і площиною будемо вважати кут між прямою, що містить даний відрізок, і цією площиною.

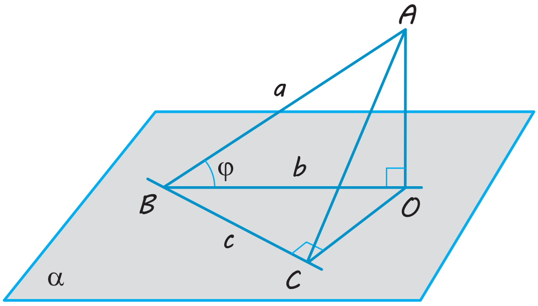


Рис. 12.2

Теорема 12.1. Кут між похилою і площиною є найменшим з усіх кутів між цією похилою і прямими, що лежать у даній площині.

● *Доведення.* Нехай a — похила до площини α, B — точка перетину похилої з площиною, b — проекція похилої, c — пряма в площині α, що проходить через точку B (рис. 12.2). Потрібно довести, що кут φ між прямими a і b менший від кута між прямими a і c.

Якщо $c \perp b$, то гострий кут φ менший від прямого кута між прямими a і c (згадайте теорему про три перпендикуляри).

Якщо прямі c і b не перпендикулярні, то візьмемо на прямій a точку A, відмінну від B, та її проекцію O (тоді $AO \perp \alpha$). Проведемо в площині перпендикуляр OC до прямої c та сполучимо точки A і C відрізком. За теоремою про три перпендикуляри $AC \perp c$. Із прямокутних трикутників ABO і ABC: $\sin\varphi = \frac{AO}{AB}$, $\sin\angle ABC = \frac{AC}{AB}$.

Оскільки $AO < AC$, то $\sin\varphi < \sin\angle ABC$; ураховуючи, що ці кути гострі, одержуємо: $\varphi < \angle ABC$. ○

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Із точки, віддаленої від площини на відстань a, проведено дві похилі, які утворюють із площиною кути 45° і 30°, а між собою — прямий кут. Знайдіть відстань між основами похилих.

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай дано точку A, з якої до площини α проведено дві похилі AB і AC (рис. 12.3). Проведемо з точки A перпендикуляр AO до площини α. За умовою $AO = a$. Оскільки проекціями похилих AB і AC є відповідно відрізки OB і OC, то кут $\angle ABO$ — кут між похилою AB і площиною α, а $\angle ACO$ — кут між похилою AC і площиною α. За умовою $\angle ABO = 45°$ і $\angle ACO = 30°$. Оскільки $AO \perp \alpha$, то $AO \perp OB$ і $AO \perp OC$. Із прямокутного трикутника AOB: $AB = \frac{AO}{\sin 45°} = a\sqrt{2}$.	Оскільки *відстанню від точки до площини є довжина перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини*, то на рисунку до задачі слід зобразити крім похилих перпендикуляр, проведений із даної точки до даної площини (рис. 12.3). Перш ніж проводити обчислення, *в розв'язанні необхідно обґрунтувати, що дану відстань* (від точки до площини) *і дані кути* (між похилими і площиною) *позначено правильно. У процесі обчислення слід указувати, з якого трикутника визначаємо елементи, і, якщо він прямокутний, пояснювати чому.*

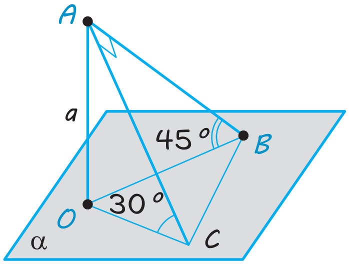


Рис. 12.3

Із прямокутного трикутника AOC:

$$AC = \frac{AO}{\sin 30^\circ} = 2a .$$

Із прямокутного трикутника ABC ($AB \perp AC$ за умовою):

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6} .$$

Відповідь: $a\sqrt{6}$. ◁

План обчислювальної частини розв'язання може бути таким:

1) із прямокутного трикутника AOB знайти AB;
2) із прямокутного трикутника AOC знайти AC;
3) із прямокутного трикутника ABC знайти BC.

Задача 2*

Знайдіть кут[*] між ребром правильного тетраедра і площиною грані, яка не містить це ребро.

Розв'язання

▶ Нехай $ABCD$ — даний правильний тетраедр. Проведемо перпендикуляр DO до площини ABC (рис. 12.4). Тоді AO — проекція ребра AD на площину ABC, отже, $\angle DAO$ — кут між ребром AD і площиною ABC. Оскільки в правильному тетраедрі всі ребра дорівнюють одне одному (нехай $DA = DB = DC = AB = BC = AC = x$), то похилі DA, DB, DC є рівними, а значить, рівні й їхні проекції: $AO = BO = CO$.

Коментар

Нагадаємо, що *в правильному тетраедрі всі грані є правильними трикутниками, тому всі його ребра дорівнюють одне одному*. Оскільки кутом між похилою і площиною називається кут між цією похилою та її проекцією на площину, то для побудови кута між ребром AD і площиною ABC (рис. 12.4) достатньо побудувати проекцію AD на площину ABC. Для цього потрібно провести перпендикуляр із точки D до площини ABC.

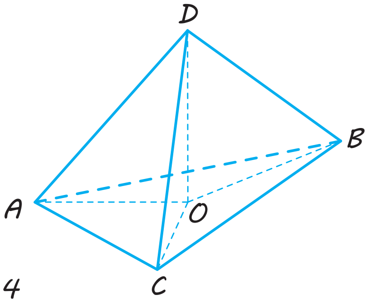


Рис. 12.4

---

[*] Нагадаємо, що задачу на знаходження кута вважають розв'язаною, якщо знайдено градусну міру кута або будь-яку його тригонометричну функцію.

Це означає, що точка O є центром кола, описаного навколо правильного трикутника ABC, а відрізок AO — його радіусом. Тоді

$$AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Із прямокутного трикутника ADO ($DO \perp AO$, оскільки $DO \perp$ пл. ABC):

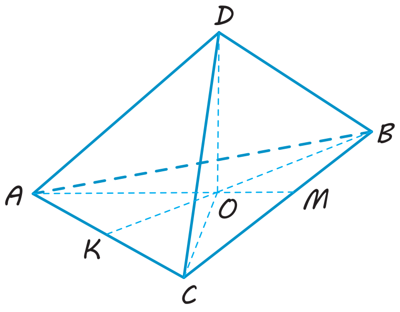
$$\cos\angle DAO = \frac{AO}{AD} = \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Відповідь: $\cos\angle DAO = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ◁

В отриманій конфігурації з точки D до площини трикутника ABC проведено перпендикуляр і похилі. Тому доцільно використати відповідні властивості, які пов'язують довжини похилих, проведених з однієї точки до однієї площини, та їх проекцій.

Слід також урахувати, що в цій задачі на обчислення *не дано довжини жодного відрізка, і тому для її розв'язання зручно ввести невідомий відрізок*.

Зауваження. Для правильної побудови рисунка до цієї задачі необхідно звернути увагу на те, що трикутник ABC є зображенням правильного трикутника, а точка O — зображенням його центра (який збігається з центром описаного кола). Оскільки центр правильного трикутника лежить у точці перетину висот, бісектрис і медіан, а медіани проектуються в медіани проекції трикутника, то на рисунку точка O повинна міститися в точці перетину медіан AM і BK трикутника ABC (рис. 12.5).



◆ Рис. 12.5

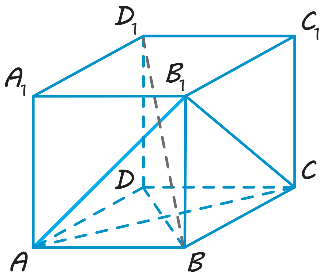
Запитання

1. Що називається кутом між похилою і площиною?
2. Чому дорівнює кут між прямою і площиною, якщо:
   1) пряма перпендикулярна до площини;
   2) пряма паралельна площині;
   3) пряма лежить у площині?
3.* Доведіть, що кут між похилою і площиною є найменшим з усіх кутів між цією похилою і прямими, які лежать у даній площині.

Вправи

12.1.° У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.6) укажіть кути між даними похилою і площиною:

1) AB_1 і пл. $ABCD$;
2) AB_1 і пл. $A_1B_1C_1D_1$;
3) AB_1 і пл. AA_1D_1D;
4) AB_1 і пл. BB_1C_1C;
5) BD_1 і пл. $ABCD$;
6) BD_1 і пл. BB_1C_1C;
7) B_1C і пл. $ABCD$;
8) B_1C і пл. CDD_1C_1.



◆ Рис. 12.6

12.2.° Довжина похилої дорівнює a. Чому дорівнює довжина проекції цієї похилої на площину, якщо похила утворює з площиною кут, що дорівнює:
1) 45°; 2) 60°; 3) 30°?

12.3.° Точка A віддалена від площини на відстань d. Знайдіть довжини похилих, проведених із цієї точки під такими кутами до площини:
1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

12.4. Доведіть, що рівні похилі, проведені до площини з точки, яка не належить площині, утворюють із площиною рівні кути.

12.5. Яку фігуру на площині α утворюють основи всіх похилих, що проведені до площини α з точки, що не належить площині, і утворюють рівні кути з площиною α?

12.6. Доведіть, що довжина ортогональної проекції похилої дорівнює добутку цієї похилої на косинус кута, який вона утворює з площиною проектування.

12.7. Чи може катет рівнобедреного прямокутного трикутника утворювати з площиною, що проходить через його гіпотенузу, кут 60°? Яким може бути найбільший кут між катетом і цією площиною?

12.8.* Доведіть, що пряма, яка перетинає паралельні площини, перетинає їх під однаковими кутами.

12.9.* Доведіть, що площина, яка перетинає паралельні прямі, перетинає їх під однаковими кутами.

12.10. Прямі a і b утворюють із площиною α рівні кути. Чи будуть прямі a і b паралельними?

12.11. Дві різні площини утворюють із даною прямою рівні кути. Як розміщені площини одна відносно другої?

12.12.* Одна з двох мимобіжних прямих перетинає площину під кутом 60°, а друга перпендикулярна до цієї площини. Знайдіть кут між даними мимобіжними прямими.

12.13. Відрізок завдовжки 10 м перетинає площину; його кінці розташовані на відстанях 2 м і 3 м від площини. Знайдіть кут між даним відрізком і площиною.

12.14. Знайдіть кут між діагоналлю куба і площиною його основи.

12.15. Дано трикутник ABC і точку K, яка не належить його площині. Відрізки KD, KE, KF — перпендикуляри, проведені з точки K до сторін трикутника, однаково нахилених до площини трикутника. Доведіть, що точка K проектується в центр кола, вписаного в трикутник.

12.16.* Побудовано площину, яка проходить через сторону квадрата і утворює з його діагоналлю кут 30°. Знайдіть кути, які утворюють із цією площиною сторони квадрата, що є похилими до неї.

12.17. Через катет рівнобедреного прямокутного трикутника проведено площину під кутом 45° до другого катета. Знайдіть кут між гіпотенузою і площиною.

12.18. Із точки, віддаленої від площини на відстань a, проведено дві похилі, які утворюють із площиною кути 45°, а між собою — кут 60°. Знайдіть відстань між основами похилих.

12.19. З точки, віддаленої від площини на відстань a, проведено дві похилі під кутом 30° до площини, причому їх проекції утворюють кут 120°. Знайдіть відстань між основами похилих.

12.20.* З вершини A квадрата $ABCD$ перпендикулярно до його площини проведено відрізок AK, що дорівнює 3. Із точки K проведено перпендикуляри до сторін BC і CD, довжина перпендикуляра з точки K до сторони BC дорівнює 6. Знайдіть кути, які утворюють ці перпендикуляри з площиною квадрата.

12.21.* Основа рівнобедреного трикутника лежить у площині α (площина трикутника не збігається з площиною α). Який із кутів більший: кут нахилу бічної сторони до площини α чи кут нахилу висоти, проведеної на основу трикутника, до площини α?

12.22.* Кут між прямою a і площиною α дорівнює 45°. Через точку їх перетину в площині α проведено пряму b. Кут між прямими a і b дорівнює 60°. Доведіть, що кут між прямою b і проекцією прямої a на площину α дорівнює 45°.

12.23.* Через сторону AC рівностороннього трикутника ABC проведено площину α. Кут між висотою BD трикутника і цією площиною дорівнює β. Знайдіть кут φ між прямою AB та площиною α.

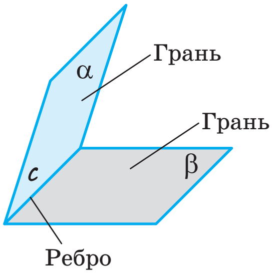
Виявіть свою компетентність

12.24. Доведіть, що коли всі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи рівні кути, то основою піраміди є многокутник, навколо якого можна описати коло, і вершина піраміди проектується в центр цього кола. Наведіть приклади зазначеної конструкції з реального життя.

§ 13 ДВОГРАННИЙ КУТ. КУТ МІЖ ПЛОЩИНАМИ

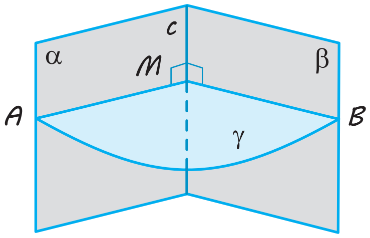
Таблиця 13

1. Двогранний кут



Двогранний кут — фігура, утворена двома півплощинами α і β зі спільною прямою *c*, що їх обмежує. Півплощини α і β — *грані* двогранного кута, а пряма *c* — *ребро* двогранного кута.

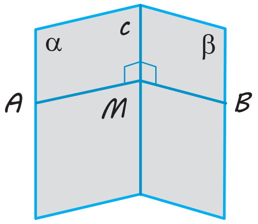
Лінійний кут двогранного кута



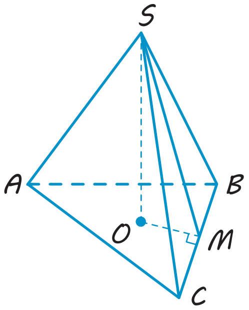
$\angle AMB$ — лінійний кут двогранного кута ($\gamma \perp c$, γ перетинає α по променю *MA*, γ перетинає β по променю *MB*)

Якщо φ — лінійний кут, *то* $0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ$.

2. Практичні способи побудови лінійного кута

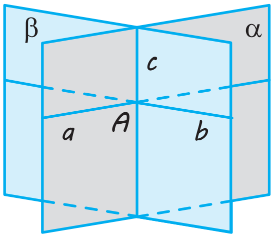


$M \in c$,
$MA \perp c$ (у грані α),
$MB \perp c$ (у грані β),
$\angle AMB$ — лінійний



$SO \perp$ пл. ABC,
$OM \perp BC$.
Тоді $SM \perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри), $\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі *BC*.

3. Кут між площинами

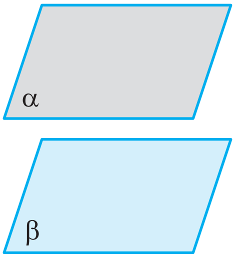


$0^\circ \leqslant \angle(\alpha;\beta) \leqslant 90^\circ$

Кут між площинами **— найменший[*] із двогранних кутів, утворених відповідними півплощинами.**

Якщо площини α і β перетинаються по прямій *c* і через точку *A* на цій прямій у даних площинах проведено прямі $a \perp c$, $b \perp c$,

то $\angle(\alpha;\beta) = \angle(a;b)$.



$$\boxed{\begin{array}{c}\alpha \parallel \beta \\ \hline \alpha = \beta\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\angle(\alpha;\beta) = 0^\circ}$$

---

[*] Якщо внаслідок перетину площин усі утворені двогранні кути дорівнюють один одному (усі кути прямі), то як кут між площинами вибирають будь-який із них.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Двогранний кут

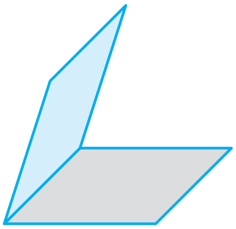


Рис. 13.1

Півплощину в просторі можна вважати просторовим аналогом променя. Тоді аналогом кута між променями на площині буде кут між півплощинами.

Означення. **Двогранним кутом** **називається фігура, утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує** (рис. 13.1).

Півплощини називаються *гранями* двогранного кута, а пряма, що їх обмежує, — *ребром* двогранного кута.

Наочне уявлення про двогранний кут дають напіввідкрита класна дошка, двоскатний дах, відкритий ноутбук (див. рисунки).

Площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає його грані по двох променях. Кут, утворений цими променями, називають *лінійним кутом* двогранного кута.

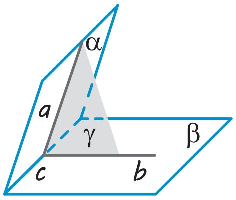


Рис. 13.2

Нехай дано двогранний кут, утворений півплощинами α і β зі спільною прямою c (рис. 13.2), і площина γ, перпендикулярна до прямої c, яка перетинає півплощини α і β по променях a і b відповідно. Кут між променями a та b і є лінійним кутом цього двогранного кута.

За міру двогранного кута приймають міру відповідного йому лінійного кута: $\angle(\alpha;\beta)=\angle(a;b)$.

Доведемо, що величина лінійного кута не залежить від вибору площини γ.

● *Доведення.* Нехай γ і γ' — площини, перпендикулярні до прямої c, які проходять через точки O і O' на прямій c та перетинають півплощини α і β по променях a і a' та b і b' відповідно (рис. 13.3). Оскільки дві різні площини, перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої, паралельні, то $\gamma \parallel \gamma'$.

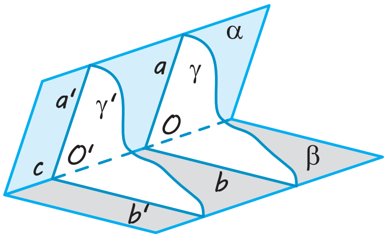


Рис. 13.3

Розглянемо паралельне проектування в напрямі прямої OO' на площину γ'. Оскільки півплощина α проходить через пряму OO' і перетинає площину γ по променю a, а площину γ' — по променю a', то промінь a' є проекцією променя a на площину γ'. Аналогічно промінь b' є проекцією променя b на площину γ'. Але за властивостями паралельного проектування, якщо плоска фігура F (наприклад, кут між променями a і b) лежить у площині γ, паралельній площині проекцій γ', то її проекція на площину γ' дорівнює фігурі F. Отже, кут між променями a і b дорівнює куту між променями a' і b'. ○

Якщо позначити лінійний кут двогранного кута через φ, то з означення випливає, що $0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$.

Двогранний кут називається прямим, **якщо його лінійний кут є прямим.**

Кутом між двома сусідніми гранями многогранника називатимемо двогранний кут між відповідними півплощинами.

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 13.4) кут між гранями $ABCD$ і BB_1C_1C прямий, оскільки відповідний лінійний кут ABB_1 дорівнює 90° (площина ABB_1A_1 перпендикулярна до ребра BC і перетинає відповідні півплощини по променях BA і BB_1, отже, $\angle ABB_1$ — лінійний кут двогранного кута з ребром BC).

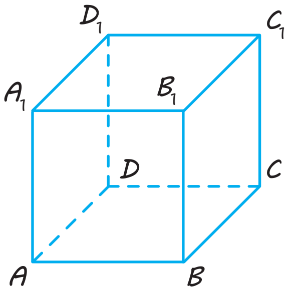


Рис. 13.4

2 Практичні способи побудови лінійного кута двогранного кута

У задачах, для розв'язування яких доводиться застосовувати лінійні кути, не завжди зручно користуватися означенням лінійного кута. Тому доцільно пам'ятати деякі практичні способи, що полегшують побудову лінійних кутів.

Спосіб 1. **Якщо з точки** M**, узятої на ребрі двогранного кута, провести в його гранях перпендикуляри** MA **і** MB **до ребра, то кут між перпендикулярами буде лінійним кутом двогранного кута** (рис. 13.5).

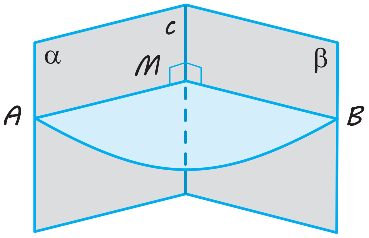


Рис. 13.5

● За побудовою $MA \perp c$ і $MB \perp c$, тоді за ознакою перпендикулярності прямої і площини площина MAB перпендикулярна до ребра c і перетинає грані двогранного кута по променях MA і MB. Отже, за означенням кут AMB дійсно є лінійним кутом двогранного кута. ○

Наприклад, щоб у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рис. 13.4) отримати лінійний кут двогранного кута з ребром BC, достатньо помітити, що в грані $ABCD$ $AB \perp BC$, а в грані BB_1C_1C $BB_1 \perp BC$, отже, $\angle ABB_1$ — лінійний кут двогранного кута між площинами $ABCD$ і BB_1C_1C (і $\angle ABB_1 = 90°$ як кут квадрата ABB_1A_1).

Спосіб 2. **Якщо з точки *S*, яка лежить в одній із граней двогранного кута, проведено перпендикуляр *SO* до його другої грані, то, для того щоб побудувати відповідний лінійний кут, достатньо з основи даного перпендикуляра (точки *O*) провести перпендикуляр до ребра двогранного кута і сполучити відрізком одержану на ребрі точку з точкою *S*.**

● Нехай дано двогранний кут із ребром *AB* і гранями α і β (рис. 13.6). З точки $S \in \beta$ проведено перпендикуляр до площини α $(SO \perp \alpha)$. З точки *O* проведемо в грані α перпендикуляр $OM \perp AB$ і сполучимо точки *S* і *M* відрізком. За теоремою про три перпендикуляри $SM \perp AB$. Тоді з точки *M* на ребрі двогранного кута проведено в його гранях два перпендикуляри до ребра. Отже, як обґрунтовано у способі 1, кут *SMO* дійсно є лінійним кутом даного двогранного кута. ○

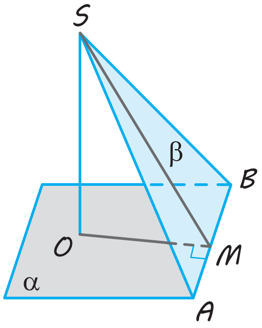


Рис. 13.6

Зауваження. Під час запису розв'язань задач, пов'язаних із двогранними кутами, результат, обґрунтований у практичному способі 1, можна використовувати як відомий опорний факт. Але обґрунтування, наведені у способі 2, доводиться повторювати в розв'язанні кожної задачі, у якому використовують цей спосіб побудови лінійного кута. (Можливий варіант запису такого обґрунтування наведено в табл. 13.)

3 Кут між площинами

Дамо означення кута між площинами.

✓ Означення. Кутом між площинами, що перетинаються, **називається найменший[*] із двогранних кутів, утворених відповідними півплощинами[**]**. Кут між паралельними площинами чи площинами, які збігаються, вважають таким, що дорівнює нулю.

Якщо позначити кут між площинами через φ, то з наведеного означення випливає, що $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$. Покажемо, що **для того щоб знайти величину кута між площинами, які перетинаються, достатньо через довільну точку на прямій їх перетину провести в кожній площині пряму, перпендикулярну до прямої їх перетину. Величина кута між цими прямими і дорівнюватиме величині кута між даними площинами.**

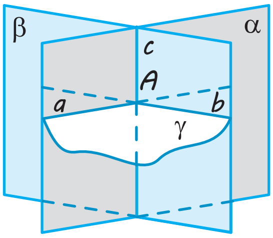


Рис. 13.7

● Дійсно, нехай дві площини α і β перетинаються по прямій *c* (рис. 13.7). Виберемо точку *A* на прямій *c* і проведемо через неї у площині α пряму $a \perp c$, а в площині β — пряму $b \perp c$. Площина γ, яка проходить через прямі *a* і *b* (що перетинаються в точці *A*), перпендикулярна до прямої *c* (за ознакою перпендикулярності прямої і площини). Вона перетинає ці площини по прямих *a* і *b*. За означенням кути між відповідними променями прямих *a* і *b* є лінійними кутами двогранних кутів,

---

[*] Якщо при перетині площин усі утворені двогранні кути рівні (тобто всі кути прямі), то як кут між площинами вибирають будь-який із них.

[**] Маються на увазі двогранні кути, гранями кожного з яких є одна півплощина площини α і одна півплощина площини β, а ребром — пряма перетину даних площин.

утворених півплощинами площин α і β (зі спільною прямою c). Тоді найменший із двогранних кутів, утворених відповідними півплощинами, дорівнює найменшому з кутів, утворених відповідними променями прямих a і b, тобто куту між цими прямими. Отже, $\angle(\alpha;\beta)=\angle(a;b)$. ○

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 13.8) кут між площинами $ABCD$ і A_1BCD_1 дорівнює куту між прямими AB і A_1B, які лежать у розглянутих площинах і перпендикулярні до прямої їх перетину BC (оскільки $BC\perp$ пл. ABB_1A_1). Отже, кут між площинами $ABCD$ і A_1BCD_1 дорівнює 45°.

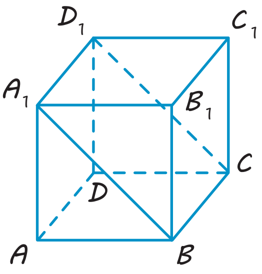


Рис. 13.8

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Знайдіть кут між гранями правильного тетраедра.

Розв’язання

▶ Нехай $SABC$ — правильний тетраедр (рис. 13.9).

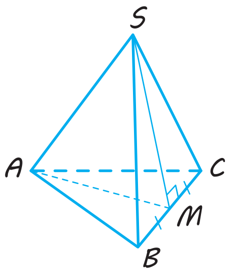


Рис. 13.9

Візьмемо точку M — середину ребра BC і сполучимо її відрізками з точками S і A. У правильному тетраедрі всі ребра дорівнюють одне одному (нехай $SA=SB=SC=$ $=AC=BC=AB=x$). Отже, трикутники SBC і ABC — правильні, а їх медіани SM та AM є відповідно і їх висотами, тобто $SM\perp BC$ та $AM\perp BC$. Тоді $\angle SMA$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC (нехай $\angle SMA=\varphi$). Оскільки $SM=AM=\frac{x\sqrt{3}}{2}$ (як висоти правильних трикутників), то за теоремою косинусів із трикутника SMA:

$$SA^2=AM^2+SM^2-2AM\cdot SM\cdot\cos\varphi,$$

тобто $x^2=\frac{3x^2}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{3x^2}{2}\cdot\cos\varphi$.

Звідси $\cos\varphi=\frac{1}{3}$.

Відповідь: $\cos\varphi=\frac{1}{3}$. ◁

Коментар

Нагадаємо, що *у правильному тетраедрі всі грані є правильними трикутниками, тому всі його ребра рівні між собою*. Для побудови лінійного кута двогранного кута при ребрі BC зручно використати практичний спосіб 1 і отримати у гранях двогранного кута два перпендикуляри до ребра, проведені з однієї точки M (рис. 13.9).

Слід мати на увазі, що, проводячи перпендикуляри з точок S і A до прямої BC, потрібно буде доводити, що їхні основи попадають в одну точку. Щоб уникнути цього, зручно взяти середину відрізка BC, сполучити відрізками цю точку з точками S і A, а потім довести, що дійсно отримано перпендикуляри до BC.

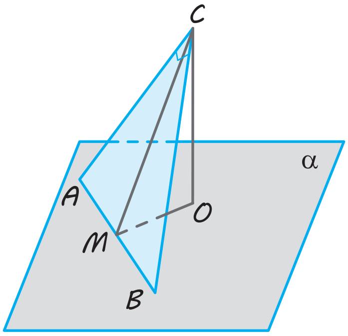
Необхідно також урахувати, що *в запропонованій задачі на обчислення не дано довжини жодного відрізка. Тому для її розв’язання зручно ввести невідомий відрізок* (і, крім того, позначити шуканий кут через φ).

Задача 2

Через гіпотенузу $AB = c$ рівнобедреного прямокутного трикутника ABC проведено площину α, яка утворює з площиною трикутника кут 60°. Знайдіть відстань від вершини C до площини α.

Розв'язання

▶ Проведемо перпендикуляр CO з точки C до площини α, тоді CO — відстань від точки C до площини α (рис. 13.10).



◆ *Рис. 13.10*

У площині α проведемо $OM \perp AB$ і сполучимо відрізком точки C і M.
Тоді $CM \perp AB$ за теоремою про три перпендикуляри, тобто $\angle CMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі AB, отже, $\angle CMO = 60°$.
У рівнобедреному прямокутному трикутнику висота CM є одночасно і медіаною, тому $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$. Тоді з прямокутного трикутника ACM: $CM = \frac{c}{2}$.
Із прямокутного трикутника CMO ($CO \perp OM$, оскільки $CO \perp \alpha$):

$$CO = CM \cdot \sin 60° = \frac{c\sqrt{3}}{4}.$$

Відповідь: $\frac{c\sqrt{3}}{4}$. ◁

Коментар

Для того щоб знайти відстань від точки C до площини α (рис. 13.10), необхідно провести перпендикуляр до площини α $(CO \perp \alpha)$. Тому побудову кута між площиною трикутника і площиною α зручно виконати способом 2 побудови лінійного кута. У цей спосіб ми завжди отримуємо лінійний кут двогранного кута як гострий кут прямокутного трикутника. Отже, величина одержаного гострого лінійного кута завжди дорівнює величині кута між площинами, у яких лежать грані розглядуваного двогранного кута.

Задача 3

(Теорема про три синуси). Якщо величина двогранного кута дорівнює γ, а пряма, яка лежить в одній із граней двогранного кута, перетинається з його ребром під кутом α і утворює з площиною другої грані кут β, то $\sin\beta = \sin\alpha \cdot \sin\gamma$. Доведіть.

Розв’язання

▶ Нехай задано двогранний кут з ребром BC і гранями φ і π (рис. 13.11).

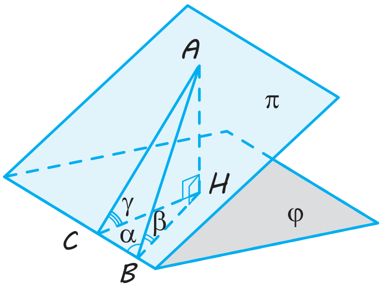


Рис. 13.11

У грані π також задано пряму AB, яка утворює з ребром BC кут α, тобто $\angle ABC=\alpha$.
Проведемо перпендикуляр $AH\perp\varphi$. Тоді BH — проекція AB на площину φ і $\angle ABH$ — кут нахилу прямої AB до площини φ, тобто $\angle ABH=\beta$.
З точки H проведемо перпендикуляр до ребра двогранного кута: $HC\perp BC$. За теоремою про три перпендикуляри $AC\perp BC$. Отже, $\angle ACH$ — лінійний кут двогранного кута і $\angle ACH=\gamma$.
Нехай $AB=c$ (де $c>0$).
Із прямокутного трикутника ABH:

$$AH=AB\cdot\sin\beta=c\cdot\sin\beta. \qquad (1)$$

Із прямокутного трикутника ABC:

$$AC=AB\cdot\sin\alpha=c\cdot\sin\alpha.$$

Із прямокутного трикутника ACH:

$$AH=AC\cdot\sin\gamma=c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma. \qquad (2)$$

Прирівнюючи значення AH за формулами (1) і (2), одержуємо: $c\cdot\sin\beta=c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma$. Враховуючи, що $c\neq 0$, маємо: $\sin\beta=\sin\alpha\cdot\sin\gamma$. ◁

Коментар

Якщо на рисунку AB — задана пряма, то кут між цією прямою і площиною φ — це кут між прямою та її проекцією на площину. Щоб отримати цю проекцію, проведемо перпендикуляр $AH\perp\varphi$ (тоді потрібний кут — це $\angle ABH$).
Далі для побудови лінійного кута заданого двогранного кута доцільно використати другий практичний спосіб побудови лінійного кута (провести $HC\perp BC$, з’єднати точки A і C і використати теорему про три перпендикуляри).
Оскільки умовою задачі не задано жодного відрізка, то введемо невідомий відрізок, наприклад, $AB=c$, що дозволить перетворити цю задачу на доведення в задачу на обчислення.
Введення невідомого передбачає складання рівняння, для чого можна один і той самий відрізок (наприклад, AH) двома способами виразити через невідомий відрізок (спочатку з трикутника ABH, а потім з «ланцюжка» трикутників ABC і ACH).

Запитання

1. Поясніть, яка фігура називається двогранним кутом, ребром кута, гранню кута.

2. Поясніть, як визначають лінійний кут двогранного кута.

3. Доведіть, що міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута.

4. Поясніть, користуючись моделлю двогранного кута, як практично можна побудувати лінійний кут двогранного кута.

5.* Доведіть, що в результаті використання практичних способів дійсно отримують лінійні кути.

6. Дайте означення кута між площинами.

7.* Доведіть, що коли через довільну точку на прямій перетину площин провести в кожній площині пряму, перпендикулярну до прямої їх перетину, то величина кута між цими прямими дорівнює величині кута між даними площинами.

Вправи

13.1. Який кут утворює ребро двогранного кута з будь-якою прямою, яка лежить у площині його лінійного кута?

13.2. На рис. 13.12 зображено двогранний кут із ребром BC. Укажіть лінійний кут цього двогранного кута, якщо $AP \perp$ пл. ABC і в трикутнику ABC $\angle C = 90°$.

13.3. В основі піраміди $OABCD$ (рис. 13.13) лежить квадрат $ABCD$. Бічне ребро OB перпендикулярне до площини основи. Укажіть лінійний кут двогранного кута з ребром CD.

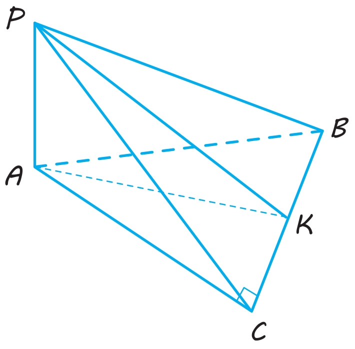


Рис. 13.12

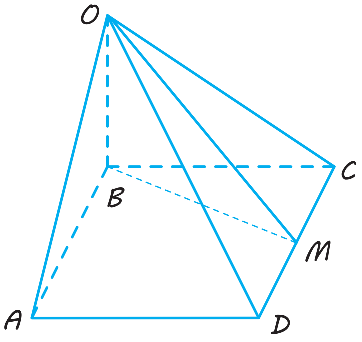


Рис. 13.13

13.4. Півплощини, у яких лежать два рівнобедрених трикутники зі спільною основою, утворюють двогранний кут. Чи є правильним твердження, що медіани, проведені до спільної основи трикутників, утворюють лінійний кут двогранного кута?

13.5. Трикутник MAB і квадрат $ABCD$ розміщені таким чином, що відрізок MB є перпендикуляром до площини квадрата. Величину якого кута можна вважати кутом між площинами AMD і ABC?

13.6. Дві площини перетинаються під кутом 30°. Точка A, яка лежить в одній із цих площин, віддалена від другої площини на відстань a. Знайдіть відстань від цієї точки до прямої перетину площин.

13.7. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайдіть кут нахилу площини ADC_1 до площини ABC.

13.8. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 м і 24 м. Знайдіть відстань від вершини прямого кута до площини, яка проходить через гіпотенузу й утворює з площиною трикутника кут 30°.

13.9. Через сторону AB трикутника ABC проведено площину α під кутом 60° до площини трикутника. Висота CD трикутника ABC дорівнює a. Знайдіть відстань від вершини C трикутника до площини α.

13.10. Через катет $BC = a$ рівнобедреного прямокутного трикутника ABC проведено площину α, яка утворює з площиною трикутника кут 30°. Знайдіть відстань від вершини A до площини α.

13.11.* Доведіть, що площина, яка перетинає паралельні площини, перетинає їх під однаковими кутами.

13.12. Знайдіть кут між площинами, якщо точка, яка лежить на одній із них, віддалена від прямої перетину площин удвічі далі, ніж від другої площини.

13.13. Рівнобедрені трикутники ABC і ABD зі спільною основою AB лежать у різних площинах, кут між якими дорівнює α. Знайдіть $\cos\alpha$, якщо:

1) $AB = 24$ см, $AC = 13$ см, $AD = 37$ см, $CD = 35$ см;
2) $AB = 32$ м, $AC = 65$ м, $AD = 20$ м, $CD = 63$ м.

13.14. Два рівнобедрені трикутники мають спільну основу, а їх площини утворюють кут 60°. Спільна основа дорівнює 16 м, бічна сторона одного трикутника — 17 м, а бічні сторони другого перпендикулярні. Знайдіть відстань між вершинами трикутників, протилежними до спільної основи.

13.15.* У квадраті $ABCD$ через вершину D паралельно діагоналі AC проведено площину α, яка утворює з діагоналлю BD кут 60°. Знайдіть кут між площиною квадрата і площиною α.

13.16.* З точок A і B, які лежать на різних гранях двогранного кута, проведено перпендикуляри AA_1 і BB_1 до ребра кута. Знайдіть:

1) довжину відрізка AB, якщо $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ і двогранний кут дорівнює α;
2) двогранний кут α, якщо $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$, $AB = 7$.

13.17.* Ребро куба дорівнює a. Знайдіть площу перерізу куба площиною, що проходить через сторону основи, якщо кут між цією площиною і площиною основи дорівнює:

1) 30°; 2) 60°.

13.18. Через центр O правильного трикутника ABC проведено до його площини перпендикуляр MO, $AB = a\sqrt{3}$. Кут між прямою MA і площиною трикутника дорівнює 45°. Знайдіть кут між площинами:

1) AMO і BMO; 2) BMC і ABC.

13.19.* Усі ребра правильної трикутної призми дорівнюють одне одному. Знайдіть кут між площиною основи призми і площиною, яка проходить через протилежні вершини бічної грані і середину ребра, протилежного до цієї грані.

13.20.* Доведіть, що коли всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють один одному, то основою піраміди є многокутник, у який можна вписати коло, і вершина піраміди проектується в центр цього кола.

Виявіть свою компетентність

13.21. Наведіть приклади двогранних кутів, використовуючи як джерело їх моделей автомобіль, теплицю для вирощування овочів, засоби професійної діяльності бухгалтера.

§ 14 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПЛОЩИН

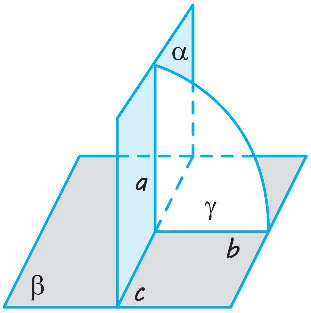
Таблиця 14

Перпендикулярність двох площин

Означення

Дві площини, що перетинаються, називаються перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Зміст

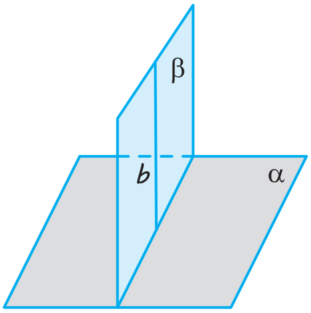


$\boxed{\alpha\perp\beta} \Leftrightarrow$

α перетинає β по прямій c, $\gamma\perp c$,
γ перетинає α по прямій a,
γ перетинає β по прямій b, $a\perp b$

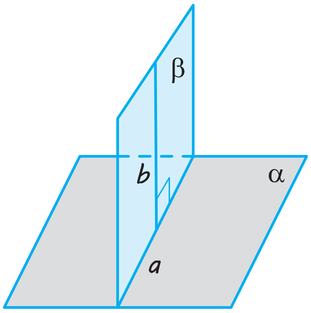
$\Leftrightarrow \angle(\alpha;\beta)=90^\circ$

Ознака



Якщо $b\perp\alpha$ і β проходить через b, *то* $\beta\perp\alpha$.

Властивість



Якщо $\beta\perp\alpha$, β перетинає α по a і $b\perp a$ (b *лежить* у β), *то* $b\perp\alpha$.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Поняття кута між площинами дозволяє означити перпендикулярність площин.

✓ **Означення. Дві площини, що перетинаються, називаються перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°.**

Наочне уявлення про перпендикулярні площини дають площини стіни та стелі кімнати, площини дверей та підлоги (див. рисунок).

Теорема 14.1. *(ознака перпендикулярності площин).* **Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до іншої площини, то ці площини перпендикулярні.**

● *Доведення.* Нехай α — дана площина, b — пряма, перпендикулярна до цієї площини $(b \perp \alpha)$, β — площина, яка проходить через пряму b, і c — пряма, по якій перетинаються площини α і β (рис. 14.1). Доведемо, що площини α і β перпендикулярні.

Проведемо в площині α через точку A перетину прямої b з площиною α (а отже, і з прямою c) пряму a, перпендикулярну до прямої c. Оскільки $b \perp \alpha$, то $b \perp c$ і $b \perp a$. Як було показано в § 13, величина кута між площинами α і β дорівнює величині кута між прямими a і b, які лежать у цих площинах і перпендикулярні до прямої c їх перетину. Ураховуючи, що $b \perp a$, одержуємо $\angle(\alpha; \beta) = \angle(a; b) = 90°$. Отже, площини α і β перпендикулярні. ○

Зокрема, *у кубі* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 14.2) *грані, які перетинаються, попарно перпендикулярні*, оскільки, як було показано раніше, кожне ребро куба (наприклад, AA_1) перпендикулярне до грані, яку воно перетинає (наприклад, до грані $ABCD$). Отже, площина, яка проходять через це ребро (наприклад, площина ADD_1A), за ознакою перпендикулярності площин перпендикулярна до другої площини (до пл. $ABCD$).

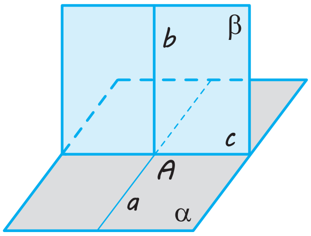


Рис. 14.1

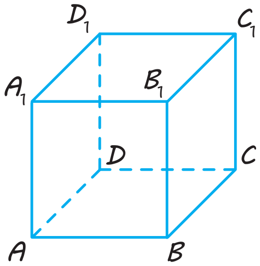


Рис. 14.2

Розглянемо ще одну властивість, яка пов'язує перпендикулярність двох площин і перпендикулярність прямої та площини.

Теорема 14.2. **Пряма, проведена в одній із двох перпендикулярних площин перпендикулярно до прямої їх перетину, перпендикулярна до другої площини.**

● *Доведення.* Нехай перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій c і в площині β проведено пряму b перпендикулярно до прямої c (див. рис. 14.1). Доведемо, що $b \perp \alpha$.

Проведемо в площині α через точку A перетину прямих b і c пряму a, перпендикулярну до прямої c. Тоді величина кута між прямими a і b дорівнює величині кута між площинами α і β, тобто 90°. Отже, пряма b перпендикулярна до прямих a і c площини α, які перетинаються. За ознакою перпендикулярності прямої і площини $b \perp \alpha$. ○

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Дано пряму a і площину α. Проведіть через пряму a площину, перпендикулярну до площини α.

Розв'язання	Коментар
▶ Якщо $a \perp \alpha$, то візьмемо довільну точку B, яка не лежить на прямій a, і через пряму та точку поза нею проведемо площину γ (рис. 14.3, *а*). За ознакою перпендикулярності площин $\gamma \perp \alpha$.	Це задача на уявлювану побудову, яка фактично є завданням на доведення існування фігури, що задовольняє дані умови. Як зазначалося в § 3, це доведення має спиратися на відповідні аксіоми та властивості стереометричних фігур.

Якщо дана пряма не перпендикулярна до площини α, то візьмемо довільну точку A прямої a і проведемо через неї пряму b (рис. 14.3, *б*), перпендикулярну до площини α. Через прямі a і b проводимо площину β. За ознакою перпендикулярності прямої і площини $\beta\perp\alpha$. ◁

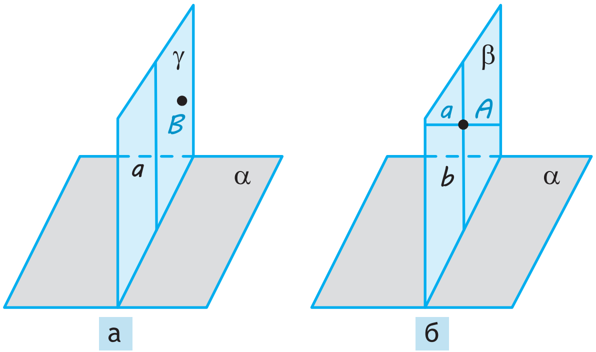


Рис. 14.3

Зокрема, слід використати результати, розглянуті в § 10: *через довільну точку простору завжди можна провести єдину пряму, перпендикулярну до даної площини*. Для того щоб довести перпендикулярність даної і побудованої площин, можна скористатися ознакою перпендикулярності площин (для цього достатньо з'ясувати, що побудована площина проходить через пряму, перпендикулярну до даної площини).

Задача 2

Доведіть, що **площина лінійного кута двогранного кута перпендикулярна до кожної грані двогранного кута.**

Розв'язання

▶ За означенням лінійного кута двогранного кута його площина γ перпендикулярна до ребра c двогранного кута (рис. 14.4). Але кожна грань (α і β) двогранного кута проходить через пряму c, перпендикулярну до площини γ. Отже, за ознакою перпендикулярності площин $\gamma\perp\alpha$ і $\gamma\perp\beta$. ◁

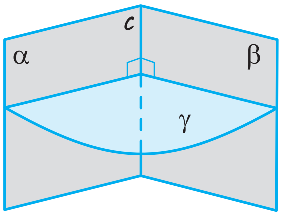


Рис. 14.4

Коментар

Для доведення перпендикулярності двох площин можна використати ознаку перпендикулярності площин, а для цього достатньо з'ясувати, що одна з площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини.

Задача 3

Доведіть, що **коли з точки, яка лежить в одній із перпендикулярних площин, провести перпендикуляр до другої площини, то цей перпендикуляр лежатиме в першій площині.**

Розв'язання

▶ Нехай площини α і β перпендикулярні $(\beta \perp \alpha)$ і перетинаються по прямій c (рис. 14.5).

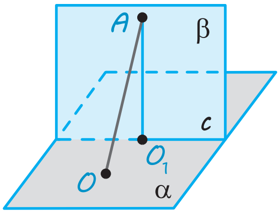


Рис. 14.5

Проведемо з деякої точки $A \in \beta$ перпендикуляр AO до площини α $(AO \perp \alpha)$. Припустимо, що AO не лежить у площині β. Проведемо в площині β через точку A перпендикуляр до прямої c $(AO_1 \perp c)$. Тоді за теоремою 14.2 $AO_1 \perp \alpha$. Одержали, що через точку A проходять дві прямі, перпендикулярні до площини α, а це неможливо. Отже, AO лежить у площині β. ◁

Коментар

Для доведення використаємо метод від супротивного: припустимо, що перпендикуляр не лежить у першій площині, і, використовуючи теорему 14.2, побудуємо ще один перпендикуляр з даної точки до площини. Це призведе до суперечності з твердженням про єдиність такого перпендикуляра.
Таким чином, наше припущення виявиться неправильним, а отже, перпендикуляр має лежати в першій площині.

Задача 4

Доведіть, що **коли дві площини, які перетинаються, перпендикулярні до третьої площини, то пряма їх перетину перпендикулярна до цієї (третьої) площини.**

Розв'язання

▶ Нехай площини α і β перетинаються по прямій a (рис. 14.6) і перпендикулярні до площини γ ($\alpha \perp \gamma$ і $\beta \perp \gamma$). Візьмемо довільну точку A на прямій a і проведемо через неї пряму, перпендикулярну до площини γ $(AO \perp \gamma)$. За попередньою властивістю ця пряма лежить і в площині α, і в площині β, тобто вона збігається з прямою a. Тоді ця пряма перпендикулярна до площини γ. ◁

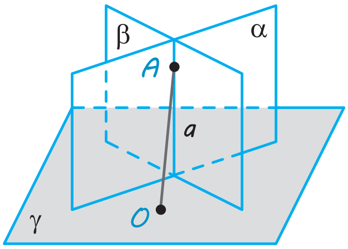


Рис. 14.6

Коментар

Спробуємо застосувати результат, обґрунтований у попередньому прикладі, до точки, узятої на прямій перетину перших двох площин, і врахувати, що дві різні площини можуть мати тільки одну спільну пряму — пряму їх перетину.

Запитання

1. Дайте означення двох перпендикулярних площин.
2. Сформулюйте ознаку перпендикулярності двох площин.
3. Доведіть ознаку перпендикулярності двох площин.
4. Сформулюйте властивість, яка пов'язує перпендикулярність двох площин і перпендикулярність прямої та площини.
5.* Доведіть властивість, яка пов'язує перпендикулярність двох площин і перпендикулярність прямої та площини.

Вправи

14.1.° Площина α перпендикулярна до площини β. Чи буде довільна пряма площини α перпендикулярною до площини β? (Проілюструйте відповідь на моделі перпендикулярних площин.)

14.2.° Дві площини перпендикулярні. Укажіть усі можливі випадки розташування прямої, яка лежить в одній площині, відносно прямої, що лежить у другій площині. (Проілюструйте свою відповідь на моделі.)

14.3.° Чи є правильним, що площина, яка проходить через похилу до іншої площини, завжди не перпендикулярна до цієї площини?

14.4.° Чи є правильним, що дві площини, перпендикулярні до третьої, паралельні?

14.5.° Чи є правильним, що пряма і площина, перпендикулярні до іншої площини, паралельні між собою?

14.6.° Площина і пряма паралельні. Чи є правильним твердження, що площина, перпендикулярна до цієї площини, перпендикулярна і до цієї прямої?

14.7. Площина і пряма паралельні. Чи буде правильним твердження, що площина, перпендикулярна до прямої, перпендикулярна до цієї площини?

14.8. Скільки площин, перпендикулярних до даної площини, можна провести через дану пряму?

14.9. Доведіть, що грані прямокутного паралелепіпеда, які перетинаються, попарно перпендикулярні.

14.10. Доведіть, що в кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перерізи AA_1C_1C і BB_1D_1D перпендикулярні. (Оскільки ці перерізи проходять через діагоналі граней куба, то їх називають *діагональними перерізами*.)

14.11. Доведіть, що через будь-яку точку простору можна провести площину, перпендикулярну до даної площини. Скільки таких площин можна провести через дану точку?

14.12. Рівнобедрений прямокутний трикутник ABC $(\angle C = 90°)$ перегнули по висоті CH таким чином, що площини ACH і BCH утворили прямий кут. Знайдіть кути:
1) AHB; 2) ACB.

14.13. Чи існує трикутна піраміда, у якій три грані попарно перпендикулярні?

14.14. Чи існує чотирикутна піраміда, у якій дві протилежні бічні грані перпендикулярні до основи?

14.15. Чи існує піраміда, у якій три бічні грані перпендикулярні до основи?

14.16.* Дано пряму a і площину α, не перпендикулярну до цієї прямої. Доведіть, що всі прямі, які перпендикулярні до площини α і перетинають пряму a, лежать в одній площині, перпендикулярній до площини α.

14.17. Із точок A і B, які лежать у двох взаємно перпендикулярних площинах, проведено перпендикуляри AC і BD до прямої перетину площин. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо:

1) $AC = 6$ м, $BD = 7$ м, $CD = 6$ м;
2) $AC = 3$ м, $BD = 4$ м, $CD = 12$ м;
3) $AD = 4$ м, $BC = 7$ м, $CD = 1$ м;
4) $AD = BC = 5$ м, $CD = 1$ м;
5) $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$;
6) $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$.

14.18. Точка розташована на відстанях a і b від двох взаємно перпендикулярних площин. Знайдіть відстань від цієї точки до прямої перетину площин (рис. 14.7).

14.19.* Площини α і β взаємно перпендикулярні. У площині α взято точку A, відстань від якої до прямої c (лінії перетину площин) дорівнює 0,5 м. У площині β проведено пряму b, яка паралельна прямій c і віддалена від неї на 1,2 м. Знайдіть відстань від точки A до прямої b.

14.20.* Перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій c. У площині α проведено пряму $a \parallel c$, а в площині β — пряму $b \parallel c$. Знайдіть відстань між прямими a і b, якщо відстань між прямими a і c дорівнює 1,5 м, а між прямими b і c — 0,8 м (рис. 14.8).

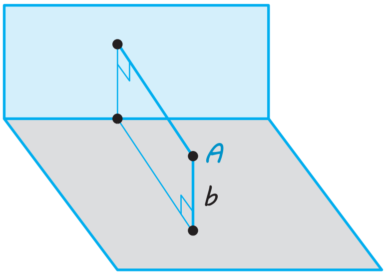


Рис. 14.7

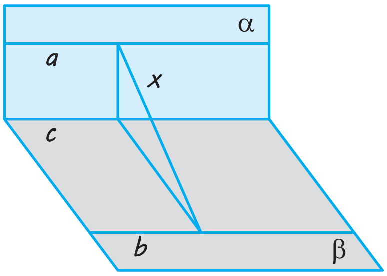


Рис. 14.8

14.21.* Площини рівносторонніх трикутників ABC і ABD перпендикулярні. Знайдіть кут:

1) між прямою DC і площиною ABC;
2) між площинами ADC і BDC.

14.22.* Пряма l перетинає взаємно перпендикулярні площини α і β в точках A та B відповідно, утворюючи при цьому з кожною із площин кути, що дорівнюють φ. Знайдіть довжину відрізка, кінцями якого є проекції точок A і B на лінію перетину даних площин, якщо довжина відрізка AB дорівнює a.

14.23. Площини рівнобедреного трикутника ABF і квадрата $ABCD$ перпендикулярні. Знайдіть відстань:

1) від точки F до прямої CD;
2) від точки F до центра кола, що проходить через точки A, B і центр O квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює 32 і $AF = BF = 20$.

14.24. Площини ABC і ABD утворюють кут 45°. Відомо, що $AD = 3$, $AB = 5$, $BC = \sqrt{2}$; $DA \perp AB$, $CB \perp AB$. Знайдіть:

1) відрізок CD;
2) кут між прямою CD і площиною ABC.

14.25. Прямокутники $ABCD$ і $ABMK$ лежать у взаємно перпендикулярних площинах. Чи є правильним, що:

1) $AC \perp AK$;
2) $AM \perp AD$;
3) $AC \perp AM$?

14.26.* Дано $PABC$ — правильний тетраедр із ребром 8. Через вершину C проведено площину α, перпендикулярну до ребра AP. Знайдіть периметр і площу трикутника, вершинами якого є точки перетину площини α з ребрами даного тетраедра.

14.27.* Зобразіть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і побудуйте його переріз площиною, що проходить через:

1) ребро BB_1 перпендикулярно до площини ACC_1;
2) ребро AB перпендикулярно до площини AB_1C_1;
3) ребро BC перпендикулярно до площини AB_1C_1.

Виявіть свою компетентність

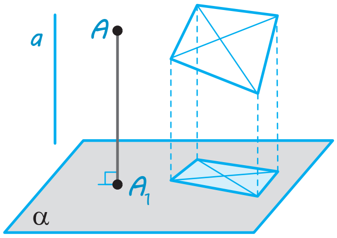
14.28. Вертикальність стіни під час будівництва перевіряють за допомогою виска (шнура з тягарцем). Якщо шнур щільно прилягає до поверхні стіни, то вважають, що вертикальність витримано. На чому ґрунтується такий спосіб перевірки?

§ 15 ОРТОГОНАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ

Таблиця 15

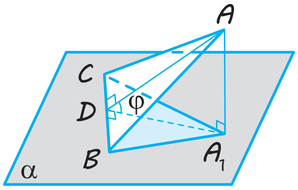
Означення та властивість ортогонального проектування

Означення



$a \perp \alpha$

Властивість



$$S_{\text{проекції}} = S_{\text{фігури}} \cdot \cos\varphi,$$

де φ — кут між площиною фігури і площиною проекції

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Означення та найпростіші властивості ортогонального проектування.

✓ Означення. **Паралельне проектування в напрямі прямої, перпендикулярної до площини проектування, називається ортогональним проектуванням.**

Якщо пряма *a*, яка задає напрям проектування, перпендикулярна до площини α (див. рисунок у табл. 15), то проектуючі прямі (наприклад, $AA_1 \parallel a$) теж будуть перпендикулярними до площини α. Інакше кажучи, *проекцією точки* буде основа перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини (звичайно, якщо точка лежить на площині проекцій, то вона збігається зі своєю проекцією). Якщо вказаним чином побудувати проекцію кожної точки фігури, то одержимо *проекцію* самої *фігури*. Наприклад, якщо площина даного *n*-кутника і площина проекцій не перпендикулярні, то проекцією *n*-кутника є *n*-кутник (див. приклади, наведені в табл. 15).

Оскільки ортогональне проектування є окремим випадком паралельного проектування, то воно має всі його властивості, обґрунтовані в § 7. Нагадаємо їх.

Ортогональною проекцією прямої a, яка не перпендикулярна до площини проекцій, є деяка пряма a′. Якщо пряма *a* паралельна площині проекцій, то її проекція *a′* паралельна прямій *a*.

Проекцією паралельних прямих є паралельні прямі (якщо прямі не перпендикулярні до площини проекцій та площина даних прямих не перпендикулярна до площини проекцій).

Відношення довжин відрізків, які лежать на одній прямій (або на паралельних прямих), зберігається під час паралельного проектування.

Якщо плоска фігура F лежить у площині, паралельній площині проекцій, то її проекція F′ на цю площину дорівнює фігурі F.

Ортогональною проекцією кола, яке не перпендикулярне до площини проекцій, є еліпс (рис. 15.1).

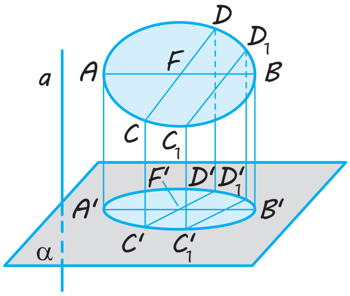
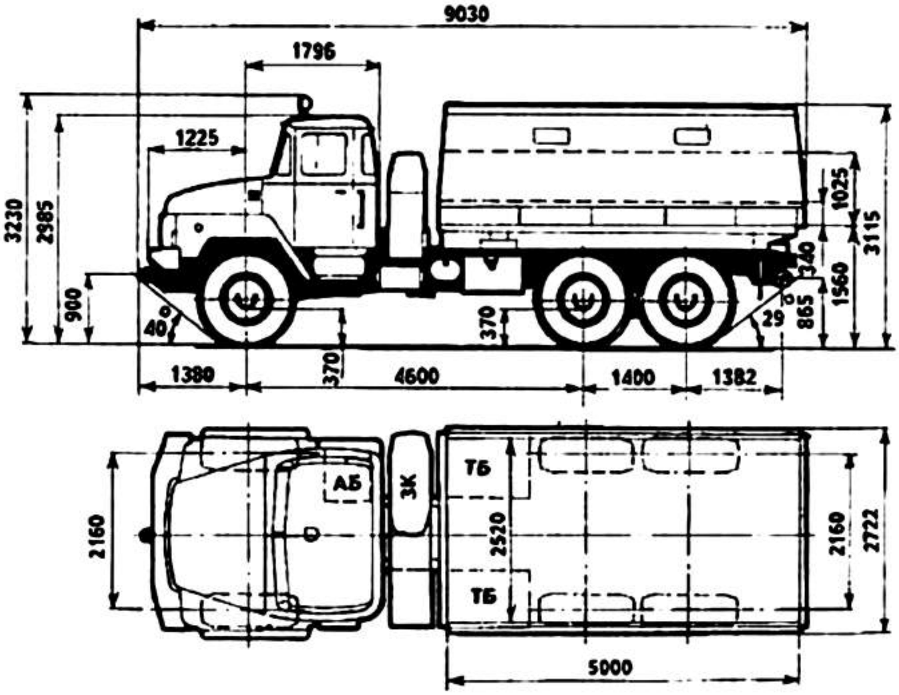


Рис. 15.1

Нагадаємо, що проекцію кола одержують стискуванням або розтягуванням його в напрямі будь-якого діаметра в одне й те саме число разів.

Зображення об’єктів за допомогою ортогонального проектування широко використовують у різноманітних галузях промисловості, наприклад в автомобілебудуванні (див. рисунок).



Автомобіль КрАЗ-260 6х6.1

2 Площа ортогональної проекції многокутника.

✓ **Теорема 15.1.** **Площа ортогональної проекції многокутника на площину дорівнює добутку його площі на косинус кута між площиною многокутника і площиною проекцій.**

● *Доведення.* Розглянемо спочатку трикутник і його проекцію на площину, яка проходить через одну з його сторін (рис. 15.2). Проекцією трикутника ABC є трикутник ABC_1 у площині α $(CC_1 \perp \alpha)$. Проведемо висоту CD трикутника ABC. За теоремою про три перпендикуляри $C_1D \perp AB$, тобто відрізок CD — висота трикутника ABC_1. Кут CDC_1 дорівнює куту φ між площиною трикутника ABC і площиною проекцій α. Маємо: $C_1D = CD\cos\varphi$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot CD$, $S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2}AB\cdot C_1D = \frac{1}{2}AB\cdot CD\cdot\cos\varphi$. Отже, $S_{\triangle ABC_1} = S_{\triangle ABC}\cdot\cos\varphi$, що і потрібно було довести. ○

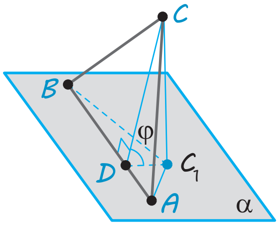


Рис. 15.2

Теорема справедлива і для випадку, якщо замість площини α взято будь-яку паралельну їй площину, оскільки проекцією трикутника ABC_1 на площину, паралельну його площині, є трикутник, що дорівнює йому.

Розглянемо тепер загальний випадок. Розіб'ємо даний многокутник на трикутники. Кожний трикутник, який не мав сторони, паралельної площині проекцій, розіб'ємо на два трикутники зі спільною стороною, паралельною площині проекцій, як це показано, наприклад, для трикутника BCD в чотирикутнику $ABCD$ на рис. 15.3.

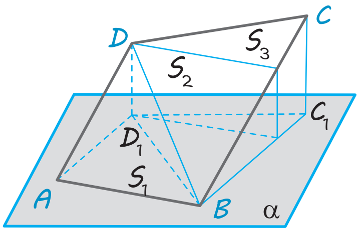


Рис. 15.3

Площа S_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ кожного з трикутників нашого розбиття і площа S'_k кожної з проекцій пов'язані рівністю $S'_k=S_k\cdot\cos\varphi$. Інакше кажучи, $S'_1=S_1\cdot\cos\varphi$, $S'_2=S_2\cdot\cos\varphi$, …, $S'_n=S_n\cdot\cos\varphi$. Додамо почленно всі ці рівності:

$$S'_1+S'_2+\ldots+S'_n=\left(S_1+S_2+\ldots+S_n\right)\cdot\cos\varphi.$$

Тоді в лівій частині рівності одержимо площу проекції многокутника, а в правій — площу самого многокутника, помножену на $\cos\varphi$.

Отже, і в цьому випадку

$$S_{\text{проекції}}=S_{\text{фігури}}\cdot\cos\varphi.$$

Твердження теореми справедливе також для довільної плоскої фігури, площу якої можна виразити через площі вписаних многокутників із будь-якою точністю.

Теорема виконується і у випадку, *коли площина фігури паралельна площині проекцій* (або фігура лежить у площині проекцій). У цьому разі *дана фігура та її проекція* дорівнюють одна одній, отже, вони *мають рівні площі*. Такий самий результат отримуємо за формулою $S_{\text{проекції}}=S_{\text{фігури}}\cdot\cos\varphi$, оскільки кут між двома паралельними площинами (або площинами, що збігаються) дорівнює 0° $(\cos 0^\circ=1)$, і тоді $S_{\text{проекції}}=S_{\text{фігури}}\cdot\cos 0^\circ=S_{\text{фігури}}$.

$$S_{\text{проекції}}=S_{\text{фігури}}\cdot\cos\varphi$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

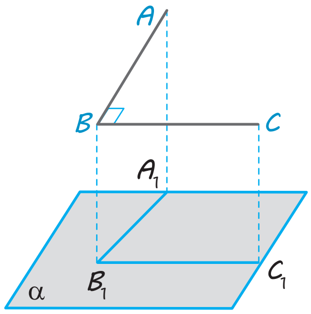
Задача 1 Проекцією прямокутника зі сторонами 6 см і 8 см на деяку площину є ромб із діагоналями 6 см і 8 см. Знайдіть кут між площинами прямокутника і ромба.

Розв'язання	Коментар
▶ Позначимо кут між площинами прямокутника і ромба через φ. Оскільки $S_{\text{прямокутника}}=6\cdot 8=48$ (см²), $S_{\text{ромба}}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$ (см²), то за формулою площі ортогональної проекції $S_{\text{проекції}}=S_{\text{фігури}}\cdot\cos\varphi$ одержуємо: $S_{\text{ромба}}=S_{\text{прямокутника}}\cdot\cos\varphi$, тобто $24=48\cdot\cos\varphi$. Звідси $\cos\varphi=\frac{1}{2}$, отже, $\varphi=60^\circ$. ◁	Як уже було зазначено, для знаходження кута достатньо знайти будь-яку його тригонометричну функцію, а для цього використати співвідношення між площами фігури та її ортогональної проекції $\left(S_{\text{проекції}}=S_{\text{фігури}}\cdot\cos\varphi\right)$. Для того щоб знайти площу ромба, слід пам'ятати, що вона дорівнює півдобутку діагоналей.

Задача 2*

Доведіть, що **коли одна зі сторін прямого кута паралельна площині проекцій, а друга не перпендикулярна до цієї площини, то ортогональною проекцією прямого кута також є прямий кут.**

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай дано прямий кут ABC, розміщений так, що пряма BC паралельна площині проекцій α, і $A_1B_1C_1$ — ортогональну проекцію кута ABC на площину α (рис. 15.4). Якщо $BC \parallel \alpha$, то $B_1C_1 \parallel BC$. Тоді за означенням кута між мимобіжними прямими $\angle(B_1C_1; AB) = \angle(BC; AB) = \angle ABC = 90°$, тобто $B_1C_1 \perp AB$. Оскільки проектування ортогональне, то $BB_1 \perp \alpha$, отже, $BB_1 \perp B_1C_1$. За ознакою перпендикулярності прямої і площини одержуємо $B_1C_1 \perp$ пл. A_1B_1BA. Таким чином, $B_1C_1 \perp A_1B_1$, тобто $\angle A_1B_1C_1 = 90°$, що і потрібно було довести. ◁	Розглядаючи даний прямий кут ABC та його проекцію $A_1B_1C_1$ (рис. 15.4), слід звернути увагу на те, що для доведення перпендикулярності прямих B_1C_1 і A_1B_1 можна довести перпендикулярність прямої B_1C_1 до площини A_1B_1B. При цьому корисно врахувати властивість паралельного (а отже, і ортогонального) проектування: *пряма, паралельна площині проекцій, проектується в паралельну їй пряму* (якщо $BC \parallel \alpha$, то $BC \parallel B_1C_1$).



◆ Рис. 15.4

Запитання

1. Поясніть, як отримують ортогональну проекцію точки, фігури.
2. Сформулюйте основні властивості ортогональної проекції.
3. Сформулюйте властивість площі ортогональної проекції многокутника на площину. У якому випадку площа фігури дорівнює площі ортогональної проекції цієї фігури?

4\.* Доведіть властивість площі ортогональної проекції многокутника на площину.

Вправи

15.1.° Чи є правильним, що ортогональною проекцією прямокутного трикутника завжди є прямокутний трикутник?

15.2.° Наведіть приклад фігури в просторі, ортогональними проекціями якої на дві взаємно перпендикулярні площини є круги однакового радіуса.

15.3.* Знайдіть ортогональну проекцію ромба, одна з діагоналей якого перпендикулярна до площини проекцій.

15.4. Чи може площа ортогональної проекції фігури:
1) бути більшою, ніж площа цієї фігури;
2) бути меншою, ніж площа цієї фігури;
3) дорівнювати площі цієї фігури?

15.5.° Знайдіть довжину ортогональної проекції відрізка AB на площину α, якщо $AB = a$, а пряма AB нахилена до площини α під кутом $30°$.

15.6. Чи може ортогональна проекція відрізка бути:
1) меншою, ніж відрізок;
2) дорівнювати відрізку;
3) більшою, ніж відрізок?

15.7.° Чи може ортогональною проекцією трикутника бути:
1) відрізок; 2) квадрат?

15.8.* Кожна з ортогональних проекцій фігури F на дві взаємно перпендикулярні площини — квадрат. Чи випливає з цього, що фігура F — куб?

15.9. Чи може ортогональна проекція кута (відмінного від розгорнутого):
1) бути меншою від цього кута;
2) дорівнювати куту;
3) бути більшою за цей кут?

15.10.* Чи може ортогональна проекція квадрата бути:
1) прямокутником; 2) паралелограмом; 3) трапецією?

15.11.° Якою фігурою є ортогональна проекція прямокутного паралелепіпеда на площину, паралельну його основі?

15.12. Діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 4 см. Площина ромба утворює з площиною проекцій кут $60°$. Знайдіть площу проекції ромба.

15.13. Знайдіть площу проекції фігури F на площину α, яка утворює кут $30°$ із площиною даної фігури, якщо фігурою F є:
1) квадрат, діагональ якого дорівнює 3 см;
2) правильний трикутник зі стороною a;
3) ромб, сторона якого дорівнює a, а кут — $45°$.

15.14. Знайдіть кут між площиною трикутника і площиною проекцій, якщо площа проекції цього трикутника:
1) у два рази менша від площі самого трикутника;
2) дорівнює площі трикутника?

15.15. Проекцією квадрата зі стороною a на деяку площину є ромб зі стороною b і гострим кутом α. Знайдіть кут між площинами квадрата і ромба.

15.16. Доведіть, що в результаті ортогонального проектування рівновеликі трикутники, які лежать в одній площині, мають рівновеликі проекції.

15.17. Площа грані правильного тетраедра дорівнює S, а площа її проекції на другу грань — Q. Знайдіть відношення $Q : S$.

15.18.* Доведіть, що проекцією правильного тетраедра на площину, паралельну двом його мимобіжним ребрам, є квадрат. Чи є правильним обернене твердження?

15.19.* Якою може бути найбільша площа ортогональної проекції правильного тетраедра з ребром a?

15.20.* Якою фігурою є ортогональна проекція куба на площину, перпендикулярну до його діагоналі?

15.21.* Знайдіть площу ортогональної проекції куба на площину, перпендикулярну до його діагоналі, якщо відомо, що ребро куба дорівнює a.

15.22.* Доведіть, що площа ортогональної проекції куба на площину буде найбільшою у разі, коли площина проекції перпендикулярна до однієї з діагоналей куба.

15.23.* Ортогональні проекції плоского чотирикутника на дві взаємно перпендикулярні площини є квадратами зі сторонами 1. Знайдіть периметр чотирикутника, якщо відомо, що одна з його сторін має довжину 2.

15.24.* Ортогональні проекції трикутника ABC на дві взаємно перпендикулярні площини є правильними трикутниками зі сторонами, що дорівнюють 1. Медіана AD трикутника ABC дорівнює 2. Знайдіть BC.

15.25. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть площу перерізу куба площиною, яка проходить через вершину основи під кутом 30° до площини цієї основи і перетинає всі бічні ребра.

15.26. Проекція прямокутника, сторони якого дорівнюють 20 см і 25 см, на деяку площину подібна даному прямокутнику. Знайдіть периметр проекції прямокутника.

15.27. Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат зі стороною a. Через середини двох суміжних сторін основи проведено площину, що перетинає три бічних ребра паралелепіпеда і нахилена до площини основи під кутом φ. Знайдіть площу одержаного перерізу.

15.28.* Ортогональною проекцією ромба $ABCD$ на площину, що проходить через вершину A ромба і паралельна його діагоналі BD, є квадрат $AB_1C_1D_1$ зі стороною a. Знайдіть периметр ромба, якщо його діагональ AC дорівнює m.

15.29.* Ортогональною проекцією плоского чотирикутника $ABCD$ є квадрат $A_1B_1C_1D_1$ зі стороною 4, $AA_1 = 3$, $BB_1 = 6$, $CC_1 = 9$. Точки A, B, C і D лежать по один бік від площини проектування. Знайдіть довжину відрізка DD_1, а також вид, периметр і площу чотирикутника $ABCD$.

Виявіть свою компетентність

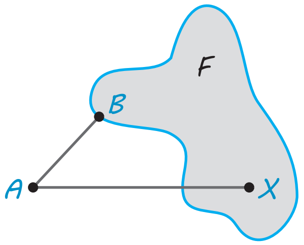
15.30. За допомогою програми GeoGebra (або іншої з підтримкою 3D-моделювання) змоделюйте плоский чотирикутник і його проекції на координатні площини.

§ 16 ВІДСТАНІ МІЖ ФІГУРАМИ

Таблиця 16

Відстань (ρ) між фігурами

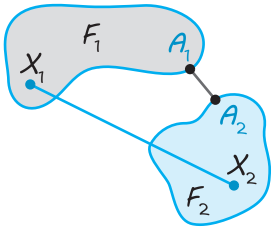
Відстань від точки до фігури



Точка B фігури F — найближча до точки A

$\rho(A; F) = AB$

Відстань між фігурами



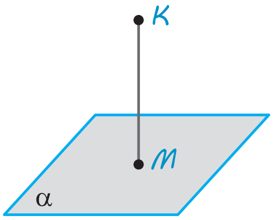
Точки A_1 і A_2 — найближчі точки фігур F_1 і F_2

$\rho(F_1; F_2) = A_1A_2$

Відстань від точки до площини (ρ — відстань[*])

Означення

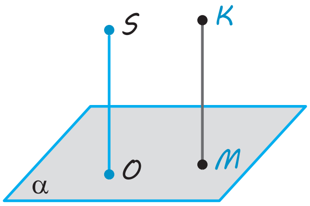
Проводимо $KM \perp \alpha$ $(M \in \alpha)$.



$KM = \rho(K; \alpha)$

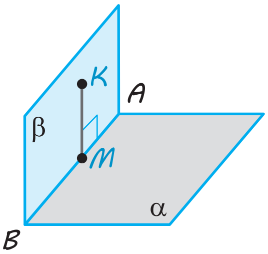
Практичні прийоми визначення відстані від точки до площини

$SO \perp \alpha$. Проводимо $KM \parallel SO$. Тоді $KM \perp \alpha$.



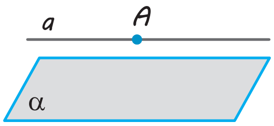
$KM = \rho(K; \alpha)$

Проводимо через точку K площину $\beta \perp \alpha$ (β перетинає α по AB). Проводимо $KM \perp AB$. Тоді $KM \perp \alpha$.



$KM = \rho(K; \alpha)$

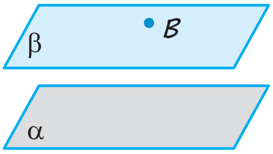
Відстань (ρ) між паралельними прямою і площиною



$a \parallel \alpha$, $A \in a$

$\rho(a; \alpha) = \rho(A; \alpha)$

Відстань (ρ) між паралельними площинами



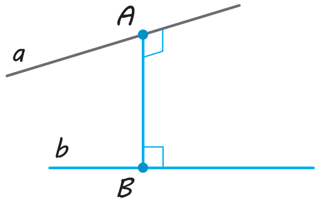
$\beta \parallel \alpha$, $B \in \beta$

$\rho(\beta; \alpha) = \rho(B; \alpha)$

---

[*] Позначення відстані між точкою A і площиною α (та між іншими фігурами) у вигляді $\rho(A; \alpha)$ не є загальноприйнятим, але іноді ми будемо його використовувати для скорочення записів.

Відстань (ρ) між мимобіжними прямими



Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра.

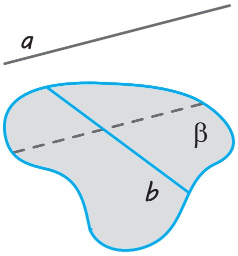
Прямі a і b — мимобіжні.

$$AB \perp a, \quad AB \perp b$$

$$\rho(a;b)=AB$$

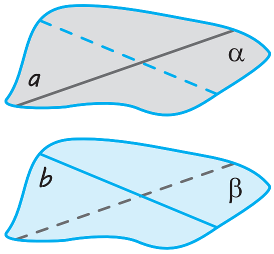
Способи визначення відстані (ρ) між мимобіжними прямими

Проводимо через пряму b площину $\beta \parallel a$.



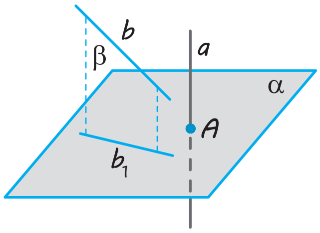
$$\rho(a;b)=\rho(a;\beta)$$

Проводимо через прямі a і b паралельні площини $\alpha \parallel \beta$.



$$\rho(a;b)=\rho(\alpha;\beta)$$

Проводимо площину $\alpha \perp a$ і проектуємо прямі a і b на цю площину: $a \to A$, $b \to b_1$.



$$\rho(a;b)=\rho(A;b_1)$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Відстань від точки до фігури

Відстань від точки до фігури вимірюють за найкоротшим шляхом. Тому відстанню від точки A до фігури F **називається відстань від цієї точки до найближчої точки фігури F.**

Точка фігури F, *найближча* до точки A, — це така точка $B \in F$, що для всіх точок X фігури F виконується нерівність $AB \leqslant AX$ (рис. 16.1).

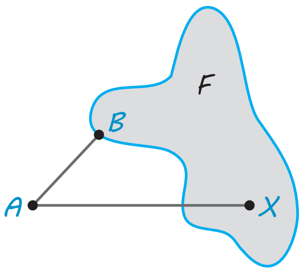


Рис. 16.1

Інакше кажучи, якщо точка A не належить фігурі F, то відрізок AB — найкоротший з усіх відрізків AX, що сполучають точку A з точками фігури F. (Якщо ж $A \in F$, то точка A є найближчою до самої себе. У цьому разі вважають, що відстань дорівнює нулю. Надалі будемо розглядати випадки, коли $A \notin F$.)

Відстань від точки A до фігури F іноді будемо позначати так: $\rho(A;F)$*.

Нагадаємо, що в планіметрії відстанню між прямою і точкою, **що не належить їй, називається довжина перпендикуляра, проведеного з точки до прямої.**

Оскільки в просторі пряма і точка, що не належить їй, лежать в одній площині, то це означення відстані між точкою і прямою можна використовувати і для простору.

---

* Це позначення не є загальноприйнятим, але іноді користуватися ним досить зручно.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. *Відстань від точки A до прямої a дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з точки A до прямої a.*

Це твердження випливає з того, що перпендикуляр є коротшим від похилої, отже, це найменша відстань від точки до прямої.

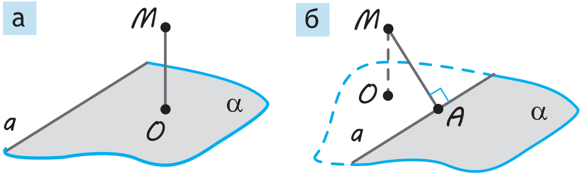
Аналогічно обґрунтовують твердження, наведені в прикладах 2–5 (обґрунтуйте їх самостійно).

Приклад 2. Відстань від точки до відрізка дорівнює найменшій відстані від точки до будь-якої точки відрізка. *Якщо основа перпендикуляра, проведеного до прямої, яка містить відрізок, належить відрізку, то відстанню від точки до відрізка буде довжина цього перпендикуляра* (рис. 16.2, *а*). *Якщо основа перпендикуляра, проведеного до прямої, яка містить відрізок, не належить відрізку, то відстанню від точки до відрізка буде відстань від заданої точки до найближчого кінця відрізка* (рис. 16.2, *б*, *в*).

Приклад 3. Відстань від точки до променя дорівнює найменшій відстані від точки до будь-якої точки променя. *Якщо основа перпендикуляра, проведеного до прямої, яка містить промінь, належить променю, то відстанню від точки до променя буде довжина цього перпендикуляра* (рис. 16.3, *а*). *Якщо основа перпендикуляра, проведеного до прямої, яка містить промінь, не належить променю, то відстанню від точки до променя буде відстань від заданої точки до початку променя* (рис. 16.3, *б*).

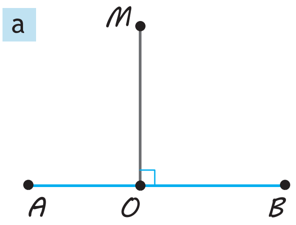
Приклад 4. *Відстань від точки до площини дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини*, або відстані від точки до її ортогональної проекції на площину.

Приклад 5. Відстань від точки до півплощини дорівнює найменшій відстані від точки до будь-якої точки півплощини. *Відстань від точки до півплощини дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини, яка містить дану півплощину*, або відстані від точки до її ортогональної проекції на площину — у випадку, коли ортогональна проекція даної точки належить даній півплощині (рис. 16.4, *а*). *Якщо ортогональна проекція даної точки не належить даній півплощині, відстанню від точки до півплощини буде довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до прямої, що обмежує півплощину* (рис. 16.4, *б*).



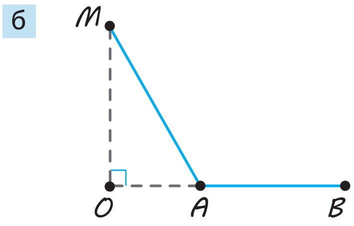
$\rho(M;\text{півпл.}\ \alpha)=MO$ $\quad$ $\rho(M;\text{півпл.}\ \alpha)=MA$

Рис. 16.4 $\quad MO\perp\alpha\ \ (O\in\alpha)$ $\quad MO\perp\alpha\ \ (O\notin\alpha)\ \ MA\perp a$

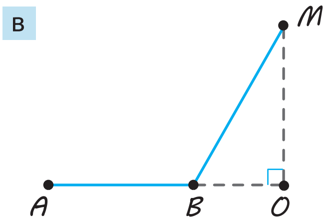


$\rho(M;\text{відр.}\ AB)=MO$

$(MO\perp AB)$

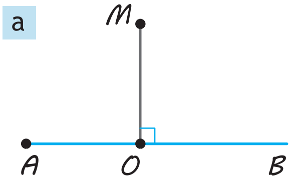


$\rho(M;\text{відр.}\ AB)=MA$



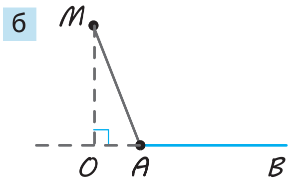
$\rho(M;\text{відр.}\ AB)=MB$

Рис. 16.2



$\rho(M;\text{пром.}\ AB)=MO$

$(MO\perp AB)$



$\rho(M;\text{пром.}\ AB)=MA$

Рис. 16.3

Приклад 6. *Відстань від центра кола до самого кола дорівнює радіусу.* Усі точки кола розташовані на одній відстані від центра, отже, усі вони є найближчими до нього.

Зазначимо, що в деяких задачах буває важливим указати на зображенні просторової фігури основу перпендикуляра, проведеного із заданої точки до площини. Тоді доводиться використовувати практичні прийоми визначення відстані від точки до площини, які наведено в табл. 16.

Прийом 1. *Якщо в якомусь місці в даній конфігурації вже маємо перпендикуляр до даної площини, то достатньо через дану точку провести пряму, паралельну цьому перпендикуляру*, і визначити точку перетину цієї прямої з даною площиною.

Дійсно, якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то і друга пряма перпендикулярна до цієї площини.

Нехай у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a (рис. 16.5) потрібно знайти відстань від середини діагоналі куба BD_1 — точки M — до площини основи $ABCD$.

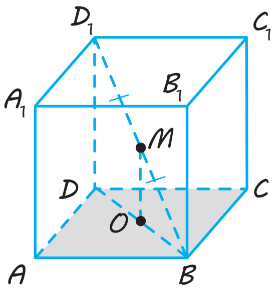


Рис. 16.5

Для цього достатньо згадати, що всі бічні ребра куба перпендикулярні до площини основи, зокрема $D_1D \perp$ пл. $ABCD$, і провести через точку M пряму $MO \parallel D_1D$. Оскільки площина D_1DB перетинає площину $ABCD$ по прямій DB, то основою шуканого перпендикуляра є точка $O \in BD$. Тоді за теоремою Фалеса точка O — середина[*] відрізка BD. Отже, відстань від точки M до площини $ABCD$ дорівнює довжині відрізка MO — середньої лінії трикутника D_1DB: $MO = \frac{1}{2} DD_1 = \frac{a}{2}$.

Прийом 2. *Для того щоб визначити відстань від точки до площини, можна через дану точку провести площину, перпендикулярну до даної площини, а потім у побудованій площині провести перпендикуляр із даної точки на пряму перетину розглядуваних площин.*

Дійсно, за теоремою 14.2 проведений відрізок буде перпендикулярним до даної площини, тобто він і є відстанню від даної точки до цієї площини.

Наприклад, щоб розв'язати попередню задачу — у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a (див. рис. 16.5) знайти відстань від середини діагоналі куба BD_1 — точки M — до площини $ABCD$, достатньо помітити, що площина BD_1D перпендикулярна до площини $ABCD$ (оскільки вона проходить через ребро $D_1D \perp$ пл. $ABCD$). Далі слід провести з точки M перпендикуляр MO до прямої BD перетину розглядуваних площин (якщо пл. $BD_1D \perp$ пл. $ABCD$ і $MO \perp BD$, то $MO \perp$ пл. $ABCD$). Це і буде відстань від точки M до площини $ABCD$. Оскільки $MO \parallel D_1D$ (як прямі, перпендикулярні до однієї площини), подальше розв'язування — таке саме, що і наведене вище.

2 Відстань між фігурами

Ми вже визначили відстань від точки до фігури. Але часто потрібно розв'язати загальніше завдання — знайти відстань між двома фігурами, наприклад визначити відстань між берегами річки (рис. 16.6), щоб побудувати міст. Ясно, що для цього

---

[*] Будуючи зображення, слід ураховувати, що діагоналі квадрата точкою перетину діляться навпіл і в результаті проектування середина відрізка зображуватиметься серединою проекції відрізка, тому на рисунку точка O фактично повинна бути точкою перетину діагоналей BD і AC.

необхідно шукати найближчі точки фігур, тобто найкоротший серед усіх відрізків, що сполучають точки цих фігур.

Точки A_1 і A_2 фігур F_1 і F_2 (рис. 16.6, 16.7) називаються їх *найближчими точками*, якщо для будь-яких точок $X_1 \in F_1$ і $X_2 \in F_2$ виконується нерівність $A_1A_2 \leqslant X_1X_2$.

Відстанню між двома фігурами називається відстань між найближчими точками цих фігур (якщо такі точки є).

Відстань від точки до фігури є окремим випадком відстані між фігурами, коли одна з фігур — точка.

Відстань між фігурами іноді будемо позначати $\rho(F_1; F_2)$, де F_1 і F_2 — дані фігури.

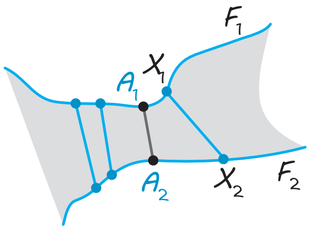


Рис. 16.6

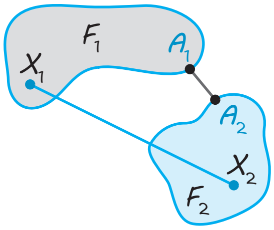


Рис. 16.7

Нагадаємо, що в планіметрії відстанню між двома паралельними прямими **називається відстань від будь-якої точки однієї прямої до іншої прямої** (оскільки всі відстані від точок однієї з паралельних прямих до другої прямої однакові), яка дорівнює довжині спільного перпендикуляра до цих прямих.

Оскільки в просторі дві паралельні прямі лежать в одній площині, то це означення відстані між двома паралельними прямими можна використовувати і для простору.

Зауважимо, що в наведеному означенні як відстань між паралельними прямими розглядається відстань між найближчими точками цих прямих.

Це випливає з того, що всі спільні перпендикуляри AB (чи XX_1) між паралельними прямими a і b дорівнюють один одному (рис. 16.8), а кожний відрізок XY із кінцями на даних прямих ($X \in a$, $Y \in b$), який не є їх спільним перпендикуляром, більший за спільний перпендикуляр XX_1.

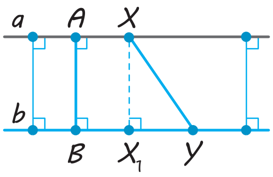


Рис. 16.8

Означимо тепер поняття *відстані між паралельними прямою і площиною та відстані між паралельними площинами*.

Означення. Відстанню між паралельними прямою і площиною називається відстань від будь-якої точки прямої до площини.

Означення. Відстанню між двома паралельними площинами називається відстань від будь-якої точки однієї площини до другої площини.

Доведемо, що відстань між паралельними прямою і площиною чи між двома паралельними площинами не залежить від вибору початкової точки на прямій чи на площині.

● Нехай дано паралельні пряму a і площину β та точки A_1 і A_2 на прямій a (рис. 16.9) або дві паралельні площини α і β та точки A_1 і A_2 у площині α (рис. 16.10).

Проведемо з точок A_1 і A_2 перпендикуляри A_1B_1 і A_2B_2 до площини β. Тоді відстань від точки A_1 до площини β дорівнює A_1B_1, а відстань від точки A_2 до площини β — A_2B_2. Чотирикутник $A_1A_2B_2B_1$ — прямокутник (обґрунтуйте самостійно), отже, $A_1B_1 = A_2B_2$. ○

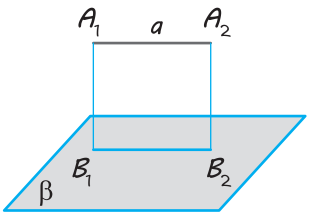


Рис. 16.9

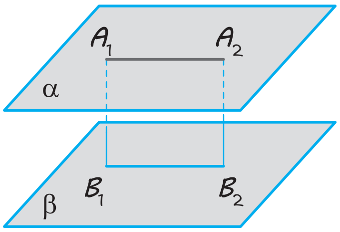


Рис. 16.10

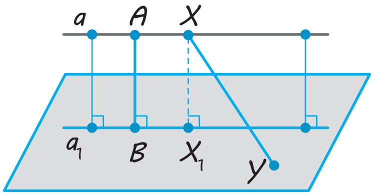


Рис. 16.11

Як і для відстані між паралельними прямими, в наведених означеннях як відстань між паралельними прямою і площиною чи між паралельними площинами розглядається відстань між найближчими точками відповідних фігур.

● Дійсно, нехай пряма a і площина α паралельні. Спроектуємо ортогонально пряму a на площину α. Одержимо пряму a_1, паралельну прямій a (рис. 16.11). Кожна з проектуючих прямих XX_1 буде перпендикулярною до площини α, а отже, перпендикулярною до прямої a_1 та до прямої a (оскільки $a \parallel a_1$). Тоді всі спільні перпендикуляри AB (чи XX_1) між паралельними прямою a і площиною α дорівнюють один одному, а кожний відрізок XY (де $X \in a$, $Y \in \alpha$), який не є їх спільним перпендикуляром, більший за спільний перпендикуляр XX_1 (оскільки похила XY до площини α більша за перпендикуляр XX_1).

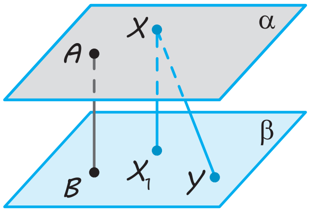


Рис. 16.12

Для паралельних площин правильність відповідного твердження випливає з того, що всі спільні перпендикуляри AB (чи XX_1) між паралельними площинами α і β дорівнюють один одному (рис. 16.12), а кожний відрізок XY із кінцями на даних площинах ($X \in \alpha$, $Y \in \beta$), який не є їх спільним перпендикуляром, більший за спільний перпендикуляр XX_1. ○

Зазначимо, що з поняттями відстані від точки до площини та відстані між паралельними площинами пов'язані поняття висоти піраміди та призми.

✓ **Означення.** **Висотою піраміди** **називається перпендикуляр, проведений із вершини піраміди до площини її основи. Довжину цього перпендикуляра також називають висотою піраміди.**

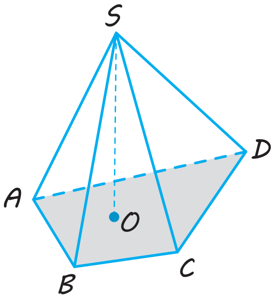


Рис. 16.13

Наприклад, якщо в піраміді $SABCD$ (рис. 16.13) $SO \perp$ пл. $ABCD$, то SO — висота піраміди, тобто *висотою піраміди є відстань від її вершини до площини основи*.

✓ **Означення.** **Висотою призми** **називається перпендикуляр, проведений із точки однієї основи призми до площини другої її основи. Довжину цього перпендикуляра також називають висотою призми.**

Наприклад, якщо в призмі $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 16.14) $A_1M \perp$ пл. $ABCDE$, то A_1M — висота призми. Оскільки в призмі площини основ паралельні, то *висотою призми є відстань між площинами її основ*.

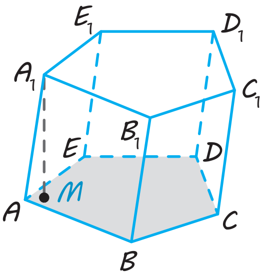


Рис. 16.14

Призма називається прямою, **якщо її бічні ребра перпендикулярні до площин основ.**

Зокрема, *прямими призмами є куб і прямокутний паралелепіпед*.

З означення прямої призми випливає, що **в прямій призмі висотою призми є бічне ребро**. Наприклад, якщо

$ABCA_1B_1C_1$ — пряма призма (рис. 16.15), то її висотою є будь-яке бічне ребро, наприклад AA_1 (оскільки $AA_1 \perp \text{пл.}\, ABC$).

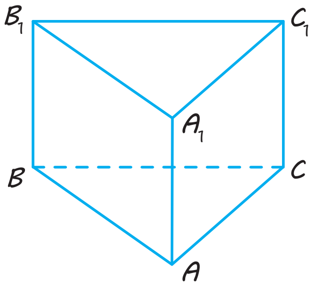


Рис. 16.15

Дамо тепер означення поняття *відстані між мимобіжними прямими*.

Означення 1. Спільним перпендикуляром **до двох мимобіжних прямих називається відрізок із кінцями на цих прямих, перпендикулярний до кожної з них.**

Означення 2. Відстанню між мимобіжними прямими **називається довжина їх спільного перпендикуляра.**

Теорема 16.1. Спільний перпендикуляр до двох мимобіжних прямих існує, і до того ж єдиний.

● *Доведення*. Нехай a і b — мимобіжні прямі. Через одну з них, наприклад b, проведемо площину β, паралельну прямій a. Це можна зробити, провівши пряму a', яка паралельна прямій a і перетинає пряму b (рис. 16.16). Тоді прямі a' і b, які перетинаються, визначатимуть площину β, паралельну прямій a. Розглянемо ортогональну проекцію a_1 прямої a на площину β. Вона перетинатиме пряму b в деякій точці B, яка є ортогональною проекцією деякої точки A прямої a. Відрізок AB і буде шуканим. Дійсно, він перпендикулярний до площини β, а отже, і до прямих b та a'. Таким чином, $AB \perp b$ і $AB \perp a'$, а враховуючи, що $a' \parallel a$, одержуємо $AB \perp a$, тобто відрізок AB — спільний перпендикуляр до прямих a і b.

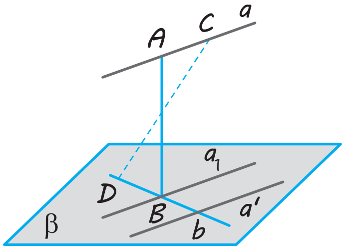


Рис. 16.16

Доведемо, що цей спільний перпендикуляр єдиний. Припустимо, що прямі a і b мають ще один спільний перпендикуляр: $CD \perp b$ і $CD \perp a$. Оскільки $a \parallel a'$, то $CD \perp a'$. Тоді $CD \perp \beta$. Одержали, що прямі AB і CD перпендикулярні до однієї площини β, отже, вони паралельні. Але паралельні прямі лежать в одній площині, тоді й точки A, B, C, D лежать в одній площині. Звідси випливає, що прямі a і b лежать в одній площині, а це неможливо (оскільки за умовою вони мимобіжні). Отже, наше припущення неправильне і прямі a та b мають тільки один спільний перпендикуляр. ○

Покажемо, що з точки зору визначення відстані між двома фігурами, *відстань між двома мимобіжними прямими дорівнює довжині спільного перпендикуляра до цих прямих*, тобто є відстанню між найближчими точками цих прямих.

● Мимобіжні прямі a і b (рис. 16.17) лежать у паралельних площинах α і β (див. § 6, задача 4). Розглянемо ортогональну проекцію a' прямої a на площину β. Вона перетинатиме пряму b в деякій точці B, що є ортогональною проекцією деякої точки A прямої a.

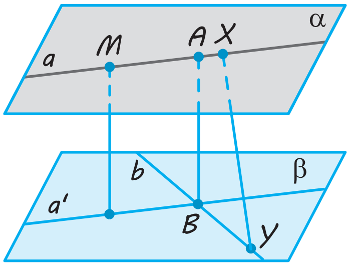


Рис. 16.17

Відрізок AB буде спільним перпендикуляром до прямих a і b, а також спільним перпендикуляром до площин α і β. Візьмемо тепер будь-який інший відрізок XY (де $X \in a$, $Y \in b$). Оскільки XY не є спільним перпендикуляром до площин α і β, то $XY > AB$. Отже, спільний перпендикуляр AB до двох мимобіжних прямих a і b дійсно є відстанню між найближчими точками цих прямих, тобто відстанню між прямими a і b. ○

3 Знаходження відстані між мимобіжними прямими

Щоб обчислити цю відстань, не обов'язково будувати спільний перпендикуляр до мимобіжних прямих a і b. Для цього з будь-якої точки M прямої a (рис. 16.17) можна провести перпендикуляр до площини β і знайти його довжину, а можна знайти довжину довільного спільного перпендикуляра до площин α і β. Отже, знаходити відстань між мимобіжними прямими можна одним із чотирьох способів, наведених у табл. 16.

Спосіб 1. *Безпосередньо знаходимо спільний перпендикуляр до даних мимобіжних прямих.*

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ із ребром a (рис. 16.18) відстань між мимобіжними прямими AA_1 і BC дорівнює довжині їх спільного перпендикуляра $AB = a$.

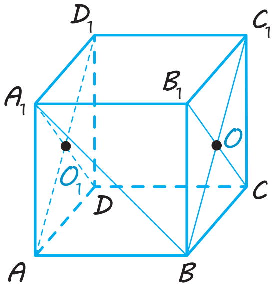


Рис. 16.18

Спосіб 2. *Через одну з даних прямих проводимо площину, паралельну другій прямій.* Для цього достатньо через точку однієї прямої провести пряму, паралельну другій прямій. Оскільки відстані між паралельними прямою та площиною скрізь однакові, то цю відстань можна визначити від будь-якої точки прямої до площини (як показано вище, вона ж дорівнює і відстані між даними мимобіжними прямими). Наприклад, якщо в кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.18) з ребром a потрібно визначити відстань між мимобіжними діагоналями бічних граней AD_1 і B_1C, то в площині грані BB_1C_1C можна провести ще одну діагональ BC_1, паралельну AD_1 (оскільки чотирикутник ABC_1D_1 — прямокутник). Площина BB_1C_1C паралельна прямій AD_1 за ознакою паралельності прямої та площини. Через те що відстані між паралельними прямою та площиною всюди однакові, цю відстань можна визначити від будь-якої точки прямої AD_1 до площини. Оскільки ребро AB перпендикулярне до площини BB_1C_1C, то відстань від точки A до площини BB_1C_1C дорівнює $AB = a$.

Отже, відстань між мимобіжними прямими AD_1 і B_1C дорівнює a.

Спосіб 3. *Через дані прямі проводимо паралельні площини.* Цей спосіб відрізняється від попереднього лише тим, що через кожну з даних прямих проводять площину, паралельну другій прямій.

Застосовуючи цей спосіб для визначення відстані між мимобіжними діагоналями AD_1 і B_1C бічних граней куба (рис. 16.18), можна, крім діагоналі BC_1 грані BB_1C_1C $\left(BC_1 \parallel AD_1\right)$, провести також діагональ A_1D грані AA_1D_1D. Тоді $A_1D \parallel B_1C$, і тому площини AA_1D_1D і BB_1C_1C паралельні (за ознакою паралельності площин). Отже, відстань між мимобіжними прямими AD_1 і B_1C дорівнює відстані між цими паралельними площинами. Її можна визначити від будь-якої довільно вибраної точки однієї з цих площин, наприклад від точки A площини AA_1D_1D, до площини BB_1C_1C. Враховуючи, що $AB \perp \text{пл.}\, BB_1C_1C$, знову одержуємо: шукана відстань дорівнює a.

Зауваження. Способами 2 і 3 можна знаходити також кути між мимобіжними прямими. Коли ми проводимо $B_1C \parallel AD_1$, то за означенням кут між мимобіжними прямими AD_1 і B_1C дорівнює куту між прямими BC_1 та B_1C, що перетинаються. У нашому випадку цей кут дорівнює 90° як кут між діагоналями квадрата.

Спосіб 4. *Ортогонально проектуємо обидві прямі на площину, перпендикулярну до однієї з мимобіжних прямих.* Тоді **відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між їх ортогональними проекціями на площину, перпендикулярну до однієї із цих прямих.**

● Нехай прямі a і b — мимобіжні і площина α перпендикулярна до прямої a (рис. 16.19), пряма b_1 — ортогональна проекція прямої b на площину α (якщо A — точка перетину прямої a з площиною α, то A — ортогональна проекція прямої a на площину α). Площина β, яка утворена проектуючими прямими, що проходять через пряму b, паралельна прямій a (оскільки пряма a паралельна будь-якій із проектуючих прямих). За ознакою перпендикулярності площин площини α і β перпендикулярні. Тоді перпендикуляр, проведений із точки A до прямої b_1 у площині α, буде перпендикуляром і до площини β. Отже, $\rho(a;b)=\rho(a;\beta)=\rho(A;b_1)$. ○

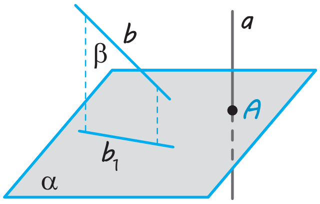


Рис. 16.19

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.20) з ребром a потрібно визначити відстань між мимобіжними діагоналями двох сусідніх граней — нехай це будуть діагоналі BA_1 і B_1C. Для цього можна спроектувати дані прямі на площину ABC_1D_1, перпендикулярну до прямої B_1C (обґрунтуйте цю перпендикулярність).

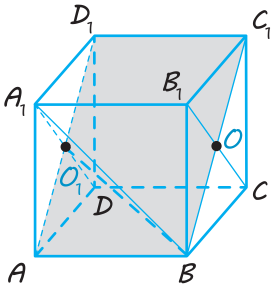


Рис. 16.20

У результаті проектування*: $B_1C \to O$, $B \to B$, $A_1 \to O_1$ (точки O і O_1 — центри граней BB_1C_1C і AA_1D_1D відповідно), тому $BA_1 \to BO_1$. Тоді $\rho(BA_1;B_1C)=\rho(O;BO_1)$.

Розглянемо виносний рисунок прямокутника ABC_1D_1 (рис. 16.21). За умовою $AB=C_1D_1=a$. Тоді $BC_1=AD_1=a\sqrt{2}$ (як діагоналі квадратів зі стороною a). Нас цікавить відстань від точки O до прямої BO_1. Проведемо $OM \perp BO_1$ та сполучимо відрізком точки O і O_1. Тоді OM — висота прямокутного трикутника BOO_1, у якому $OO_1=a$, $OB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ і $BO_1=\sqrt{BO^2+OO_1^2}=a\sqrt{\frac{3}{2}}$. Знайдемо площу трикутника BOO_1 двома способами: з одного боку, $S_{\triangle BOO_1}=\frac{1}{2}BO\cdot OO_1=\frac{\sqrt{2}}{4}a^2$; з іншого боку, $S_{\triangle BOO_1}=\frac{1}{2}BO_1\cdot OM$. Звідси $OM=\frac{2S_{\triangle BOO_1}}{BO_1}=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

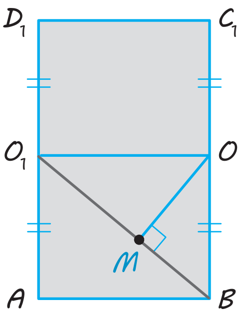


Рис. 16.21

Отже, $\rho(BA_1;B_1C)=\rho(O;BO_1)=OM=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

---

* Нагадаємо, що знак «→» у наведених записах означає: «проектується в» (див. § 7).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Кінці даного відрізка, який не перетинає площину, віддалені від неї на 2,7 м і 6,3 м. На яку відстань віддалена від площини середина цього відрізка?

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай дано відрізок AB, який не перетинає площину α, і точку M — його середину (рис. 16.22). Проведемо з точок A, B, M перпендикуляри до площини α (відповідно AA_1, BB_1, MM_1). Оскільки прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні одна одній, то $AA_1 \parallel BB_1 \parallel MM_1$. Таким чином, одержуємо ортогональну проекцію відрізка AB на площину α. Оскільки точка M — середина AB, то точка M_1 — середина A_1B_1. Отже, MM_1 — середня лінія трапеції AA_1B_1B $(AA_1 \parallel BB_1)$, тому $MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{6,3+2,7}{2} = 4,5\,(\text{м})$. *Відповідь:* 4,5 м. ◁	Ще до побудови рисунка до задачі слід згадати, що відстань від точки до площини вимірюють за перпендикуляром, проведеним із даної точки до площини, а також те, що прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні одна одній. Тоді, розглядаючи дані точки й основи відповідних перпендикулярів, ми фактично одержимо паралельну (точніше, ортогональну) проекцію даного відрізка на площину. А оскільки проекцією відрізка є відрізок (а проекцією його середини — середина відрізка-проекції), то на відповідному рисунку (рис. 16.22) основи перпендикулярів будуть розміщені на одній прямій.

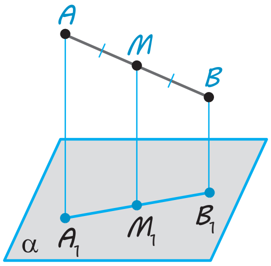


Рис. 16.22

Задача 2

Доведіть, що **в правильній піраміді висота проходить через центр основи.**

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай $SABC$ — правильна піраміда (рис. 16.23) і SO — її висота ($SO \perp \text{пл.}\, ABC$). Оскільки в правильній піраміді бічні ребра рівні: $SA = SB = SC$, то їх проекції на площину ABC теж дорівнюють одна одній: $OA = OB = OC$. Тоді точка O є центром описаного навколо основи кола, який збігається з центром правильного многокутника. ◁	Нагадаємо, що піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний многокутник, а всі бічні ребра дорівнюють одне одному. Центр правильного многокутника одночасно є і центром описаного навколо цього многокутника кола.

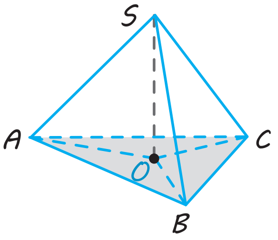


Рис. 16.23

Тому для доведення твердження задачі достатньо довести, що основою висоти є центр описаного кола. Доведення достатньо провести для трикутної піраміди, оскільки для n-кутної піраміди воно аналогічне.

Задача 3

Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть відстань між його мимобіжними ребрами.

Розв’язання

▶ Нехай $SABC$ — правильний тетраедр (рис. 16.24).

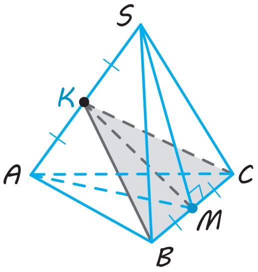


Рис. 16.24

Візьмемо середини M і K мимобіжних ребер BC і SA відповідно і сполучимо відрізками точку M із точками S, A і K, а точку K — також із точками B і C. Оскільки в правильному тетраедрі всі грані є рівними правильними трикутниками, то $BK = KC$ і $SM = AM$ (як медіани рівних трикутників). Ураховуючи, що в рівнобедреному трикутнику SAM медіана MK є і висотою, одержуємо, що $MK \perp SA$. Крім того, $MK \perp BC$ (як медіана і висота рівнобедреного трикутника BKC). Отже, MK — спільний перпендикуляр до мимобіжних ребер SA і BC, відповідно, це і є відстань між ними.

Якщо ребро правильного тетраедра дорівнює a (наприклад, $SA = a$), то $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (як висота правильного трикутника зі стороною a).

Із прямокутного трикутника SKM $\left(SK = \frac{a}{2}\right)$: $MK = \sqrt{SM^2 - SK^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. ◁

Коментар

Нагадаємо, що в правильному тетраедрі всі бічні грані — рівні правильні трикутники (і за умовою всі ребра дорівнюють a).

Щоб одержати відстань між мимобіжними прямими SA та BC, розглянемо площину SAM (де точка M — середина ребра BC). Вона буде перпендикулярною до BC (і проходитиме через другу пряму SA). Тоді, щоб отримати спільний перпендикуляр до двох даних прямих, достатньо в побудованій площині SAM із точки M провести перпендикуляр до другої прямої. Ураховуючи, що цей перпендикуляр у рівнобедреному трикутнику SAM $(SM = AM)$ буде і медіаною, можна скласти такий *план додаткових побудов*:

1) сполучити середини двох мимобіжних ребер даного правильного тетраедра відрізком;

2) використовуючи відповідні рівнобедрені трикутники в кожній із площин, які проходять через побудований відрізок і одне з ребер, довести, що цей відрізок є спільним перпендикуляром до розглядуваних мимобіжних ребер.

Задача 4*

У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB, AD і AA_1 відповідно дорівнюють 1 см, 2 см і 3 см. Знайдіть відстань між прямою BD і площиною AB_1D_1.

Коментар

Для того щоб знайти відстань між прямою і площиною, спочатку слід з'ясувати їх взаємне розміщення. За ознакою паралельності прямої і площини отримуємо, що $BD \parallel \text{пл.}\, AB_1D_1$. Оскільки відстань між паралельними прямою і площиною можна вимірювати від будь-якої точки прямої до площини, то нам потрібно провести перпендикуляр із деякої точки прямої до площини AB_1D_1. Для цього можна побудувати площину, перпендикулярну до площини AB_1D_1, що перетне BD в деякій точці M, а потім із точки M провести перпендикуляр до прямої перетину цих площин.

Для обчислення необхідних елементів зручно використати виносні рисунки фігур у розглядуваних площинах.

Розв'язання

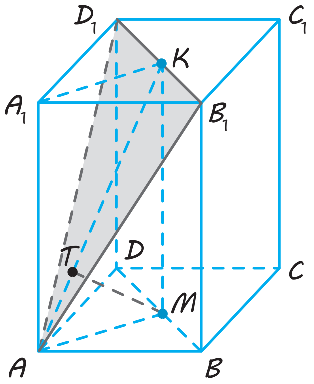


Рис. 16.25

▶ Оскільки в прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.25) діагоналі основ BD і B_1D_1 паралельні (як прямі перетину паралельних площин площиною BB_1D_1D), то пряма BD і площина AB_1D_1 паралельні. Проведемо перпендикуляр $AM \perp BD$. Оскільки $AA_1 \perp \text{пл.}\, ABCD$, то $AA_1 \perp BD$. Тоді $BD \perp \text{пл.}\, MAA_1$. Беручи до уваги, що $B_1D_1 \parallel BD$, одержуємо $B_1D_1 \perp \text{пл.}\, MAA_1$.

Площина MAA_1 проходить через пряму AA_1, паралельну площині BB_1D_1D, отже, пряма MK їх перетину паралельна AA_1. Площина MAA_1 перетинає також паралельні площини основ по паралельних прямих: $A_1K \parallel AM$. Оскільки $AA_1 \perp \text{пл.}\, ABCD$, то $AA_1 \perp AM$, отже, $AMKA_1$ — прямокутник.

Проведемо з точки M перпендикуляр MT до прямої AK перетину перпендикулярних площин MAA_1 і AB_1D_1. Тоді $MT \perp \text{пл.}\, AB_1D_1$, отже, MT — відстань між прямою BD і площиною AB_1D_1.

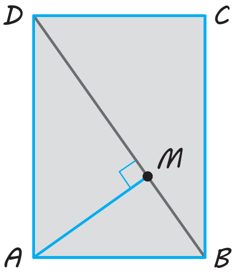


Рис. 16.26

Із прямокутного трикутника ABD (рис. 16.26), у якому $AB = 1$ см, $AD = 2$ см, одержуємо: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5}$.

Маємо: $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} BD \cdot AM$,

тобто $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot AM$. Отже, $AM = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Із прямокутного трикутника AMK (рис. 16.27), у якому $MK = AA_1 = 3$, одержуємо:

$$AK = \sqrt{AM^2 + MK^2} = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Маємо: $S_{\triangle AKM} = \frac{1}{2} AM \cdot MK = \frac{1}{2} AK \cdot MT$,

тобто $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot MT$. Отже, $MT = \frac{6}{7}$.

Відповідь: $\frac{6}{7}$ см. ◁

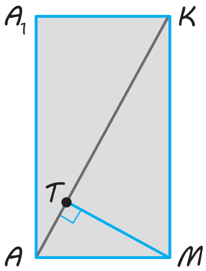


Рис. 16.27

Запитання

1. Поясніть, яку точку фігури вважають найближчою до даної точки; які точки двох фігур вважають найближчими.
2. Дайте означення відстані:
   1) від точки до фігури;
   2) між двома фігурами.
3. Дайте означення відстані:
   1) від точки до прямої;
   2) від точки до площини;
   3) між паралельними прямими;
   4) між паралельними прямою та площиною;
   5) між паралельними площинами;
   6) між мимобіжними прямими.

   Обґрунтуйте, що в кожному з цих випадків як відстань дійсно вибирають відстань між найближчими точками фігур.
4. Поясніть, як практично можна визначити відстань від точки до площини. Проілюструйте ці практичні способи на каркасній моделі куба.
5. Дайте означення висоти:
   1) піраміди;
   2) призми.

   Укажіть на моделі висоту прямокутного паралелепіпеда.
6. Поясніть, яка призма називається прямою. На моделі прямої призми вкажіть її висоту.
7. Дайте означення спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих. Проілюструйте його на моделі.

8.* Доведіть, що спільний перпендикуляр до двох мимобіжних прямих існує, і до того ж єдиний.

9. Поясніть на прикладах різні способи знаходження відстані між мимобіжними прямими.

Вправи

16.1.° З точки A, яка не належить площині α, проведено похилу до цієї площини. Визначте кут між цією похилою і площиною α, якщо відстань від точки A до площини α у два рази менша від довжини похилої.

16.2. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a знайдіть відстань між вершиною A і:

1) ребром B_1C_1;

2) діагоналлю B_1D_1 грані $A_1B_1C_1D_1$;

3*) діагоналлю куба A_1C.

16.3.° Знайдіть відстань між паралельними гранями в кубі з ребром a.

16.4. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a знайдіть відстань:

1°) від вершини A_1 до площини ABC;

2) від вершини B до площини AA_1C.

16.5. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a знайдіть відстань між вершиною C і площиною AB_1D_1.

16.6. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює a. Відрізок довжиною b кінцями упирається в ці площини. Знайдіть довжину проекції відрізка на кожну з площин.

16.7. Знайдіть відстань від середини відрізка AB до площини, яка не перетинає цей відрізок, якщо відстані від точок A і B до площини дорівнюють:

1) 3,2 см і 5,3 см;

2) 7,4 см і 6,1 см;

3) a і b.

16.8.* Розв'яжіть задачу 16.7 за умови, що відрізок AB перетинає дану площину.

16.9. Через середину відрізка проведено площину. Доведіть, що кінці відрізка розташовані на однаковій відстані від цієї площини.

16.10. Через вершину прямого кута C прямокутного трикутника ABC проведено площину, паралельну гіпотенузі. Відстань між цією площиною і гіпотенузою становить 1 м. Проекції катетів на цю площину дорівнюють 3 м і 5 м. Знайдіть гіпотенузу.

16.11. Через сторону паралелограма проведено площину. Відстань від протилежної сторони паралелограма до цієї площини дорівнює a. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей паралелограма до цієї площини.

16.12. Через одну сторону ромба проведено площину, відстань від якої до протилежної сторони дорівнює 4 м. Проекції діагоналей на цю площину дорівнюють 8 м і 2 м. Знайдіть проекції сторін.

16.13. Два відрізки завдовжки a і b упираються кінцями у дві паралельні площини. Проекція першого відрізка (довжиною a) на площину дорівнює c. Знайдіть проекцію другого відрізка.

16.14.° Дано зображення правильної піраміди $SABCD$ з основою $ABCD$. Побудуйте зображення її висоти.

16.15. Дано зображення правильної піраміди $SABC$ з основою ABC. Побудуйте зображення її висоти.

16.16.* Доведіть, що в правильній чотирикутній піраміді діагональ основи перпендикулярна до мимобіжного до неї бічного ребра.

16.17. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a знайдіть відстань між мимобіжними прямими:
1°) AA_1 і CD; 3) AB і B_1D_1; 5) BD і CC_1;
2) A_1C і BB_1; 4) AC і B_1D_1; 6) AC_1 і BD.

16.18. Знайдіть відстань між протилежними бічними гранями прямої чотирикутної призмі, в основі якої лежить ромб зі стороною a і гострим кутом α.

16.19.* Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від двох паралельних площин.

16.20.° У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює a, висота — h. Знайдіть бічне ребро піраміди.

16.21. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a, бічне ребро — b. Знайдіть висоту піраміди.

16.22. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a, бічне ребро — b. Знайдіть кут нахилу бічного ребра до площини основи.

16.23.* Дано площину α і дві точки A та B по один бік від неї. Знайдіть таку точку C на площині α, щоб сума відстаней $AC+CB$ була найменшою.

16.24. З даної точки до площини проведено дві рівні похилі завдовжки 2 м. Знайдіть відстань від точки до площини, якщо похилі утворюють між собою кут 60°, а їх проекції перпендикулярні.

16.25. З точки, віддаленої від площини на 1 м, проведено дві рівні похилі. Знайдіть відстань між основами похилих, коли відомо, що похилі перпендикулярні й утворюють з перпендикуляром до площини кути, які дорівнюють 60°.

16.26. Через кінець A відрізка AB завдовжки b проведено площину, перпендикулярну до відрізка, і в цій площині проведено пряму. Знайдіть відстань від точки B до прямої, якщо відстань від точки A до прямої дорівнює a.

16.27. Відстані від точки A до всіх сторін квадрата дорівнюють a. Знайдіть відстань від точки A до площини квадрата, якщо діагональ квадрата дорівнює d.

16.28.* Основою висоти чотирикутної піраміди є точка перетину діагоналей основи піраміди. Чи є правильним твердження, що двогранні кути, утворені бічними гранями піраміди з площиною основи, дорівнюють один одному, якщо основою піраміди є:
1) квадрат; 3) ромб (відмінний від квадрата);
2) довільний паралелограм; 4) рівнобедрена трапеція?

16.29.* Доведіть, що коли основою висоти піраміди є центр вписаного в основу кола, то двогранні кути, утворені бічними гранями піраміди з площиною основи, дорівнюють один одному.

16.30. З вершин A і B рівностороннього трикутника ABC проведено перпендикуляри AA_1 і BB_1 до площини трикутника. Знайдіть відстань від вершини C до середини відрізка A_1B_1, якщо $AB=2$ м, $CA_1=3$ м, $CB_1=7$ м і відрізок A_1B_1 не перетинає площину трикутника.

16.31. Відстань від точки до кожної з двох паралельних площин дорівнює 5. Знайдіть відстань між даними паралельними площинами.

16.32. Відстані від точки до двох паралельних площин дорівнюють 2 і 7. Знайдіть відстань між даними паралельними площинами.

16.33.* Точка M розташована на однаковій відстані від кожної з прямих, що містять сторони ромба $ABCD$, і рівновіддалена від кожної з його вершин. Знайдіть кути ромба.

16.34. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено переріз через вершини A_1, C і B_1. Відстань від вершини B до площини перерізу дорівнює 8. Знайдіть відстані до площини перерізу від вершин A, C_1, D_1.

16.35.* У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено переріз через вершини A_1, C_1 і B. Відстань від вершини B_1 до площини перерізу дорівнює 4. Знайдіть відстані до площини перерізу від вершин A, C, D_1, D.

16.36.* Площини α і β паралельні. Пряма a лежить у площині α, а прямі KM і KT — у площині β. Відстань між прямими a і KM дорівнює 5, а між прямими a і KT — 8. Визначте:
1) взаємне розміщення прямих a і KM;
2) взаємне розміщення прямих a і KT;
3) відстань між площинами α і β.

16.37. Площини квадрата $ABEF$ і ромба $ABCD$ перпендикулярні; $CD = 6$, $\angle BCD = 60°$. Знайдіть відстань між прямими:
1) EF і CD; 2) AF і BC.

16.38. Користуючись означенням відстані між фігурами, доведіть, що:
1) відстань між кругами (рис. 16.28) дорівнює AB;
2) відстань між кругом і прямою, яка його не перетинає (рис. 16.29), дорівнює AB.

16.39. Через діагональ паралелограма проведено площину. Доведіть, що кінці другої діагоналі розташовані на однаковій відстані від цієї площини.

16.40. Кінці відрізка AB, який не перетинає площину, віддалені від неї на 0,3 м і 0,5 м. На яку відстань віддалена від площини точка, що ділить даний відрізок у відношенні 3 : 7?

16.41.* Розв'яжіть попередню задачу, вважаючи, що відрізок AB перетинає площину.

16.42. Через основу трапеції проведено площину, відстань від якої до другої основи дорівнює a. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей трапеції до цієї площини, якщо довжини основ трапеції відносяться як $m : n$ (рис. 16.30).

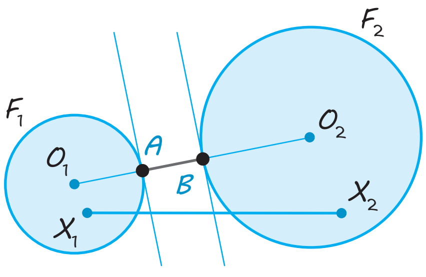


Рис. 16.28

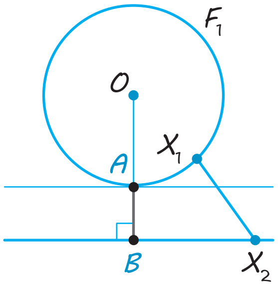


Рис. 16.29

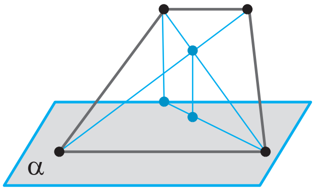


Рис. 16.30

16.43. Точка M, яка лежить поза площиною даного прямого кута, віддалена від вершини кута на відстань a, а від його сторін — на відстань b. Знайдіть відстань від точки M до площини кута.

16.44. З вершин A і B гострих кутів прямокутного трикутника ABC проведено перпендикуляри AA_1 і BB_1 до площини трикутника. Знайдіть відстань від вершини C до середини відрізка A_1B_1, якщо $A_1C=4$ м, $A_1A=3$ м, $B_1C=6$ м, $B_1B=2$ м і відрізок A_1B_1 не перетинає площину трикутника.

16.45. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром, яке дорівнює a, знайдіть відстань:

1) від точки A до площини BB_1D_1;
2) від прямої A_1C_1 до площини ABD;
3) між протилежними гранями куба;
4) між прямими B_1C і AA_1;
5) від точки A до площини A_1BD;
6) між прямими AC і B_1D_1;
7) між площинами A_1BC_1 і ACD_1.

16.46. В основі піраміди $SABCD$ лежить квадрат $ABCD$ зі стороною, яка дорівнює 12. Грані SBA і SBC перпендикулярні до площини основи. Висота піраміди дорівнює 5. Знайдіть відстань між прямими BC і SD.

16.47.* Відстань між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба дорівнює 2. Знайдіть ребро куба.

16.48. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром, що дорівнює 1, точка M — середина відрізка CD, а точка N — середина відрізка CC_1. Знайдіть відстань між прямими AN і BM.

16.49. В основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ лежить правильний трикутник ABC (така призма називається *правильною*). Знайдіть відстань між прямими AB_1 і BC, якщо всі ребра даної призми дорівнюють a.

16.50.* На прямій l у просторі послідовно розташовані точки A, B і C такі, що $AB=18$ і $BC=14$. Знайдіть відстань між прямими l і m, якщо відстані від точок A, B і C до прямої m дорівнюють 12, 15 і 20 відповідно.

Виявіть свою компетентність

16.51. Визначте товщину m вугільного пласта, якщо вертикальна розвідувальна свердловина нахилена до нього під кутом $\varphi=60°$ і проходить крізь вугілля відстань $h=3$ м (рис. 16.31). Відповідь виразіть у метрах із точністю до десятих.

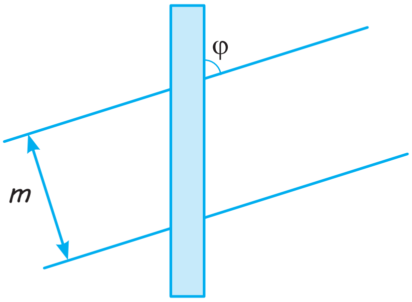


Рис. 16.31

§ 17 ГЕОМЕТРИЧНІ МІСЦЯ ТОЧОК У ПРОСТОРІ

Таблиця 17

Геометричні місця точок (ГМТ)

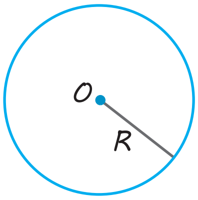
Означення. Геометричним місцем точок **площини (простору) називається фігура, що складається з усіх точок площини (простору), які мають певну властивість.**

Фігура F — ГМТ, які мають дану властивість ⇔
1. Якщо точка $M \in F$, то M має дану властивість.
2. Якщо точка M має дану властивість, то $M \in F$.

На площині | **У просторі**

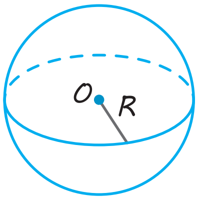
1. ГМТ, розташованих на даній відстані *R* від точки *O* (рівновіддалених від даної точки)

На площині



Фігура F — коло із центром O і радіусом R.

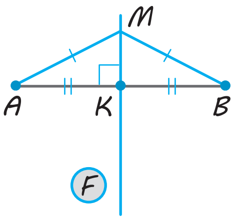
У просторі



Фігура F — сфера із центром O і радіусом R.

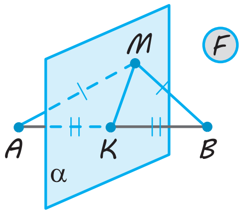
2. ГМТ, рівновіддалених від кінців даного відрізка *AB*

На площині



Фігура F — серединний перпендикуляр до відрізка AB.

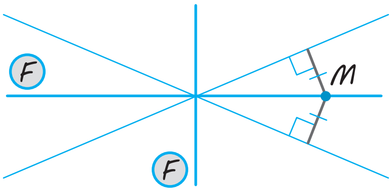
У просторі



Фігура F — площина α, що проходить через середину відрізка AB перпендикулярно до нього.

На площині

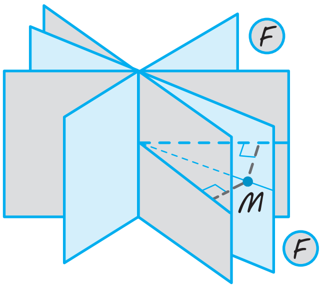
3. ГМТ, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються



Фігура F складається з бісектрис усіх кутів, утворених при перетині даних прямих.

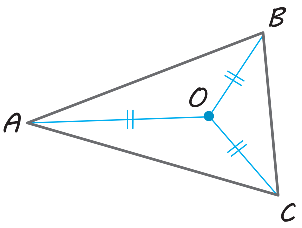
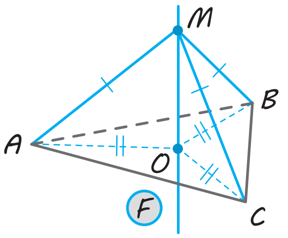
У просторі

3. ГМТ, рівновіддалених від двох площин, що перетинаються



Фігура F складається з бісекторних півплощин (півплощин, які ділять двогранні кути навпіл і проходять через ребро двогранних кутів) усіх двогранних кутів, утворених при перетині даних площин.

Закінчення табл. 17

4. ГМТ, рівновіддалених від вершин трикутника	
 Фігура F — центр описаного навколо трикутника кола, $F=O$.	 Фігура F — пряма, яка перпендикулярна до площини трикутника і проходить через центр описаного навколо трикутника кола.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття геометричного місця точок простору

У планіметрії *геометричним місцем точок* (ГМТ) називали фігуру, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість. Найпростіші з таких ГМТ площини наведено в лівому стовпці табл. 17. Нагадаємо їх.

1) *ГМТ, розташованих на даній відстані R від даної точки O, є коло радіуса R із центром у точці O.*
2) ГМТ, *рівновіддалених від двох даних точок, є пряма, перпендикулярна до відрізка, яка сполучає ці точки і проходить через його середину.*
3) ГМТ, *рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються, є пара перпендикулярних прямих, які містять бісектриси кутів, утворених при перетині даних прямих.*
4) ГМТ, *рівновіддалених від вершин трикутника, складається з однієї точки — центра описаного навколо трикутника кола.*

Аналогічно до поняття ГМТ на площині означають і поняття ГМТ у просторі.

✓ Означення. Геометричним місцем точок **простору називається фігура, яка складається з усіх точок простору, які мають певну властивість.**

Як і в планіметрії, розв'язання завдання на знаходження ГМТ складається з висування гіпотези про вид шуканої фігури F і обґрунтування двох взаємно обернених тверджень:

1) *якщо точка M належить фігурі F, то вона має дану властивість;*
2) *якщо точка M має дану властивість, то вона належить фігурі F.*

Замість другого твердження можна доводити еквівалентне йому твердження, протилежне до першого: *якщо точка не належить фігурі F, то вона не має даної властивості.*

2 Основні геометричні місця точок простору

Розглянемо ГМТ простору, які мають ту саму властивість, що і відповідні ГМТ на площині.

I. Геометричним місцем точок простору, розташованих на даній відстані *R* від даної точки *O*, є сфера радіуса *R* із центром у точці *O* (рис. 17.1).

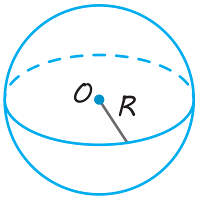


Рис. 17.1

Це твердження випливає з означення сфери.

II. Геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від двох даних точок A і B, є площина, яка перпендикулярна до відрізка, що сполучає ці точки, і проходить через його середину.

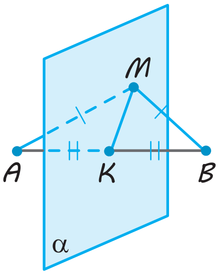


Рис. 17.2

● Розглянемо площину α, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину — точку K (рис. 17.2).

Нехай точка $M \in \alpha$. У площині α проведемо відрізок MK. Оскільки $AB \perp \alpha$, то $AB \perp MK$. Ураховуючи, що $AK = BK$, одержуємо $AM = BM$, тобто точка M рівновіддалена від точок A і B.

Нехай точка M рівновіддалена від точок A і B, тобто $MA = MB$. Розглянемо площину β, яка проходить через пряму AB і точку M. У площині β точка M рівновіддалена від точок A і B, отже, вона лежить на прямій, що проходить через середину відрізка AB — точку K — перпендикулярно до цього відрізка. Але всі прямі, перпендикулярні до прямої AB, які проходять через точку K, лежать у площині, перпендикулярній до AB. Ураховуючи, що через точку K проходить тільки одна площина α, перпендикулярна до AB, одержуємо: $M \in \alpha$.

Отже, площина α дійсно є шуканим ГМТ. ○

Для розгляду наступного ГМТ введемо поняття бісекторної півплощини двогранного кута.

✓ **Означення.** Бісекторною півплощиною двогранного кута **називається півплощина, граничною прямою якої є ребро двогранного кута і яка ділить двогранний кут навпіл.**

Оскільки за міру двогранного кута приймають міру відповідного йому лінійного кута, то *бісекторна півплощина проходить через ребро двогранного кута і бісектрису відповідного лінійного кута*.

III. Геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох даних площин, що перетинаються, є бісекторні півплощини всіх двогранних кутів, утворених відповідними півплощинами.

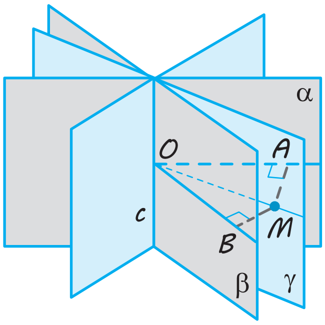


Рис. 17.3

● Розглянемо дві площини α і β, які перетинаються по прямій c, і півплощину γ, яка є бісекторною півплощиною двогранного кута, утвореного півплощинами площин α і β (рис. 17.3).

Нехай точка $M \in \gamma$. Проведемо з точки M перпендикуляри до площин α і β ($MA \perp \alpha$ і $MB \perp \beta$). Через прямі MA і MB проведемо площину φ. Ця площина перпендикулярна до прямої c (оскільки $MA \perp c$ і $MB \perp c$). Якщо точка O — точка перетину площини φ з прямою c, то $\angle AOB$ — лінійний кут двогранного кута з ребром c, утвореного відповідними півплощинами площин α і β, а OM — бісектриса цього кута. Тоді за властивістю бісектриси кута (у площині φ) одержуємо, що $MA = MB$, отже, точка M рівновіддалена від площин α і β.

Нехай точка M рівновіддалена від площин α і β, тобто $MA = MB$, де $MA \perp \alpha$ і $MB \perp \beta$. Через прямі MA і MB проведемо площину φ. Ця площина перпендикулярна до прямої c (оскільки $MA \perp c$ і $MB \perp c$). Якщо точка O — точка перетину площини φ з прямою *c*, то $\angle AOB$ — лінійний кут двогранного кута (з ребром *c*), утвореного відповідними півплощинами площин α і β. Оскільки $MA \perp OA$, $MB \perp OB$ і $MA = MB$, то в площині φ точка *M*, яка лежить усередині кута *AOB*, рівновіддалена від сторін кута. Отже, *OM* — бісектриса цього кута. Але через бісектрису лінійного кута проходить бісекторна півплощина, тобто $M \in \gamma$. Таким чином, фігура, яка складається із чотирьох бісекторних півплощин, дійсно є шуканим ГМТ. ○

Зауваження. Оскільки площина φ перпендикулярна до спільного ребра *c* всіх двогранних кутів, утворених при перетині площин α і β, то в перетині її з гранями цих кутів отримуємо лінійні кути відповідних двогранних кутів (сторони яких лежать на прямих *AO* і *BO*, які перетинаються в точці *O*). Ураховуючи, що на площині бісектриси вертикальних кутів лежать на одній прямій, а бісектриси суміжних кутів перпендикулярні, одержуємо, що шукане ГМТ, зображене на рис. 17.3, складається з двох перпендикулярних площин.

IV. Геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від вершин трикутника, є пряма, яка перпендикулярна до площини трикутника і проходить через центр кола, описаного навколо трикутника.

● Розглянемо трикутник *ABC* і пряму *a*, яка перпендикулярна до площини трикутника і проходить через точку *O* — центр описаного кола (рис. 17.4).

Нехай точка $M \in a$. Тоді *MO* — перпендикуляр до площини *ABC*; *MA*, *MB*, *MC* — похилі, а *OA*, *OB*, *OC* — відповідно їхні проекції. Оскільки $OA = OB = OC$ (як радіуси описаного кола), то $MA = MB = MC$, тобто точка *M* рівновіддалена від вершин трикутника *ABC*.

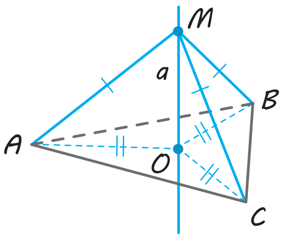


Рис. 17.4

Нехай точка *M* рівновіддалена від вершин трикутника *ABC*, тобто $MA = MB = MC$. Проведемо з точки *M* перпендикуляр до площини *ABC*. Оскільки рівні похилі *MA*, *MB*, *MC* мають рівні проекції, то основою цього перпендикуляра буде точка в площині трикутника *ABC*, рівновіддалена від його вершин, тобто точка *O* — центр кола, описаного навколо трикутника. Але через точку *O* проходить тільки одна пряма *a*, перпендикулярна до площини трикутника *ABC*. Отже, $M \in a$. Таким чином, пряма *a* дійсно є шуканим ГМТ. ○

Зазначимо, що в наведених прикладах вид розглядуваного ГМТ уже було задано і ми доводили, що вказана фігура дійсно є шуканим ГМТ.

Іноді доводиться знаходити ГМТ простору за даною його характеристичною властивістю. Як правило, розв'язування таких задач починають із припущення (гіпотези) про вид шуканої фігури. Для цього часто розглядають дану характеристичну властивість у якійсь площині та відомі ГМТ площини. Потім досліджують інші положення площини, що зберігають дану властивість точок, і пробують визначити вид шуканої фігури. Іноді шукане ГМТ є перетином уже відомих ГМТ.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Знайдіть ГМТ простору, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих.

Коментар

Спочатку розглянемо площину α, у якій лежать дані паралельні прямі (рис. 17.5). *ГМТ площини, рівновіддалених від двох паралельних прямих a і b в цій площині, буде пряма m, яка паралельна даним прямим і проходить посередині між ними* (тобто ділить відстань AB між даними прямими навпіл: $AK = BK$). Тоді ГМТ відповідних точок простору обов’язково буде включати пряму m.

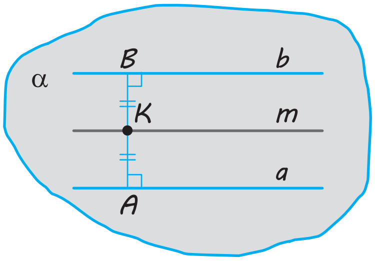


Рис. 17.5

Згадуючи, що в просторі похилі, які мають рівні проекції, дорівнюють одна одній, можна висунути припущення, що відповідне ГМТ простору буде включати також всі перпендикуляри до площини α, проведені з кожної точки прямої m. Але всі такі перпендикуляри лежать у площині γ, яка перпендикулярна до площини α і проходить через пряму m. Це дозволяє висунути гіпотезу, що шуканим ГМТ і буде площина γ.

Для доведення цієї гіпотези, як завжди, обґрунтовуємо два взаємно обернених твердження:

1) *якщо точка M належить фігурі F* (площині γ), *то вона має дану властивість*;
2) *якщо точка M має дану властивість, то вона належить фігурі F* (площині γ).

Розв’язання

▶ Доведемо, що **ГМТ простору, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих a і b, є площина γ, яка перпендикулярна до площини α, визначеної даними прямими, і ділить навпіл відстань між ними** (і містить пряму m площини α, яка паралельна даним прямим і проходить посередині між ними) (рис. 17.6).

1. Нехай точка $M \in \gamma$. У площині γ проведемо перпендикуляр $MK \perp m$. Оскільки $\gamma \perp \alpha$, то $MK \perp \alpha$. Проведемо через точку K в площині α пряму $AB \perp m$ ($A \in a$, $B \in b$). Оскільки $m \parallel a \parallel b$, то $AB \perp a$ і $AB \perp b$. Ураховуючи, що $AK = BK$, маємо рівність відповідних похилих: $AM = BM$. Використовуючи теорему про три перпендикуляри, одержуємо, що $AM \perp a$ і $BM \perp b$, тобто точка M рівновіддалена від прямих a і b.

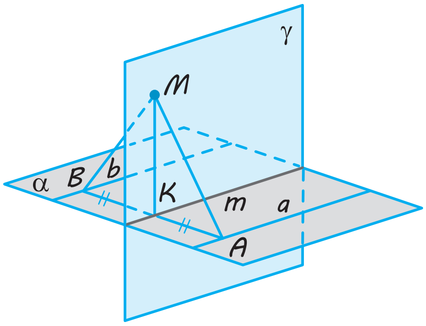


Рис. 17.6

2. Нехай точка M рівновіддалена від прямих a і b, тобто $MA = MB$ ($MA \perp a$ і $BM \perp b$). Розглянемо площину MAB. Вона перпендикулярна до прямої a ($a \perp MA$ і $a \perp MB$, оскільки $a \parallel b$). Отже, $AB \perp a$, і тоді площина γ проходить через точку K — середину AB. Оскільки $MA = MB$, то точка M також рівновіддалена від кінців відрізка AB. Але всі точки простору, рівновіддалені від кінців відрізка AB, лежать у площині, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину — точку K. Беручи до уваги, що через точку K проходить тільки одна площина γ, перпендикулярна до AB, одержуємо: $M \in \gamma$.

Отже, площина γ дійсно є шуканим ГМТ. ◁

Задача 2 Знайдіть ГМТ простору, рівновіддалених від двох даних прямих, які перетинаються.

Коментар

Спочатку розглянемо площину γ, у якій лежать дані прямі, що перетинаються (рис. 17.7). *ГМТ площини, рівновіддалених від двох прямих a і b, які лежать у цій площині та перетинаються, є пара перпендикулярних прямих m і n, що містять бісектриси кутів, утворених перетином даних прямих.* (Якщо, наприклад, $T \in m$, то $TN = TK$, де $TN \perp b$ і $TK \perp a$, і навпаки.) Тоді ГМТ відповідних точок простору обов'язково буде включати ці прямі m і n.

Якщо в просторі взяти точку M (рис. 17.8) і провести з неї до площини γ перпендикуляр (основою якого буде точка T) і дві похилі (основами яких будуть точки N і K), то за теоремою про три перпендикуляри $MK \perp a$ і $MN \perp b$, тобто MK і MN — відстані від точки M до прямих a і b відповідно.

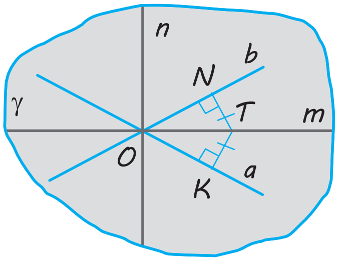


Рис. 17.7

Згадуючи, що в просторі похилі, які мають рівні проекції, дорівнюють одна одній, можна висунути припущення, що відповідне ГМТ простору буде включати також усі перпендикуляри до площини γ, проведені з кожної точки прямих m і n. Але всі такі перпендикуляри лежать у площинах α і β, перпендикулярних до площини γ, які проходять відповідно через прямі m і n. Це дозволяє висунути гіпотезу, що шуканим ГМТ буде фігура F, яка складається із зазначених площин, перпендикулярних до площини γ.

Для доведення гіпотези, як завжди, обґрунтовуємо два взаємно обернених твердження:

1) *якщо точка M належить фігурі F, то вона має дану властивість;*
2) *якщо точка M має дану властивість, то вона належить фігурі F.*

Розв’язання

▶ Доведемо, що **ГМТ простору, рівновіддалених від двох прямих a і b, які перетинаються, є пара взаємно перпендикулярних площин α і β, які перпендикулярні до площини γ даних прямих і проходять через бісектриси кутів, утворених цими прямими** (рис. 17.8).

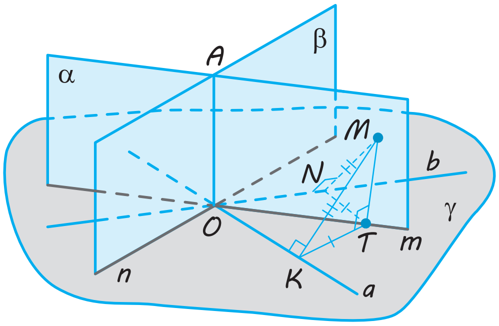


Рис. 17.8

1. Нехай точка M належить якійсь із указаних площин α чи β, наприклад, $M\in\alpha$. (Площина α проходить через пряму m, яка містить бісектриси двох вертикальних кутів, утворених при перетині прямих a і b.) У площині α проведемо перпендикуляр $MT\perp m$. Оскільки $\alpha\perp\gamma$, то $MT\perp\gamma$. Проведемо з точки T в площині γ перпендикуляри $TK\perp a$ і $TN\perp b$. За властивістю бісектриси кута $TK=TN$. Тоді $MK=MN$ (як похилі, що мають рівні проекції). Використовуючи теорему про три перпендикуляри, одержуємо: $MK\perp a$ і $MN\perp b$, тобто точка M рівновіддалена від прямих a і b.
2. Нехай точка M рівновіддалена від прямих a і b, тобто $MK=MN$ ($MK\perp a$ і $MN\perp b$). Тоді проекції похилих MK і MN на площину γ теж дорівнюватимуть одна одній, а за теоремою про три перпендикуляри ще й будуть перпендикулярними до прямих a і b відповідно. Отже, основа перпендикуляра, проведеного з точки M до площини γ, буде точкою в площині γ, рівновіддаленою від прямих a і b, тобто міститиметься на прямій m. Але всі перпендикуляри до площини γ, проведені з точок прямої m, лежать у площині α. Отже, $M\in\alpha$.

Таким чином, пара площин α і β дійсно є шуканим ГМТ.

Якщо площини α і β перетинаються по прямій OA (рис. 17.8), то, ураховуючи, що $\alpha\perp\gamma$ і $\beta\perp\gamma$, одержуємо: $OA\perp\gamma$ (див. § 14). Тоді $\angle(\alpha;\beta)=\angle(m;n)=90^\circ$ (оскільки бісектриси суміжних кутів перпендикулярні), тобто площини α і β дійсно перпендикулярні. ◁

Задача 2 Знайдіть ГМТ простору, рівновіддалених від двох даних мимобіжних прямих.

Розв’язання

▶ Розглянемо довільну пряму c, яка перетинає дані мимобіжні прямі a і b (рис. 17.9). Ураховуючи результат, отриманий у задачі 2, одержуємо, що ГМТ простору, кожна з яких рівновіддалена від прямих a і c, є певна пара площин α_1 і β_1. Аналогічно ГМТ простору, кожна з яких рівновіддалена від прямих c і b, є певна пара площин α_2 і β_2.

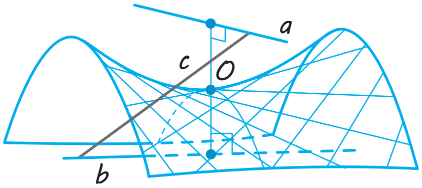


Рис. 17.9

Точки чотирьох прямих перетину площин α_1 і β_1 із площинами α_2 і β_2 належать шуканому ГМТ. Міняючи січну пряму c, одержимо, таким чином, безліч прямих, кожна точка яких рівновіддалена від даних мимобіжних прямих a і b. Об'єднання всіх прямих цієї множини є сідлоподібною поверхнею, яку називають *гіперболічним параболоїдом*. Частину його зображено на рис. 17.9. ◁

Гіперболічний параболоїд вивчають у вищих навчальних закладах. Його поверхню можна отримати переміщенням прямої d (яку називають *твірною гіперболічного параболоїда*) по двох мимобіжних прямих m і n, якщо твірна залишається паралельною деякій площині φ (рис. 17.10). Тоді й дані прямі також належать заданому ними гіперболічному параболоїду. (Кожна пряма, що належить гіперболічному параболоїду, називається його твірною, отже, m і n теж є твірними розглянутого гіперболічного параболоїда.)

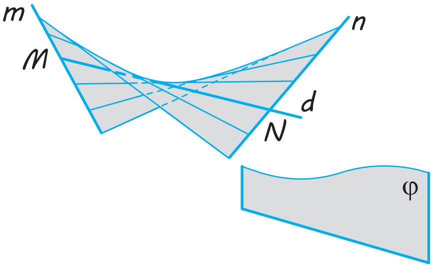


Рис. 17.10

Рис. 17.11

Гіперболічний параболоїд широко застосовують в інженерно-будівельній практиці (часто називаючи його *косою площиною*) для формування поверхонь укосів, насипів залізниць і автомобільних шляхів, набережних, гідротехнічних споруд, покрівель. На рис. 17.11 зображено оригінальний бетонний павільйон над джерелом мінеральної води «Харківська», побудований за проектом архітектора В. С. Васильєва в м. Харкові.

Запитання

1. Дайте означення геометричного місця точок простору.
2. Поясніть, як можна обґрунтувати, що фігура F є ГМТ, які мають певну властивість.
3. Назвіть основні ГМТ простору, які мають такі самі властивості, що й основні ГМТ на площині. Доведіть правильність відповідних тверджень.

Вправи

17.1. Знайдіть геометричне місце основ похилих даної довжини, проведених із даної точки до площини.

17.2. Знайдіть ГМТ простору, віддалених від даної площини α на дану відстань h.

17.3. Знайдіть ГМТ простору, рівновіддалених від двох даних паралельних площин.

17.4. Знайдіть ГМТ простору, рівновіддалених від сторін трикутника.

17.5.* Знайдіть ГМТ простору, рівновіддалених від прямих, які містять сторони трикутника.

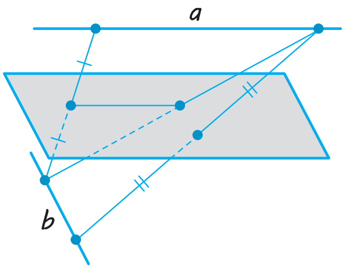
17.6. Дано площину і точку, що їй не належить. Знайдіть ГМТ простору, які поділяють навпіл усі відрізки, один кінець яких збігається з даною точкою, а другий «пробігає» всі точки даної площини.

17.7. Знайдіть ГМТ простору, які лежать на прямих, що перпендикулярні до даної прямої і проходять через задану на ній точку.

17.8. Знайдіть ГМТ простору, які лежать на прямих, що перпендикулярні до даної прямої і проходять через задану точку, яка не лежить на даній прямій.

17.9. Точка A лежить поза площиною α, X — довільна точка площини α, X' — точка відрізка AX, яка ділить його у відношенні $m:n$. Доведіть, що ГМТ X' є площина, паралельна площині α.

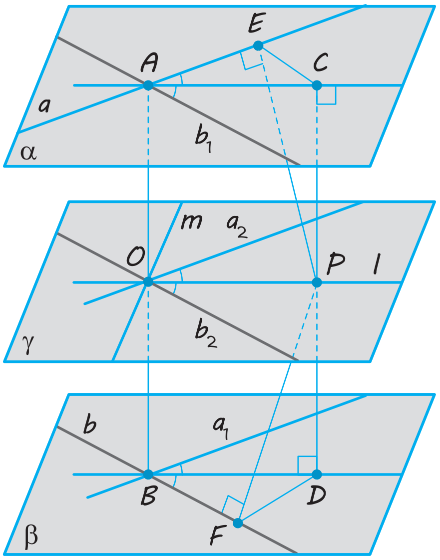
17.10.* Доведіть, що геометричним місцем середин відрізків із кінцями на двох мимобіжних прямих (рис. 17.12) є площина, паралельна цим прямим (її часто називають *серединною площиною* даних мимобіжних прямих).



◆ Рис. 17.12

17.11.* Доведіть, що кожна точка бісектрис l і m кутів між ортогональними проекціями двох мимобіжних прямих на їх серединну площину (див. вправу 17.10) рівновіддалена від даних прямих, тобто належить гіперболічному параболоїду, а самі прямі l і m є його твірними (див. задачу 3 в § 17).

Вказівка. Нехай AB — спільний перпендикуляр даних мимобіжних прямих a і b, γ — їх серединна площина, l — одна з бісектрис кутів між ортогональними проекціями a_2 і b_2 прямих a і b на площину γ (рис. 17.13). Проведіть через прямі a і b паралельні площини α і β та обґрунтуйте, що площина γ паралельна цим прямим. Потім через довільну точку $P \in l$ проведіть пряму CD, перпендикулярну до цих площин ($C \in \alpha$, $D \in \beta$), і з точки P проведіть перпендикуляри PE і PF до прямих a і b та обґрунтуйте рівність пар трикутників ACE і BDF та PCE і PDF.



◆ Рис. 17.13

17.12. Дано площину α та точки A і B, які не належать їй. На площині α знайдіть множину точок, рівновіддалених від точок A і B.

Виявіть свою компетентність

17.13. На подвір'ї, на якому немає дерев, потрібно розмістити ліхтар на вертикальному стовпі. Де має бути стовп, щоб хвіртка, двері в гараж і вхід до будинку освітлювалися однаково? Обґрунтуйте свою відповідь.

17.14. Знайдіть ГМТ простору, рівновіддалених від трьох даних площин, які мають єдину спільну точку. Як, на вашу думку, можна візуалізувати знайдене ГМТ? (Пропонуємо висловити будь-яку думку незалежно від наявності необхідного приладдя.)

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 3

Пройдіть онлайн-тестування

1. Точка A лежить поза площиною α. Скільки прямих, перпендикулярних до площини α, можна провести через точку A?

А Тільки одну **Б** Дві **В** Безліч **Г** Жодної

2. Точка A віддалена від площини α на 8 см. З цієї точки до площини α проведено похилу AB завдовжки 10 см. Знайдіть довжину проекції похилої AB на площину α.

А 2 см **Б** 8 см **В** 6 см **Г** 5 см

3. Із точки M, яка лежить поза площиною α, проведено до неї перпендикуляр MA та похилі MB і MC. Відомо, що $AB < AC$. Порівняйте довжини похилих MB і MC.

А $MB > MC$ **В** $MB < MC$
Б $MB = MC$ **Г** Порівняти неможливо

4. На рис. 1 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ із ребром a. Знайдіть відстань між прямими AC і DD_1.

А a **Б** $\frac{a}{2}$ **В** $a\sqrt{2}$ **Г** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

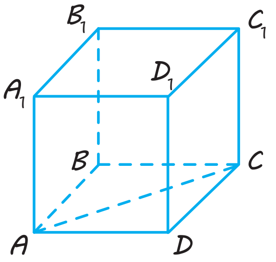


Рис. 1

5. Дано три площини α, β і γ такі, що $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$. Укажіть правильне твердження.

А Площини α і γ завжди паралельні.
Б Площини α і γ завжди перпендикулярні.
В Кут між площинами α і γ може дорівнювати 45°.
Г Жодне з тверджень А–В не є правильним.

6. Дано прямі m і n та площину α такі, що $m \parallel n$, $m \perp \alpha$. Укажіть правильне твердження.

А Пряма n паралельна площині α.
Б Пряма n перпендикулярна до площини α.
В Пряма n лежить у площині α.
Г Пряма n перетинає площину α під кутом 60°.

7. Пряма MB перпендикулярна до площини паралелограма $ABCD$, зображеного на рис. 2. Назвіть кут між прямою MD і площиною паралелограма.

А $\angle MDA$ **В** $\angle MDB$
Б $\angle MBD$ **Г** $\angle MDC$

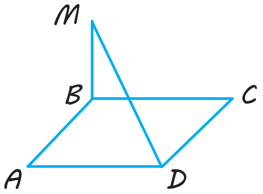


Рис. 2

8. З точки B до площини α проведено похилу BC, яка утворює з площиною α кут 30°. Знайдіть відстань від точки B до площини α, якщо проекція похилої BC на цю площину дорівнює 12 см.

А 6 см **Б** $4\sqrt{3}$ см **В** $12\sqrt{3}$ см **Г** 24 см

9. Площа многокутника дорівнює 24 см^2. Знайдіть площу ортогональної проекції цього многокутника на площину, яка утворює кут 60° із площиною многокутника.

А 12 см^2 **Б** 24 см^2 **В** 36 см^2 **Г** 48 см^2

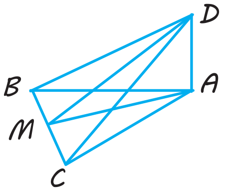


Рис. 3

10. Пряма DA перпендикулярна до площини рівнобедреного трикутника ABC з основою BC, зображеного на рис. 3, точка M — середина сторони BC. Укажіть кут між площинами ABC і DBC.

А $\angle DBA$ **В** $\angle DCA$
Б $\angle DMA$ **Г** $\angle DAM$

11. Площа многокутника дорівнює площі ортогональної проекції цього многокутника на деяку площину. Знайдіть кут між площиною многокутника та площиною проекції.

А 0° **Б** 45° **В** 90° **Г** Такий випадок неможливий

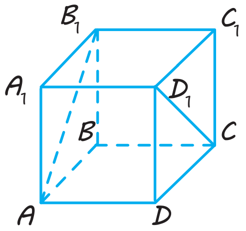


Рис. 4

12. На рис. 4 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між прямими AB_1 і CD_1.

А 60° **Б** 45° **В** 0° **Г** 90°

13. Точка D розташована на відстані 4 см від кожної вершини правильного трикутника ABC, сторона якого дорівнює 6 см. Знайдіть відстань від точки D до площини ABC.

А 4 см **Б** 2 см **В** 3 см **Г** 1 см

14. Із точки A до площини α проведено перпендикуляр AD і похилі AB і AC, $AB = 25$ см, $AC = 17$ см. Довжини проекцій похилих на площину α відносяться як 5 : 2. Знайдіть відстань від точки A до площини α.

А 10 см **Б** 12 см **В** 15 см **Г** 14 см

15. Кінці відрізка, довжина якого дорівнює $5\sqrt{5}$ см, належать двом перпендикулярним площинам. Відстані від кінців цього відрізка до лінії перетину площин дорівнюють 5 см і 8 см. Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, проведених із кінців відрізка на лінію перетину площин.

А 12 см **Б** 8 см **В** 10 см **Г** 6 см

16. Точка M рівновіддалена від сторін квадрата $ABCD$ і розташована на відстані $2\sqrt{3}$ см від його площини. Знайдіть відстань від точки M до сторін квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює 4 см.

А 4 см **Б** 2 см **В** 6 см **Г** 5 см

17. Через вершину C ромба $ABCD$ до його площини проведено перпендикуляр CF. Точка F віддалена від діагоналі BD на 25 см. Знайдіть відстань від точки F до площини ромба, якщо $BD = 20$ см, $AB = 10\sqrt{5}$ см.

А 20 см **Б** 12 см **В** 15 см **Г** 10 см

18. Через більший катет прямокутного трикутника проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут 60°. Знайдіть синус кута, що утворює гіпотенуза трикутника із цією площиною, якщо один із його кутів дорівнює 30°.

А $\frac{\sqrt{3}}{4}$ Б $\frac{\sqrt{6}}{4}$ В $\frac{\sqrt{6}}{3}$ Г $\frac{\sqrt{2}}{6}$

Теми навчальних проектів

1. Види куполів і деякі їх математичні характеристики.
2. Введення в світ фракталів.

Розділ 4

КООРДИНАТИ, ВЕКТОРИ ТА ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ У ПРОСТОРІ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ознайомитеся з прямокутною системою координат, векторами і рухами у просторі, їх основними властивостями та пов’язаними з ними формулами, рівняннями площини і сфери;
- навчитеся розв’язувати стереометричні задачі за допомогою координатного і векторного методів

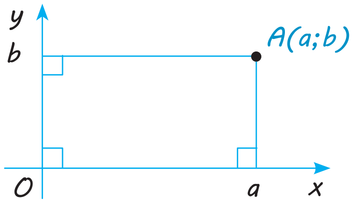
§ 18 ПРЯМОКУТНА ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ

Таблиця 18

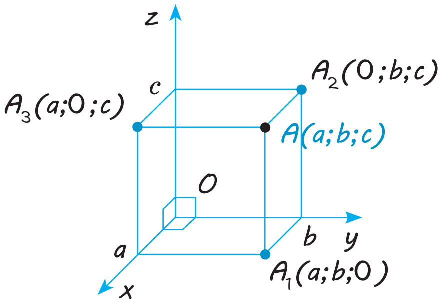
Декартові координати

1. Прямокутна система координат

На площині



У просторі



2. Відстань між точками

На площині:

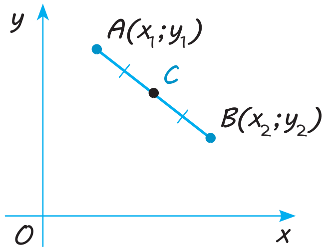
$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

У просторі:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

3. Координати середини відрізка

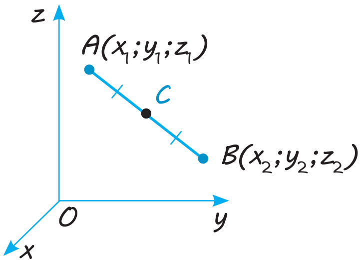
На площині:



C — середина AB

$$\boxed{x_c=\frac{x_1+x_2}{2}}\quad\boxed{y_c=\frac{y_1+y_2}{2}}$$

У просторі:

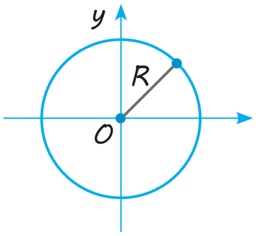


C — середина AB

$$\boxed{x_c=\frac{x_1+x_2}{2}}\quad\boxed{y_c=\frac{y_1+y_2}{2}}\quad\boxed{z_c=\frac{z_1+z_2}{2}}$$

4. Рівняння сфери

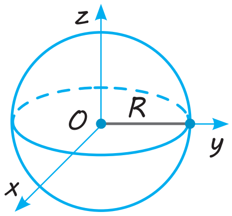
Рівняння кола



$$x^2+y^2=R^2$$

Центр кола — початок координат

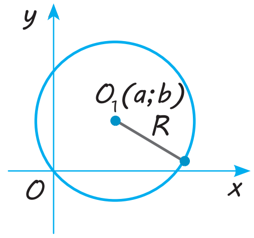
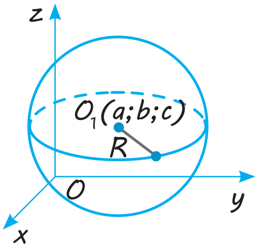
Рівняння сфери



$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

Центр сфери — початок координат.

Закінчення табл. 18

<table>
<tr><th colspan="2">4. Рівняння сфери</th></tr>
<tr><th>Рівняння кола</th><th>Рівняння сфери</th></tr>
<tr><td>
$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{R}^2$
Центр кола — точка $O_1(a;b)$.</td><td>
$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{R}^2$
Центр сфери — точка $O_1(a;b;c)$.</td></tr>
</table>

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Прямокутна декартова система координат у просторі

В курсі планіметрії ви ознайомилися з прямокутною системою координат на площині.

Нагадаємо, що *віссю координат* називають пряму, на якій вибрані точка O (яку називають *початком координат*), додатний напрям (який позначають стрілкою) і одиничний відрізок (рис. 18.1). *Кожній точці на координатній осі відповідає єдине дійсне число, яке називають координатою точки, і кожному дійсному числу відповідає єдина точка на координатній осі.* Як відомо, початку координат — точці O ставлять у відповідність число 0 $(x=0)$, точці M, яка розташована на додатному промені, ставлять у відповідність число x, яке дорівнює довжині відрізка OM $(x=OM)$, точці K, яка розташована на від'ємному промені, ставлять у відповідність число x, яке дорівнює довжині відрізка OK, узяте зі знаком «–» $(x=-OK)$.

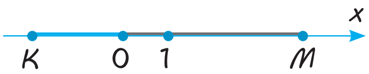


Рис. 18.1

Прямокутною системою координат на площині **називається пара перпендикулярних координатних осей зі спільним початком координат**[*].

Найчастіше початок координат позначають буквою O, а координатні прямі позначають Ox, Oy і називають, відповідно, *віссю абсцис* і *віссю ординат* (рис. 18.2). Площину, на якій задано прямокутну систему координат, називають *координатною площиною*. Кожній точці A на площині із заданою

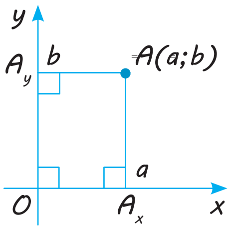


Рис. 18.2

---

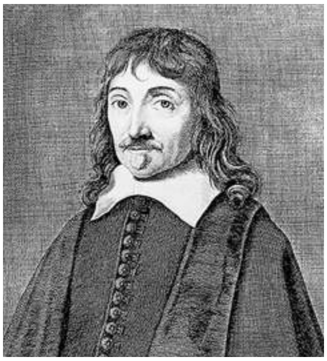
[*] Нагадаємо, що за означенням координатної осі на кожній із них вибрано одиничний відрізок.

системою координат відповідає єдина пара чисел $(a;b)$, які називають *координатами точки на площині в даній системі координат*, і кожній упорядкованій парі дійсних чисел відповідає єдина точка на площині із заданою системою координат. Уперше прямокутні координати були введені Р. Декартом (1596–1650). Тому прямокутну систему координат називають також *декартовою системою координат*, а самі координати — *декартовими координатами*.

Про які ще наукові досягнення Р. Декарта вам відомо? Які відкриття в галузі психології належать Декарту? Прихильником яких філософських теорій він був?

Відомості з історії

Видатний французький філософ, математик, фізіолог, фізик Рене Декарт увів метод координат, поняття змінної, заклав основи аналітичної геометрії, ввів сучасні позначення степенів, знаки «+» і «–» для позначення додатних і від'ємних чисел.



Декарт Рене (1596–1650)

Щоб отримати координати заданої точки A на площині, достатньо провести через цю точку прямі, перпендикулярні до осей координат. Якщо позначити точки перетину цих прямих із осями Ox і Oy відповідно A_x і A_y (рис. 18.2), то координату a точки A_x на осі Ox називають *абсцисою* точки A, а координату b точки A_y на осі Oy — *ординатою* точки A.

Прямокутні координати в просторі означають аналогічно.

Означення. Прямокутною системою координат у просторі **називають трійку попарно перпендикулярних координатних осей зі спільним початком координат.**

Спільний початок координат найчастіше позначають буквою O, а координатні прямі — Ox, Oy, Oz і називають відповідно *віссю абсцис*, *віссю ординат* і *віссю аплікат* (рис. 18.3). Площини, що проходять через пари координатних прямих, називають *координатними площинами* і позначають xOy, xOz і yOz відповідно (рис. 18.4).

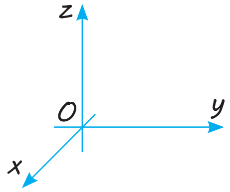


Рис. 18.3

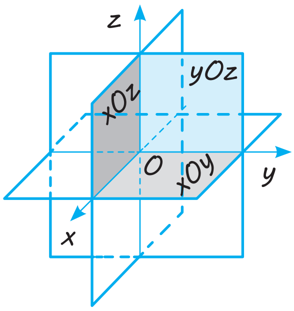


Рис. 18.4

Нехай A — довільна точка простору, в якому вибрана прямокутна система координат. Через точку A проведемо площину, перпендикулярну до осі Ox, і точку її перетину з віссю Ox позначимо A_x (рис. 18.5). Координату a цієї точки на осі Ox називають *абсцисою* точки A. Аналогічно на осях Oy і Oz позначають точки A_y і A_z, координати яких b і c називають, відповідно, *ординатою* і *аплікатою* точки A. Упорядковану трійку чисел $(a;b;c)$ називають *координатами точки A в просторі*. Можна обґрунтувати твердження, що *кожній точці A простору із заданою системою координат відповідає єдина трійка чисел $(a;b;c)$ — координат точки в даній системі координат, і кожній упорядкованій трійці дійсних чисел відповідає єдина точка простору із заданою системою координат.*

Зазначимо, що в загальному випадку абсцису, ординату і аплікату довільної точки M простору найчастіше позначають x, y, z відповідно і записують $M(x;y;z)$. Іноді точку позначають просто її координатами $(x;y;z)$.

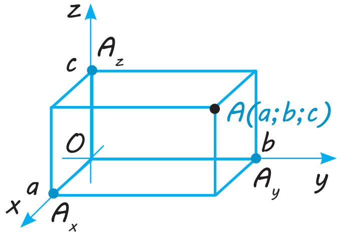


Рис. 18.5

2 Відстань між точками у просторі

У планіметрії було доведено, що відстань між точками $A_1(x_1;y_1)$ і $A_2(x_2;y_2)$ на площині виражається формулою $A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

У просторі справедлива аналогічна формула.

Відстань між точками $A_1(x_1;y_1;z_1)$ і $A_2(x_2;y_2;z_2)$ у просторі обчислюється за формулою

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

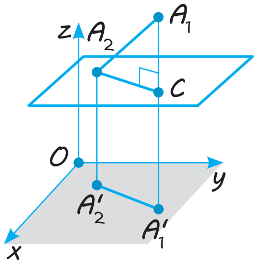


Рис. 18.6

● *Доведення.* Спочатку розглянемо випадок, коли пряма A_1A_2 не паралельна осі Oz. Проведемо через точки A_1 і A_2 прямі, паралельні осі Oz. Вони перетнуть площину xOy у точках A_1' і A_2' (рис. 18.6). Ці точки мають ті самі координати x, y, що й точки A_1 і A_2 (а координата z у них дорівнює нулю). Тоді на площині xOy точки A_1' і A_2' мають координати $A_1'(x_1;y_1)$, $A_2'(x_2;y_2)$ і відстань $A_1'A_2'$ дорівнює: $A_1'A_2'=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Проведемо через точку A_2 площину, паралельну площині xOy. Вона перетне пряму A_1A_1' в деякій точці C. Тоді $A_2C\perp A_1A_1'$ (оскільки проведена площина буде перпендикулярна до прямої A_1A_1') і $A_2C\parallel A_2'A_1'$ (як прямі перетину двох паралельних площин третьою). Одержуємо прямокутний трикутник A_1A_2C, у якому $A_2C=A_1'A_2'=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, $A_1C=|z_2-z_1|$.

Отже, за теоремою Піфагора, одержуємо: $A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Якщо пряма A_1A_2 паралельна осі Oz, то $A_1A_2=|z_2-z_1|$. Той самий результат дає і одержана формула, оскільки в цьому випадку $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. ○

3 Координати середини відрізка

Відповідні формули в просторі повністю аналогічні формулам для обчислення координат середини відрізка на площині (див. табл. 18).

Для точок $A_1(x_1;y_1;z_1)$ і $A_2(x_2;y_2;z_2)$ у просторі координати x; y; z точки C — середини відрізка A_1A_2 обчислюються за формулами $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z=\frac{z_1+z_2}{2}$.

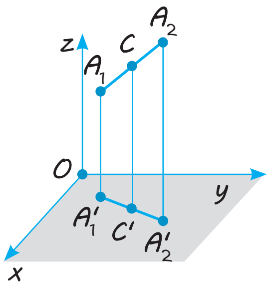


Рис. 18.7

● *Доведення.* Проведемо через точки A_1, A_2 і C прямі, паралельні осі Oz. Вони перетнуть площину xOy в точках $A_1'(x_1;y_1;0)$, $A_2'(x_2:y_2;0)$ і $C'(x;y;0)$ (рис. 18.7). Якщо точка C — середина відрізка A_1A_2, то за теоремою Фалеса точка C' є серединою відрізка $A_1'A_2'$. А ми знаємо, що на площині xOy координати середини відрізка виражаються через середини його кінців за формулами $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$. Щоб одержати формулу для z, достатньо замість площини xOy взяти площину xOz (рис. 18.8) або yOz. Тоді для z отримуємо аналогічну формулу: $z=\frac{z_1+z_2}{2}$.

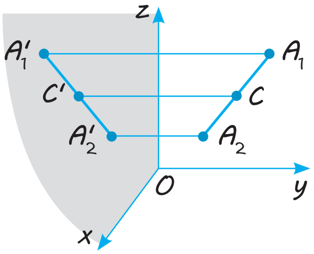


Рис. 18.8

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$
$$y=\frac{y_1+y_2}{2}$$
$$z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

Зауваження. Якщо пряма A_1A_2 паралельна осі Oz, то абсциси й ординати точок A_1 і A_2 відповідно дорівнюють одна одній і теорему Фалеса застосовувати не можна. Але безпосередня підстановка показує, що одержані формули залишаються правильними і в цьому випадку.

4 Рівняння сфери

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Нагадаємо, що сфера складається з усіх точок простору, віддалених від однієї точки — центра — на відстань, що дорівнює радіусу (див. § 1). Якщо центр сфери — точка $O_1(a;b;c)$, а точка $M(x;y;z)$ належить сфері (рис. 18.9), то з означення сфери одержуємо, що $O_1M=R$. Тоді $O_1M^2=R^2$ або в координатах: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Це рівняння називається рівнянням сфери з **центром у точці $O_1(a;b;c)$ і радіусом** R.

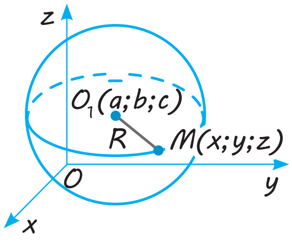


Рис. 18.9

Дійсно, координати кожної точки сфери задовольняють наведене рівняння, і навпаки, якщо координати точки M задовольняють рівняння $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, то $O_1M=R$ і точка M належить сфері (рис. 18.9).

Якщо центром сфери є початок координат (рис. 18.10), то рівняння сфери набуває вигляду $x^2+y^2+z^2=R^2$.

$x^2+y^2+z^2=R^2$ — рівняння сфери **із центром у початку координат і радіусом** R.

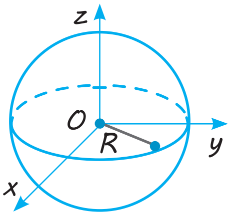


Рис. 18.10

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 На даному зображенні прямокутної системи координат у просторі (рис. 18.11) побудуйте точку A з координатами $(2; 3; 5)$.

Розв'язання	Коментар
▶ Спочатку побудуємо ортогональну проекцію заданої точки $A(2;3;5)$ на площину xOy — точку $A_1(2;3;0)$. Для цього відкладаємо на осі Ox відрізок $OA_x=2$ і проводимо в площині xOy пряму $A_xA_1 \parallel Oy$. На осі Oy відкладаємо відрізок $OA_y=3$ і проводимо в площині xOy пряму $A_yA_1 \parallel Ox$. На перетині прямих A_xA_1 і A_yA_1 одержуємо точку A_1, з'єднуємо її з точкою O і проводимо пряму $A_1A \parallel Oz$. Після цього на осі Oz відкладаємо відрізок $OA_z=5$ і проводимо пряму $A_zA \parallel OA_1$. Перетин прямих A_zA і A_1A дає зображення шуканої точки A (рис. 18.12). ◁	Нагадаємо, що за означенням осей координат на кожній із них вважається заданим і одиничний відрізок (як на рис. 18.11). Це дозволяє в будь-якій координатній площині побудувати точку з даними координатами. При цьому слід ураховувати, що на зображенні (паралельній проекції) просторової фігури перпендикулярність прямих може не зберігатися, але обов'язково зберігається паралельність прямих. Тому, описуючи побудови точок за їх координатами, слід використовувати паралельність відповідних прямих осям координат.

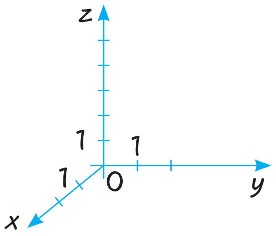


Рис. 18.11

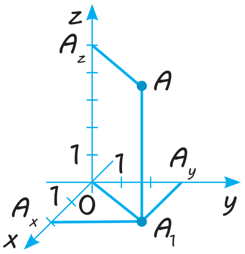


Рис. 18.12

Задача 2

Дано точки $A(3;4;5)$, $B(2;3;0)$, $C(0;0;5)$, $F(3;0;2)$, $E(0;7;0)$. Які з цих точок лежать:
1) у площині *xOy*; 2) у площині *yOz*; 3) на осі *Oz*; 3) на осі *Oy*?

Розв’язання	Коментар
▶ Точки площини xOy мають координату z, яка дорівнює нулю. Тому тільки точки B і E лежать у площині xOy. Точки площини yOz мають координату x, яка дорівнює нулю. Отже, точки C і E лежать у площині yOz. Точка на осі Oz має дві координати (x і y), які дорівнюють нулю. Тому тільки точка C лежить на осі Oz. Точка на осі Oy має дві координати (x і z), які дорівнюють нулю. Тому тільки точка E лежить на осі Oy. ◁	Слід урахувати, що для точок, які лежать в координатних площинах, одна з координат обов’язково дорівнює нулю (див. рисунок у першому рядку табл. 18), а для точок, які лежать на осях координат, — дві координати дорівнюють нулю.

Задача 3

Дано точки $A(1;4;7)$, $B(2;4;1)$, $C(5;2;3)$, $D(4;2;9)$. Доведіть, що чотирикутник *ABCD* є паралелограмом.

Розв’язання	Коментар
▶ Середина діагоналі AC має координати $\left(\frac{1+5}{2};\frac{4+2}{2};\frac{7+3}{2}\right)$, тобто $(3;3;5)$. Середина діагоналі BD має координати $\left(\frac{2+4}{2};\frac{4+2}{2};\frac{1+9}{2}\right)$, тобто $(3;3;5)$. Як бачимо, діагоналі AC і BD мають спільну середину, значить, вони перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, отже, $ABCD$ — паралелограм. ◁	Для розв’язування можна скористатися такою ознакою паралелограма: *якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник є паралелограмом.* В даному випадку достатньо перевірити, чи збігаються середини діагоналей AC і BD (тобто чи однакові координати цих точок, які можна обчислити за формулами координат середини відповідного відрізка).

Задача 4*

У площині *xOy* знайдіть точку *D*, рівновіддалену від трьох даних точок $A(0;2;-2)$, $B(-2;0;2)$, $C(0;-2;0)$.

Розв’язання	Коментар
▶ Нехай шукана точка D в площині xOy має координати $D(x;y;0)$. Тоді $DA^2=(x-0)^2+(y-2)^2+(0+2)^2$; $DB^2=(x+2)^2+(y-0)^2+(0-2)^2$; $DC^2=(x-0)^2+(y+2)^2+(0-0)^2$. Оскільки $DA=DB=DC$ тоді і тільки тоді, коли $DA^2=DB^2=DC^2$, то, прирівнюючи праві частини двох перших рівностей до правої частини третьої, одержуємо систему рівнянь:	Оскільки за умовою точка D міститься в площині xOy, то її третя координата дорівнює нулю, тобто точка D має координати $(x;y;0)$. Також за умовою $DA=DB=DC$. Але запис цих рівностей за формулою відстані між двома точками в координатах міститиме квадратні корені, тобто отримаємо ірраціональні рівняння.

$$\begin{cases} x^2+y^2-4y+4+4=x^2+y^2+4y+4, \\ x^2+4x+4+y^2+4=x^2+y^2+4y+4. \end{cases}$$

Звідси $y=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$.

Шукана точка $D\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$. ◁

Щоб уникнути цього, скористаємося тим, що *невід'ємні числа дорівнюють одне одному тоді і тільки тоді, коли їх квадрати дорівнюють один одному*, і запишемо за допомогою координат квадрати відповідних відстаней.

Задача 5 Запишіть рівняння сфери з центром у точці $A(-1;4;-1)$, яка проходить через точку $B(2;4;3)$.

Розв'язання

▶ Радіус заданої сфери

$$R=AB=\sqrt{(2+1)^2+(4-4)^2+(3+1)^2}=5.$$

Тоді рівняння шуканої сфери:

$$(x+1)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=25. \ ◁$$

Коментар

За означенням сфери *відстань від центра сфери до довільної її точки дорівнює радіусу сфери*, тому радіус сфери можна знайти як відстань між точками A і B, а після цього використати рівняння сфери з центром $(a;b;c)$ і відомим радіусом R:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Запитання

1. Поясніть, як визначають декартові координати точки в просторі.
2. Запишіть формулу для знаходження відстані між двома точками за координатами цих точок.
3.* Доведіть формулу для знаходження відстані між двома точками за координатами цих точок.
4. Запишіть формули для знаходження координат середини відрізка за координатами його кінців.
5.* Доведіть формули для знаходження координат середини відрізка за координатами його кінців.
6. Запишіть і обґрунтуйте рівняння сфери з центром в точці $O_1(a;b;c)$ і радіусом R.

Вправи

18.1° На даному зображенні прямокутної системи координат у просторі (рис. 18.13) побудуйте точки з координатами $(1;2;3)$, $(2;-1;1)$, $(-1;3;2)$.

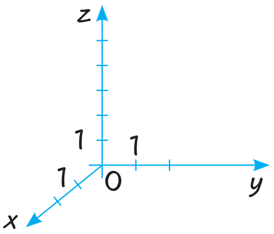


Рис. 18.13

18.2° Знайдіть координати ортогональних проекцій точок $A(1;3;4)$ і $B(5;-6;2)$ на:

1) площину xOy;
2) площину yOz;
3) вісь Ox;
4) вісь Oz.

18.3° На якій відстані розташована точка $A(1;-2;3)$ від координатної площини:

1) xOy; 2) xOz; 3) yOz?

18.4.° Як розташовані точки простору, для яких координати x і y дорівнюють нулю?

18.5.° Дано точки $A(1;2;3)$, $B(0;1;2)$, $C(0;0;3)$, $D(1;2;0)$. Які з цих точок лежать:
1) у площині xOy; 2) на осі Oz; 3) у площині yOz?

18.6.° Дано точку $A(2;5;7)$. Знайдіть координати основ перпендикулярів, проведених із цієї точки на координатні осі і координатні площини.

18.7. Що є геометричним місцем точок простору, для яких:
1) перша координата дорівнює нулю;
2) друга координата дорівнює нулю;
3) третя координата дорівнює нулю;
4) перша і друга координати дорівнюють нулю;
5) перша і третя координати дорівнюють нулю;
6) друга і третя координати дорівнюють нулю;
7) всі координати дорівнюють нулю?

18.8. Що є геометричним місцем точок простору, для яких:
1) перша координата дорівнює одиниці;
2) перша і друга координати дорівнюють одиниці?

18.9. На якій відстані розташована точка $A(1;-2;3)$ від координатної прямої:
1) Ox; 2) Oy; 3) Oz?

18.10. Знайдіть відстані від точки $(1;2;-3)$ до:
1°) координатних площин;
2) осей координат;
3°) початку координат.

18.11.° Знайдіть відстань між точками:
1) $A_1(1;2;3)$ і $A_2(-1;1;1)$; 2) $B_1(3;4;0)$ і $B_2(3;-1;2)$.

18.12.° Яка з точок — $A(2;1;5)$ або $B(-2;1,6)$ — лежить ближче до початку координат?

18.13. Дано точки $M(1;-2;-3)$, $N(-2;3;1)$ і $K(3;1;-2)$. Знайдіть периметр трикутника MNK.

18.14. Визначте вид трикутника ABC, якщо його вершини мають координати: $A(0;0;2)$, $B(0;2;0)$, $C(2;0;0)$.

18.15. На осі Ox знайдіть точку $C(x;0;0)$, рівновіддалену від двох точок $A(1;2;3)$ і $B(-2;1;3)$.

18.16. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, якщо:
1) $A(0;2;-3)$, $B(-1;1;1)$, $C(2;-2;-1)$, $D(3;-1;-5)$;
2) $A(2;1;3)$, $B(1;0;7)$, $C(-2;1;5)$, $D(-1;2;1)$.

18.17. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є ромбом, якщо:
1) $A(6;7;8)$, $B(8;2;6)$, $C(4;3;2)$, $D(2;8;4)$;
2) $A(0;2;0)$, $B(1;0;0)$, $C(2;0;2)$, $D(1;2;2)$.

18.18. Знайдіть координати середини відрізка:
1) AB, якщо $A(1;2;3)$ і $B(-1;1;1)$;
2) CD, якщо $C(3;4;0)$ і $D(3;-1;2)$

18.19. Дано координати одного кінця відрізка $A(2;3;-1)$ і його середини $C(1;1;1)$. Знайдіть координати другого кінця відрізка $B(x;y;z)$.

18.20. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо відомі координати решти його вершин:

1) $A(2;3;2)$, $B(0;2;4)$, $C(4;1;0)$;

2) $A(1;-1;0)$, $B(0;1;-1)$, $C(-1;0;1)$;

3) $A(4;2;-1)$, $B(1;-3;2)$, $C(-4\ 2;1)$.

18.21. Доведіть, що середина відрізка з кінцями в точках $A(a;c;-b)$ і $B(-a;d;b)$ лежить на осі Oy.

18.22. Доведіть, що середина відрізка з кінцями в точках $C(a;b;c)$ і $D(p;q;-c)$ лежить у площині xOy.

18.23.* У площині xOy знайдіть точку $D(x;y;0)$, рівновіддалену від трьох даних точок: $A(0;1;-1)$, $B(-1;0;1)$, $C(0;-1;0)$.

18.24.* Знайдіть точки, рівновіддалені від точок $(0;0;1)$, $(0;1;0)$, $(1;0;0)$ і розташовані на відстані 2 від площини yOz.

18.25. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 1. Початок координат розташований у точці B. Додатні промені осей координат — відповідно BA, BC і BB_1. Назвіть координати всіх вершин куба.

18.26. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ розміщений у прямокутній системі координат так, що початком координат є центр нижньої основи куба, ребра куба паралельні відповідним осям координат, вершина A має координати $(-3;3;0)$. Знайдіть координати решти вершин куба.

18.27.* Дано правильний тетраедр $ABCD$. Вершини A і B мають відповідно координати $(1;0;0)$ і $(-1;0;0)$. Основа ABC тетраедра лежить у площині xOy. Знайдіть координати інших вершин тетраедра. Скільки розв'язків задачі існує?

18.28. Знайдіть координати центра O_1 і радіус R сфери, заданої рівнянням:

1) $(x-3)^2+(y+5)^2+z^2=16$; 2) $x^2+(y-7)^2+(z+3)^2=11$.

18.29. Запишіть рівняння сфери:

1) із центром у точці $O(0;0;0)$ і радіусом 4;

2) із центром у точці $O_1(2;-3;7)$ і радіусом 5.

18.30. Запишіть рівняння сфери з центром у точці $O_1(1;2;-1)$, що проходить через точку:

1) $M(1;0;0)$; 2) $K(1;0;1)$; 3) $N(0;0;-1)$.

18.31.* Точка $A(0;0;12)$ належить сфері з центром $O_1(5;0;0)$. Запишіть рівняння цієї сфери. Чи належать цій сфері точки $M(5;0;13)$, $K(-5;0;-13)$ і $N(0;0;-12)$?

18.32.* Доведіть, що наведене рівняння задає сферу в просторі, а також знайдіть її радіус і координати центру:

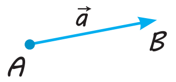
1) $x^2-6x+y^2+z^2=0$; 2) $x^2-8x+y^2+6y+z^2=0$.

18.33.* Доведіть, що рівняння $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ за умови $A^2+B^2+C^2>4D$ задає сферу. Знайдіть координати центра і радіус цієї сфери. Яку фігуру отримаємо, якщо виконуватиметься умова $A^2+B^2+C^2=4D$?

§ 19 ВЕКТОРИ В ПРОСТОРІ

Таблиця 19

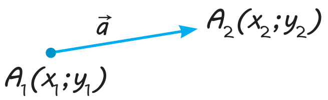
Вектори



Означення. Вектором **називають напрямлений відрізок.**

Довжину цього відрізка називають *довжиною (модулем, абсолютною величиною) вектора*.

$$|\vec{a}| = AB$$

Координати вектора на площині	**Координати вектора у просторі**
	
$\vec{a}(a_1; a_2)$, де $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	$\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, де $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Рівні вектори

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \text{вектори } \vec{a} \text{ і } \vec{b} \text{ однаково напрямлені.} \end{cases}$$

У координатах

на площині	**у просторі**
$\vec{a}(a_1; a_2) = \vec{b}(b_1; b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$	$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{b}(b_1; b_2; b_3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

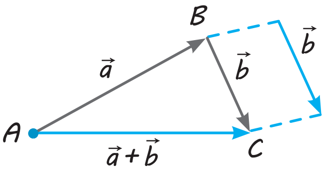
Операції над векторами

Сума векторів

на площині	**у просторі**
$\vec{a}(a_1; a_2) + \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$	$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) + \vec{b}(b_1; b_2; b_3) =$ $= \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$

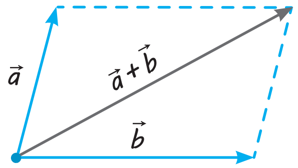
Продовження табл. 19

Правило трикутника

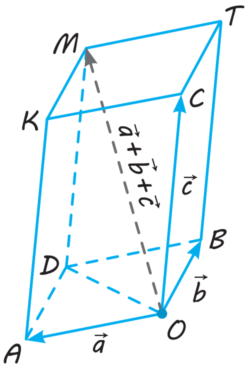


$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

Правило паралелограма



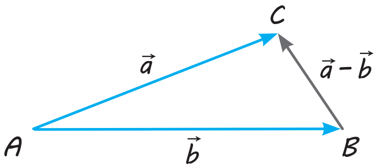
Правило паралелепіпеда



$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

Різниця векторів

на площині	у просторі
$\vec{a}(a_1;a_2)-\vec{b}(b_1;b_2)=\vec{c}(a_1-b_1;a_2-b_2)$	$\vec{a}(a_1;a_2;a_3)-\vec{b}(b_1;b_2;b_3)=$ $=\vec{c}(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$

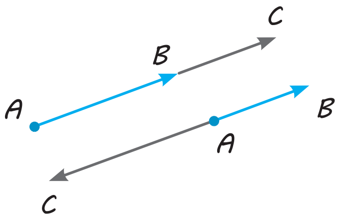


$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$$

Множення вектора на число

на площині

$$\lambda\cdot\overrightarrow{(a_1;a_2)}=\overrightarrow{(\lambda a_1;\lambda a_2)}$$



$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$$

у просторі

$$\lambda\cdot\overrightarrow{(a_1;a_2;a_3)}=\overrightarrow{(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)}$$

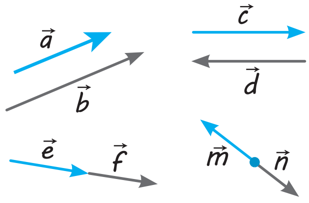
При $\lambda>0$ вектор $\lambda\vec{a}$ і вектор $\vec{a}$ однаково напрямлені.

При $\lambda<0$ вектор $\lambda\vec{a}$ і вектор $\vec{a}$ протилежно напрямлені.

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$$

Закінчення табл. 19

Колінеарні вектори



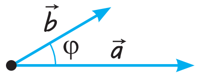
Означення. Ненульові вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Колінеарні вектори або однаково напрямлені, або протилежно напрямлені.

$\vec a$ і $\vec b$ колінеарні $\Leftrightarrow \vec b=\lambda\vec a \Leftrightarrow \dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\dfrac{b_3}{a_3}$

(відповідні координати пропорційні)

Скалярний добуток векторів



$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\varphi$$

Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними.

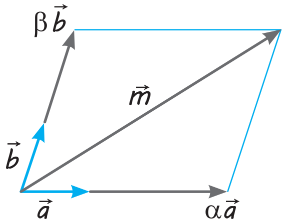
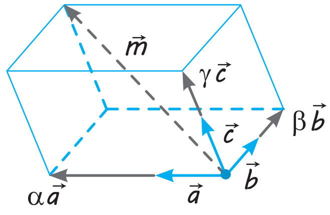
У координатах

на площині	у просторі
$\vec a(a_1;a_2)$; $\vec b(b_1;b_2)$	$\vec a(a_1;a_2;a_3)$; $\vec b(b_1;b_2;b_3)$
$\vec a\cdot\vec b=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$	$\vec a\cdot\vec b=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$

Скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат.

При $\vec a\neq 0$ і $\vec b\neq 0$ $\boxed{\vec a\cdot\vec b=0\Leftrightarrow\vec a\perp\vec b}$

Розкладання вектора

на площині	у просторі
$\vec m$ — довільний вектор площини, $\vec a$ і $\vec b$ — неколінеарні вектори.	$\vec m$ — довільний вектор простору, $\vec a$, $\vec b$ і $\vec c$ — некомпланарні (тобто не паралельні одній площині) вектори.
Завжди існує розкладання: $\vec m=\alpha\vec a+\beta\vec b$ (α і β — єдині)	Завжди існує розкладання: $\vec m=\alpha\vec a+\beta\vec b+\gamma\vec c$ (α, β і γ — єдині)
	

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття вектора в просторі та координат вектора.

Поняття вектора в просторі вводиться так само, як і на площині.

Вектором називатимемо напрямлений відрізок (рис. 19.1). Напрям вектора визначається його початком і кінцем. На рисунку напрям вектора позначають стрілкою. Для позначення векторів, як і в планіметрії, використовуватимемо малі букви латинського алфавіту a, b, c, ... Можна також позначити вектор, указавши його початок і кінець. При такому способі позначення вектора на перше місце ставлять його початок. Іноді замість слова «вектор» над буквеним позначенням вектора ставлять стрілку або риску. Вектор, зображений на рис. 19.1, можна позначити так: $\vec{a}$ або $\overrightarrow{AB}$.

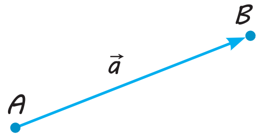


Рис. 19.1

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називають *однаково напрямленими,* якщо однаково напрямлені півпрямі AB і CD. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називають *протилежно напрямленими,* якщо протилежно напрямлені півпрямі AB і CD.

Зауважимо, що однаково чи протилежно напрямлені півпрямі (чи вектори) завжди лежать на паралельних прямих (або на одній прямій) і тому завжди розташовані в одній площині, для якої ми можемо використати відповідні означення, відомі з курсу планіметрії.

На рис. 19.2 вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однаково напрямлені, а вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ протилежно напрямлені.

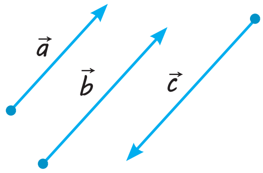


Рис. 19.2

Означення. Довжиною (або модулем чи абсолютною величиною) вектора називається довжина відрізка, що зображає вектор.

Довжину вектора $\vec{a}$ позначають $|\vec{a}|$.

Два вектори називаються *рівними*, якщо вони мають однакові довжину і напрям.

Початок вектора може збігатися з його кінцем. Такий вектор називають *нульовим* вектором. Нульовий вектор позначають $\vec{0}$. Вважають, що всі нульові вектори дорівнюють один одному. Про напрям нульового вектора не говорять. Вважають, що довжина нульового вектора дорівнює нулю.

Координатами вектора з початком у точці $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем у точці $B(x_2; y_2; z_2)$ називають упорядкований набір чисел: $x_2 - x_1$; $y_2 - y_1$; $z_2 - z_1$. Так само як і на площині, обґрунтовують, що *рівні вектори мають рівні відповідні координати і, навпаки, вектори, які мають рівні відповідні координати, є рівними*. Це дає підставу для позначення вектора його координатами: $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ або просто $\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)}$ (іноді записують так: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$). Наприклад, якщо $A(2; -1; 3)$ і $B(1; 4; 7)$, то $\overrightarrow{AB}(-1; 5; 4)$.

Зазначимо, що коли початком вектора є точка $O(0; 0; 0)$, а кінцем — точка $A(a_1; a_2; a_3)$, то вектор $\overrightarrow{OA}$ матиме координати $\overrightarrow{OA}(a_1; a_2; a_3)$. Отже, *якщо вектор відкладений від початку координат, то його координати збігаються з координатами кінця вектора.*

Якщо $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. З означення координат вектора випливає, що *нульовий вектор має координати:*

$$\vec{0}(0; 0; 0).$$

2 Операції над векторами в просторі.

Так само як і на площині, означають операції (дії) над векторами: *додавання (віднімання), множення вектора на число і скалярний добуток векторів*.

Означення. Сумою векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ **називається вектор** $\vec{c}(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$.

$\vec{a}(a_1;a_2;a_3)+\vec{b}(b_1;b_2;b_3)=$
$=\vec{c}(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$

Векторна рівність

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

доводиться так само, як і на площині.

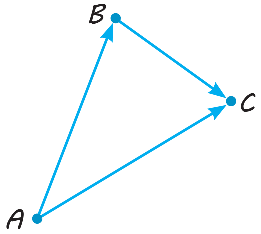


Рис. 19.3

● *Доведення.* Нехай $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ — дані точки (рис. 19.3). Вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати $(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, вектор $\overrightarrow{BC}$ має координати $(x_3-x_2;y_3-y_2;z_3-z_2)$. Тоді вектор $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ має координати $(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$. А це і є координати вектора $\overrightarrow{AC}$. Отже, вектори $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$ дорівнюють один одному. ○

Нагадаємо, що обґрунтований спосіб отримання суми двох векторів називають «*правилом трикутника*» додавання векторів.

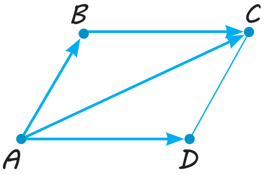


Рис. 19.4

Суму двох ненульових векторів зі спільним початком зображують діагоналлю паралелограма, побудованого на цих векторах («*правило паралелограма*») (рис. 19.4). Дійсно, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, а $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, отже, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Суму трьох ненульових векторів зі спільним початком, які не лежать в одній площині, зображують діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на цих векторах («*правило паралелепіпеда*») (рис. 19.5).

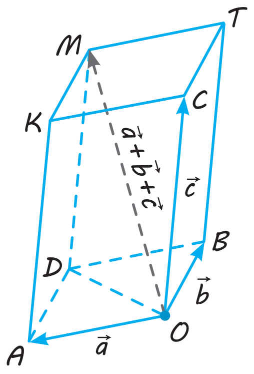


Рис. 19.5

● *Доведення.* Дійсно, якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ відкладені від точки O (як на рис. 19.5), то через кінець кожного вектора можна провести площину, паралельну площині, яка проходить через два інших вектори. Утвориться чотирикутна призма (паралелепіпед), усі грані якої — паралелограми. Тоді $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DM}$, а $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Отже, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, тобто $\overrightarrow{OM}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. ○

Означення. Різницею векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ **називається такий вектор** $\vec{c}(c_1;c_2;c_3)$**, який у сумі з вектором** $\vec{b}$ **дає вектор** $\vec{a}$: $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.

Звідси знаходимо координати вектора $\vec{c}$:

$\vec{c}(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$.

$\vec{a}(a_1;a_2;a_3)-\vec{b}(b_1;b_2;b_3)=$
$=\vec{c}(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$

Означення. Протилежним **до ненульового вектора** $\vec{a}$ **називається вектор** $-\vec{a}$**, абсолютна величина якого дорівнює абсолютній величині вектора** $\vec{a}$**, а напрям є протилежним до напряму вектора** $\vec{a}$**.**

З означення протилежного вектора випливає: якщо вектор $\vec{a}$ має координати $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, то вектор $-\vec{a}$ має координати $-\vec{a}(-a_1; -a_2; -a_3)$. Тоді $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ і різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна записати так: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

✓ **Означення.** Добутком вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ на число λ **називається вектор** $\lambda\vec{a}=\overrightarrow{(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)}$.

Для будь-яких векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$ виконуються такі *властивості*, аналогічні властивостям чисел:

Додавання векторів	Множення вектора на число
Переставна властивість	
1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;	1′) $\lambda\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\lambda$
Сполучна властивість	
2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;	2′) $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a})=(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a}$
Розподільні властивості	
3) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;	
4) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$;	
5) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$	5′) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;
6) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$	6′) $-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$

Для доведення достатньо порівняти відповідні координати векторів, які стоять у лівій і правій частинах рівностей. Як бачимо, вони рівні. А вектори, які мають рівні відповідні координати, є рівними.

Так само як і на площині, можна довести, що довжина вектора $\lambda\vec{a}$ дорівнює $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda>0$, і протилежний напряму вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda<0$ (див. відповідні рисунки в табл. 19).

Як і на площині, **ненульові вектори називаються** колінеарними, **якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.**

Отже, *колінеарні вектори або однаково напрямлені, або протилежно напрямлені.*

Так само як і для площини, можна довести, що *ненульові вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *колінеарні тоді і тільки тоді, коли* $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. Зокрема, якщо $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, то $b_1=\lambda a_1$, $b_2=\lambda a_2$, $b_3=\lambda a_3$, тобто *в колінеарних векторів відповідні координати пропорційні*. Якщо жодна з цих координат не дорівнює нулю, то це можна записати так: $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}$.

Зауваження. У курсах вищої математики існує таке означення. **Якщо в непорожній множині** V **введені дві операції — додавання елементів та множення елемента на число і для всіх елементів множини виконуються властивості 1–6 і 1′–6′, то множину** V **називають** векторним простором, **а її елементи —** векторами.
Тоді і з точки зору вищої математики ми маємо право називати векторами напрямлені відрізки (які на початку параграфа були названі векторами і для яких виконуються властивості 1–6 і 1′–6′).

Скалярний добуток векторів простору означають аналогічно до скалярного добутку векторів площини.

Означення. Скалярним добутком векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ **називається число** $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

$$\vec{a}(a_1;a_2;a_3)\cdot\vec{b}(b_1;b_2;b_3)=$$
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

Тобто *скалярний добуток векторів, заданих своїми координатами, дорівнює сумі добутків однойменних координат.*

Нагадаємо, що скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають $\vec{a}\vec{b}$. Скалярний добуток $\vec{a}\vec{a}$ позначають $\vec{a}^2$ і називають *скалярним квадратом вектора* $\vec{a}$. Очевидно, що $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$, тобто *скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини.*

Із означення скалярного добутку векторів отримуємо, що для будь-яких векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$, $\vec{c}(c_1;c_2;c_3)$ виконуються такі *властивості*:

1) $(\vec{a})^2\geqslant 0$, причому $(\vec{a})^2>0$, якщо $\vec{a}\neq\vec{0}$;

2) $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$ (переставна властивість);

3) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сполучна властивість);

4) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$ (розподільна властивість).

Дійсно, ліва частина останньої рівності дорівнює правій:

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2+(a_3+b_3)c_3=$$
$$a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2+a_3c_3+b_3c_3=$$
$$=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)+(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}.$$

Означення. Кутом між ненульовими векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ **називається кут** BAC.

Кутом між будь-якими двома ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ **називається кут між рівними їм векторами зі спільним початком.**

Вважають, що кут між однаково направленими векторами дорівнює нулю.

Теорема 19.1. Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними.

● *Доведення.* Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — дані вектори і φ — кут між ними. Маємо: $(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}+\vec{b})\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\vec{b}=$ $=\vec{a}\vec{a}+\vec{b}\vec{a}+\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{b}=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2$.

Тоді $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\vec{b}+|\vec{b}|^2$.

Звідси видно, що скалярний добуток $\vec{a}\vec{b}$ виражається через довжини векторів, а тому не залежить від вибору системи координат. Тобто скалярний добуток не зміниться, якщо систему координат вибрати спеціальним чином. Візьмемо систему координат так, як показано на рис. 19.6 (вісь Oy розміщена в площині, яка визначається векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$). При такому виборі системи координат координати вектора $\vec{a}$ можна записати $(|\vec{a}|;0;0)$, а координати вектора $\vec{b}$ — $(|\vec{b}|\cos\varphi;|\vec{b}|\sin\varphi;0)$.

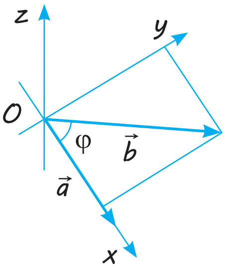


Рис. 19.6

Скалярний добуток:

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi+0\cdot|\vec{b}|\sin\varphi+0\cdot0=$$
$$=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi.$$ ○

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$$

Із теореми 19.1 випливає наслідок: **якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю. І навпаки: якщо скалярний добуток відмінних від нуля векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні.**

3 Розкладання вектора на площині та в просторі.

Розкладання вектора на площині за двома неколінеарними векторами

Теорема 19.2.* **Якщо на площині задані два неколінеарні вектори $\vec a$ і $\vec b$, то для будь-якого вектора $\vec m$ цієї площини існує єдина пара чисел α і β така, що $\vec m = \alpha\vec a + \beta\vec b$.**

● *Доведення.* Якщо вектор $\vec m$ колінеарний одному з векторів $\vec a$ чи $\vec b$, то або $\vec m = \alpha\vec a + 0\cdot\vec b$ (вектор $\vec m$ колінеарний вектору $\vec a$), або $\vec m = 0\cdot\vec a + \beta\vec b$ (вектор $\vec m$ колінеарний вектору $\vec b$). Зауважимо також, що $\vec 0 = 0\cdot\vec a + 0\cdot\vec b$.

Нехай тепер вектор $\vec m$ не колінеарний жодному з векторів $\vec a$ і $\vec b$. Відкладемо всі три вектори від однієї точки A (рис. 19.7) і через кінець вектора $\overrightarrow{AC} = \vec m$ — точку C — проведемо прямі, відповідно паралельні векторам $\vec a$ і $\vec b$. Одержимо паралелограм $ABCD$. За правилом паралелограма $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$. Вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AB}$ відповідно колінеарні векторам $\vec a$ і $\vec b$, тому існують такі числа α і β, що $\overrightarrow{AD} = \alpha\vec a$, $\overrightarrow{AB} = \beta\vec b$, отже, $\vec m = \alpha\vec a + \beta\vec b$.

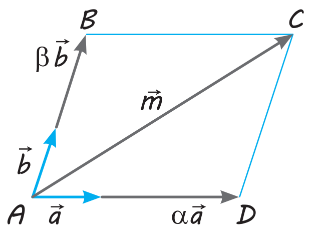


Рис. 19.7

Отриману рівність називають *розкладанням вектора $\vec m$ площини за двома неколінеарними векторами $\vec a$ і $\vec b$*, а числа α і β — *коефіцієнтами розкладання.*

Покажемо, що коефіцієнти α і β в розкладанні $\vec m = \alpha\vec a + \beta\vec b$ визначаються однозначно. Уявимо, що існує інша пара чисел α_1 і β_1 (яка відрізняється від першої хоча б одним елементом, наприклад, $\alpha_1 \neq \alpha$), для якої також виконується рівність $\vec m = \alpha_1\vec a + \beta_1\vec b$.

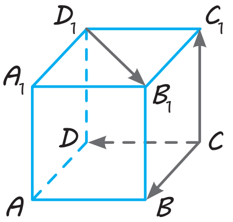
Віднімемо рівність $\vec m = \alpha_1\vec a + \beta_1\vec b$ від рівності $\vec m = \alpha\vec a + \beta\vec b$, отримаємо: $(\alpha - \alpha_1)\vec a + (\beta - \beta_1)\vec b = \vec 0$. Оскільки $\alpha_1 \neq \alpha$, то одержимо $\vec a = \frac{\beta_1 - \beta}{\alpha - \alpha_1}\vec b$. Ця рівність означає, що вектори $\vec a$ і $\vec b$ колінеарні, але це суперечить умові. Отже, наше припущення неправильне і коефіцієнти в розкладанні вектора $\vec m$ за двома неколінеарними векторами $\vec a$ і $\vec b$ визначаються однозначно. ○

Отримана рівність $\vec m = \alpha\vec a + \beta\vec b$ показує, що будь-який вектор $\vec m$ площини може бути виражений через два неколінеарні вектори $\vec a$ і $\vec b$ цієї площини (у вигляді їх лінійної комбінації). Тому пару неколінеарних векторів $\vec a$ і $\vec b$ на площині називають *базисом* на площині, вектори $\vec a$ і $\vec b$ — *базисними векторами*, рівність $\vec m = \alpha\vec a + \beta\vec b$ — *розкладанням вектора $\vec m$ за базисом $\vec a$, $\vec b$*, а числа α і β — *координатами вектора $\vec m$ у базисі $\vec a$, $\vec b$.*

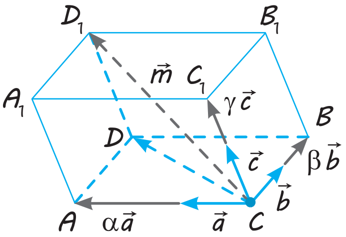
$$\boxed{\vec m = \alpha\vec a + \beta\vec b}$$

Розкладання вектора в просторі за трьома некомпланарними векторами

Означення. **Три ненульових вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або паралельні одній площині.**



◆ Рис. 19.8



◆ Рис. 19.9

Наприклад, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 19.8), то вектори $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{D_1B_1}$ є компланарними, оскільки відрізок D_1B_1 паралельний площині BCD, а вектори $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CC_1}$ не є компланарними, оскільки відрізок CC_1 не лежить у площині BCD і не паралельний цій площині. Зауважимо, що *якщо вектори не є компланарними, то вони попарно не колінеарні* (поясніть чому).

Теорема 19.3.* **Якщо задані три некомпланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, то для будь-якого вектора $\vec{m}$ простору існує єдина трійка чисел α, β, γ така, що $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$.**

● *Доведення.* Якщо вектор $\vec{m}$ не компланарний жодній із пар векторів $(\vec{a};\vec{b})$, $(\vec{a};\vec{c})$, $(\vec{b};\vec{c})$, то відкладемо всі вектори від однієї точки C (рис. 19.9) і через кінець вектора $\overrightarrow{CD_1}=\vec{m}$ — точку D_1 — проведемо площини, відповідно паралельні площинам, що проходять через пари векторів $(\vec{a};\vec{b})$, $(\vec{a};\vec{c})$, $(\vec{b};\vec{c})$. Одержимо чотирикутну призму (паралелепіпед) $ABCDA_1B_1C_1D_1$. За правилом паралелепіпеда $\overrightarrow{CD_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC_1}$. Вектори $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CC_1}$ відповідно колінеарні векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, тому існують такі числа α, β, γ, що $\overrightarrow{CA}=\alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\beta\vec{b}$, $\overrightarrow{CC_1}=\gamma\vec{c}$, отже, $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$. ○

Отриману рівність називають *розкладанням вектора $\vec{m}$ за трьома некомпланарними векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$*, а числа α, β, γ — *коефіцієнтами розкладання.*

Якщо ненульовий вектор $\vec{m}$ є компланарним будь-якій парі векторів, наприклад $(\vec{a};\vec{b})$, то, відклавши ці вектори від однієї точки A, одержимо, що зображені вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{m}$ розташовані в одній площині. За теоремою 19.2 $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, і тоді можна записати, що $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+0\cdot\vec{c}$, тобто теорема справедлива і в цьому випадку. Зауважимо також, що $\vec{0}=0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}$.

Покажемо, що коефіцієнти α, β, γ в розкладанні $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ визначаються однозначно. Припустимо, що існує інша трійка чисел α_1, β_1, γ_1 (яка відрізняється від першої хоча б одним елементом, наприклад $\alpha_1\neq\alpha$), для якої також є правильною рівність $\vec{m}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}+\gamma_1\vec{c}$.

Віднімемо рівність $\vec{m}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}+\gamma_1\vec{c}$ від рівності $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, одержимо: $(\alpha-\alpha_1)\vec{a}+(\beta-\beta_1)\vec{b}+(\gamma-\gamma_1)\vec{c}=\vec{0}$. Оскільки $\alpha_1\neq\alpha$, то з цієї рівності маємо: $\vec{a}=\frac{\beta_1-\beta}{\alpha-\alpha_1}\vec{b}+\frac{\gamma_1-\gamma}{\alpha-\alpha_1}\vec{c}$. Ураховуючи правила додавання векторів, з останньої рівності отримуємо, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ або лежать в одній площині, або паралельні одній площині, тобто компланарні, але це суперечить умові. Отже, наше припущення неправильне і коефіцієнти в розкладанні вектора $\vec{m}$ за трьома некомпланарними векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, визначаються однозначно. ○

Отримана рівність $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ показує, що будь-який вектор $\vec{m}$ простору може бути виражений через три некомпланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (у вигляді їх лінійної комбінації). Тому трійку некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називають *базисом простору*, самі вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — *базисними векторами*, рівність $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ — *розкладанням вектора $\vec{m}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$*, а числа α, β і γ — *координатами вектора $\vec{m}$ в базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.*

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Дано чотири точки $A(1;5;-4)$, $B(2;-1;3)$, $C(-3;1;2)$, $D(-4;7;-5)$.

1) Укажіть серед векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{AD}$ рівні вектори.

2) Знайдіть довжини векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$.

Розв'язання	**Коментар**
▶ Знайдемо координати заданих векторів: $\overrightarrow{AB}(1;-6;7)$, $\overrightarrow{BC}(-5;2;-1)$, $\overrightarrow{DC}(1;-6;7)$, $\overrightarrow{AD}(-5;2;-1)$. Тоді: 1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$; 2) $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert=\sqrt{1^2+(-6)^2+7^2}=\sqrt{86}$, $\left\lvert\overrightarrow{BC}\right\rvert=\sqrt{(-5)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{30}$. ◁	1) *Рівні вектори мають рівні відповідні координати.* Тому для розв'язання задачі знайдемо координати вказаних векторів і виберемо з них пари рівних векторів (*для знаходження координат вектора треба від координат кінця вектора відняти відповідні координати початку*). 2) Якщо $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$, то $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

Задача 2 Дано вектор $\vec{a}(2;3;-2)$. Знайдіть координати колінеарного йому вектора, початком якого є точка $A(-1;2;4)$, а кінець належить площині xOy.

Розв'язання	**Коментар**
▶ Нехай кінцем шуканого вектора є точка $M(x;y;0)$. Тоді вектор $\overrightarrow{AM}$ має координати $\overrightarrow{AM}(x+1;\ y-2;\ -4)$. Колінеарні вектори мають пропорційні відповідні координати, тому $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{-4}{-2}$. Звідси $x=3$, $y=8$. Тоді шуканий вектор має координати $\overrightarrow{AM}(4;6;-4)$. ◁	Спочатку врахуємо, що у точки, яка лежить на площині xOy, третя координата дорівнює нулю, а потім — що *відповідні координати колінеарних векторів пропорційні.*

Задача 3 Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо $A(3;2;-1)$, $B(5-4;7)$, $C(-1;2;6)$.

Розв'язання	**Коментар**
▶ Нехай точка D має координати $D(x;y;z)$. Тоді вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$ мають координати: $\overrightarrow{AD}(x-3;y-2;z+1)$, $\overrightarrow{BC}(-6;6;-1)$. Оскільки $ABCD$ — паралелограм, то $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Рівні вектори мають рівні відповідні координати, тому $x-3=-6$, $y-2=6$, $z+1=-1$. Звідси $x=-3$, $y=8$, $z=-2$. Тоді точка D має координати $D(-3;8;-2)$ ◁	Якщо $ABCD$ — паралелограм, то в нього протилежні сторони (наприклад, BC і AD) паралельні й рівні, але тоді й вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ є рівними, а отже, є рівними й відповідні координати цих векторів.

Задача 4 За допомогою векторів запишіть координати точки *C*, яка ділить відрізок *AB* в заданому відношенні.

Розв'язання

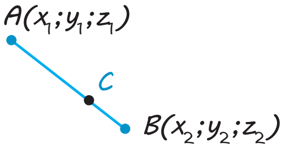
▶ Нехай задані точки мають координати $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x;y;z)$ і точка *C* ділить відрізок *AB* в заданому відношенні $\frac{AC}{CB}=\lambda$ (де $\lambda>0$). Тоді $\overrightarrow{AC}=\lambda\cdot\overrightarrow{CB}$, тобто $\overrightarrow{(x-x_1;y-y_1;z-z_1)}=\lambda\cdot\overrightarrow{(x_2-x;y_2-y;z_2-z)}$.
Прирівнюючи відповідні координати, отримуємо: $x-x_1=\lambda(x_2-x)$; $y-y_1=\lambda(y_2-y)$; $z-z_1=\lambda(z_2-z)$.
Тоді координати точки *C* такі:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.\ \triangleleft$$

Коментар

Нагадаємо, що коли точки *A*, *B*, *C* лежать на одній прямій, то вектори, які визначаються парами цих точок, є колінеарними та, у разі однаково напрямлених векторів, пов'язані співвідношенням $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}$, де коефіцієнт λ дорівнює відношенню довжин векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$. Записуючи рівність $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}$ в координатах, одержимо потрібні співвідношення між координатами заданих точок.

Координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні $\left(\frac{AC}{CB}=\lambda\right)$



$$x_C=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

$$y_C=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

$$z_C=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

Задача 5 Визначте кути трикутника *ABC*, якщо його вершини мають координати $A(1;5;3)$, $B(3;3;2)$, $C(3;6;5)$.

Розв'язання

▶ Кут *A* трикутника *ABC* дорівнює куту між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.
Знайдемо координати цих векторів:
$\overrightarrow{AB}(2;-2;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;1;2)$.
Тоді скалярний добуток
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot2+(-2)\cdot1+(-1)\cdot2=0$.
Але якщо скалярний добуток дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні, отже, $\angle A=90^\circ$. Кут *B* трикутника *ABC* дорівнює куту між векторами $\overrightarrow{BA}(-2;2;1)$ і $\overrightarrow{BC}(0;3;3)$.

Коментар

Для визначення кутів трикутника можна використати те, що ці кути дорівнюють кутам між відповідними векторами. Наприклад, кут *A* дорівнює куту між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Із формули скалярного добутку $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ отримуємо, що *косинус кута між ненульовими векторами* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *можна обчислити за формулою* $\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Маємо:

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-2)\cdot 0+2\cdot 3+1\cdot 3=9$;

$\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=3$,

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{0^2+3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

Тому $\cos B=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Отже, $\angle B=45°$, але тоді в прямокутному трикутнику ABC і $\angle C=45°$. ◁

Для обчислення за цією формулою треба також використовувати формули для знаходження скалярного добутку векторів і довжини вектора: якщо $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$, то

$\vec{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ і $|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

Також корисно пам'ятати: *якщо скалярний добуток ненульових векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні*.

Задача 6

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ одиничної довжини утворюють кут 120°. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}+2\vec{b}$.

Розв'язання	**Коментар**
▶ Нехай $\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}$. Тоді $\left|\vec{m}\right|^2=\vec{m}^2=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=$ $=\left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 120°+4\left|\vec{b}\right|^2=$ $=1^2+4\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4\cdot 1^2=3$. Отже, $\left|\vec{m}\right|=\sqrt{3}$, тобто $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{3}$. ◁	Для знаходження довжини вектора іноді можна використовувати формулу $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2$, записавши її справа наліво: $\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}^2$. Отримуємо такий *план розв'язування*: 1) позначити заданий вектор $\vec{a}+2\vec{b}$ через $\vec{m}$; 2) знайти скалярний квадрат вектора $\vec{m}$ (який дорівнює квадрату довжини вектора $\vec{m}$); 3) знайти довжину вектора $\vec{m}$.

Запитання

1. Дайте означення вектора, довжини вектора, рівних векторів.
2. Дайте означення координат вектора. Запишіть формулу для знаходження довжини вектора $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$.
3. Дайте означення суми векторів. Сформулюйте правила трикутника, паралелограма і паралелепіпеда для знаходження суми векторів.
4.* Обґрунтуйте правила трикутника, паралелограма і паралелепіпеда для знаходження суми векторів.
5. Дайте означення добутку вектора на число.
6. Сформулюйте властивості добутку вектора на число.
7.* Обґрунтуйте властивості добутку вектора на число.
8. Дайте означення кута між векторами і скалярного добутку векторів.
9. Сформулюйте властивості скалярного добутку векторів.
10.* Обґрунтуйте властивості скалярного добутку векторів.

11. Дайте означення колінеарних і компланарних векторів. Поясніть, що називають розкладанням вектора на площині за двома неколінеарними векторами і розкладанням вектора у просторі за трьома некомпланарними векторами.

12.* Обґрунтуйте можливість і єдиність розкладання вектора площини за двома неколінеарними векторами і вектора простору за трьома некомпланарними векторами.

Вправи

19.1.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 19.10). Точки M і K — середини ребер AA_1 і CC_1 відповідно. Укажіть вектори, які:

1) дорівнюють векторам $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{D_1B_1}$, $\overrightarrow{AM}$;
2) протилежні до векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CK}$;
3) колінеарні векторам $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CK}$, але не дорівнюють їм;
4) компланарні векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AC}$.

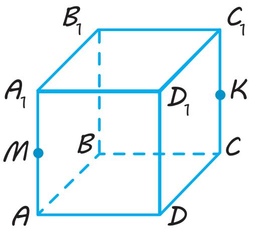


Рис. 19.10

19.2.° Дано точки $A(2;5;7)$, $B(3;-1;2)$, $C(-2;1;4)$, $D(2:3;-5)$, $O(0;0;0)$. Знайдіть координати і довжину векторів:

1) $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{CB}$; 5) $\overrightarrow{OC}$;
2) $\overrightarrow{OB}$; 4) $\overrightarrow{CD}$; 6) $\overrightarrow{DO}$.

19.3. Чи може довжина суми двох векторів:

1) бути меншою від довжини кожного доданка;
2) дорівнювати сумі довжин доданків;
3) бути більшою за суму довжин доданків? Відповідь обґрунтуйте.

19.4.° Дано три точки $A(1;1;1)$, $B(-2;1;2)$, $C(0;2;-3)$. Знайдіть координати точки $D(x;y;z)$, якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{CD}$.

19.5.° Дано три точки $A(1;3;-1)$, $B(-2;4;2)$, $C(0;3;-1)$. Знайдіть координати точки $D(x;y;z)$, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ протилежні.

19.6.° У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рис. 19.10) укажіть такий вектор із початком і кінцем у вершинах куба, який дорівнює:

1) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$; 3) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C_1D_1}$;
2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{C_1D}$.

19.7. Дано паралелограм $ABCD$, точка O — довільна точка простору. Доведіть, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

19.8. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка O — довільна точка простору. Доведіть, що:

1) $OA+OC_1=OC+OA_1$; 2) $OD+OB_1=OB+OD_1$.

19.9. Дано вектори $(2;m;5)$ і $(4;2;n)$. При яких значеннях m і n ці вектори є колінеарними?

19.10. Дано вектор $\vec{m}(3;5;-1)$. Знайдіть координати колінеарного йому вектора, початком якого є точка $M(-2;1;2)$, а кінець належить площині xOz.

19.11. Вектор $\vec{a}(2;-3;4)$ відкладений від точки $A(3;1;-5)$. Знайдіть координати точки $M(x;y;z)$ — кінця вектора $\vec{a}$.

19.12. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо:
1) $A(2;1;-3)$, $B(4;-5;6)$, $C(-3;4;8)$;
2) $A(1;-3;2)$, $B(3;-1;4)$, $C(5;-2;6)$.

19.13.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
1) $\vec{a}(2;-3;4)$, $\vec{b}(3;2;5)$;
2) $\vec{a}(-2;-1;3)$, $\vec{b}(4;3;1)$;
3) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a};\vec{b})=60°$;
4) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $\angle(\vec{a};\vec{b})=120°$.

19.14. Який знак має скалярний добуток двох векторів, якщо кут між ними:
1) гострий; 2) тупий?

19.15. Визначте вид кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо їх скалярний добуток:
1) дорівнює нулю; 2) більший за нуль; 3) менший від нуля.

19.16.° При якому значенні n вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є перпендикулярними, якщо:
1) $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b}(3;-2;n)$;
2) $\vec{a}(n;2;n)$, $\vec{b}(4;-n;5)$;
3) $\vec{a}(3;n;2n)$, $\vec{b}(n;-n;1)$;
4) $\vec{a}(1;n;-2)$, $\vec{b}(n;n;1)$?

19.17. Дано три точки $A(1;1;1)$, $B(-2;1;2)$, $C(0;2;-3)$. Знайдіть на осі Oz таку точку $D(0;0;c)$, щоб вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ були перпендикулярними.

19.18. Дано чотири точки $A(1;2;-2)$, $B(1;-1;2)$, $C(2;1;0)$, $D(14;1;5)$. Знайдіть косинус кута φ між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

19.19. Дано три точки $A(0;1;-1)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;1;0)$. Знайдіть косинус кута C трикутника ABC.

19.20.* Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ одиничної довжини. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут 60°, а вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до цих векторів. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

19.21.* Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ одиничної довжини утворюють попарно кути 60°. Знайдіть кут φ між векторами:
1) $\vec{a}$ і $\vec{b}+\vec{c}$;
2) $\vec{a}$ і $\vec{b}-\vec{c}$.

19.22. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 19.11), точка K — середина ребра CC_1, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. Виразіть через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектори:
1) $\overrightarrow{AC_1}$;
2) $\overrightarrow{AB_1}$;
3) $\overrightarrow{DB_1}$;
4) $\overrightarrow{AK}$;
5) $\overrightarrow{A_1K}$;
6) $\overrightarrow{CA_1}$.

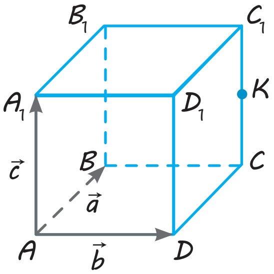


Рис. 19.11

Виявіть свою компетентність

19.23. Моторний човен рухається перпендикулярно до берега річки (рис. 19.12) із власною швидкістю $v_1=2$ м/с. Швидкість течії річки $v_2=1$ м/с. Визначте час руху човна до протилежного берега, якщо ширина річки становить 90 м (відповідь округліть до цілих секунд).

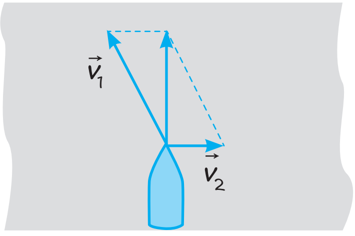


Рис. 19.12

§ 20 ПЕРЕТВОРЕННЯ В ПРОСТОРІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Таблиця 20

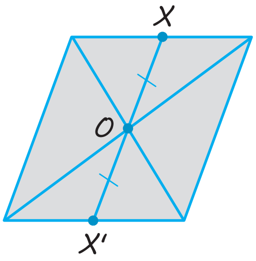
Перетворення фігур

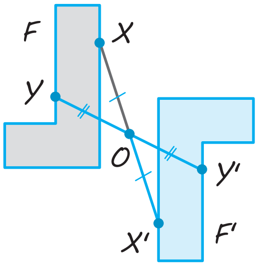
I. Рухи

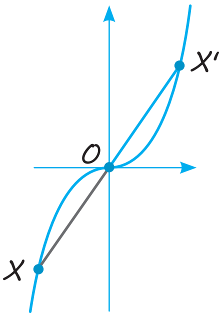
Рух — **це перетворення, при якому зберігаються відстані між точками фігури** (якщо X і Y — дві довільні точки фігури, а X' і Y' — відповідні точки, одержані після перетворення руху, то $XY = X'Y'$).

1. Симетрія

відносно точки

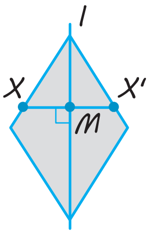


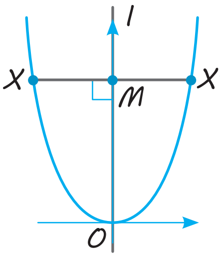


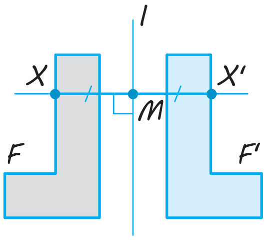


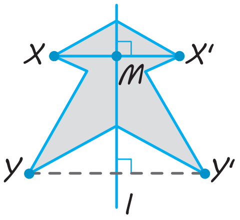
$\boxed{OX' = OX}$

відносно прямої



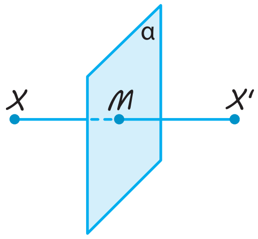




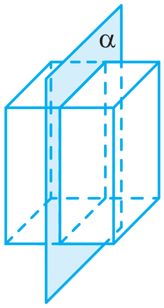


$XX' \perp l,\ XM = MX'$

відносно площини



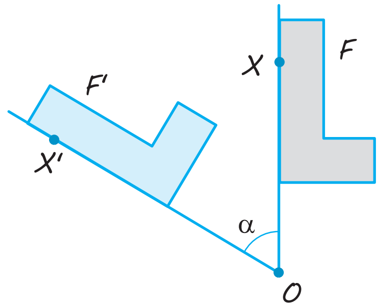
$XX' \perp \alpha,\ XM = MX'$



Продовження табл. 20

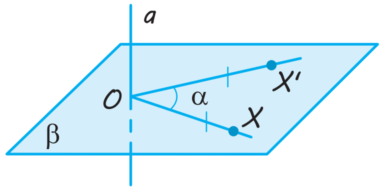
2. Поворот

навколо точки на площині



$OX'=OX$, $\angle XOX'=\alpha$

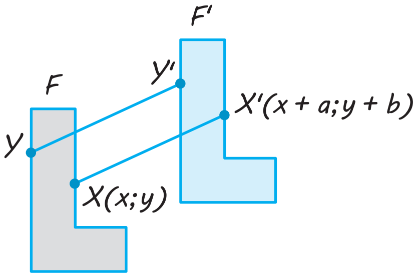
навколо прямої в просторі



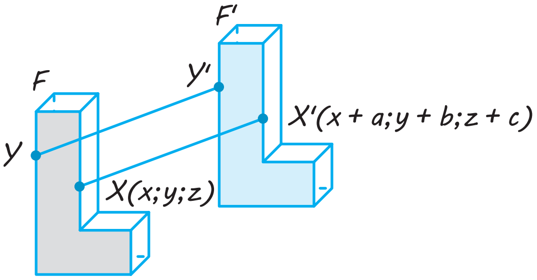
$\beta\perp a$, $OX'=OX$, $\angle XOX'=\alpha$

3. Паралельне перенесення

на площині



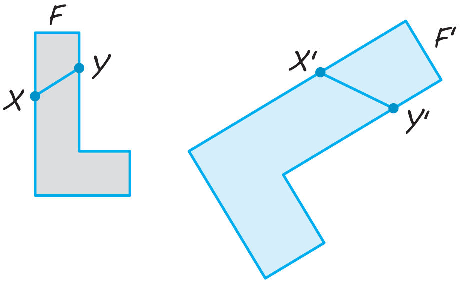
у просторі



Точки зміщуються вздовж паралельних прямих (або прямих, які збігаються) на одну й ту саму відстань в одному і тому самому напрямі.

$XX'=YY'$ (тобто $\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{YY'}$)

II. Перетворення подібності



Перетворення, при якому відстані між точками змінюються в одне й те саме число разів, називають перетворенням подібності.

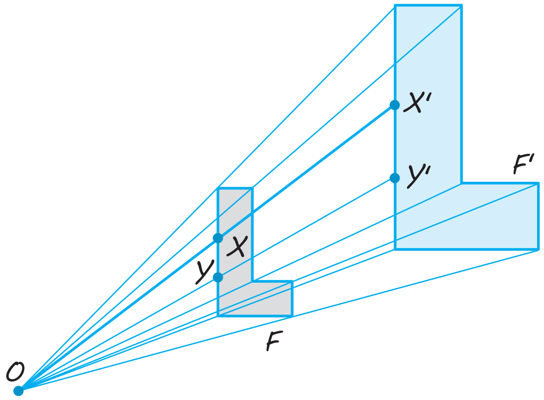
$\dfrac{X'Y'}{XY}=k$ коефіцієнт подібності.

Властивості

1. Перетворення подібності зберігає кути між променями.
2. У подібних фігурах відповідні кути рівні, а відповідні відрізки пропорційні.

Закінчення табл. 20

Гомотетія



Якщо точка X відображається в точку X', то це означає:

1) точка X' лежить на промені OX;

2) $\boxed{\dfrac{OX'}{OX}=k}$

Властивості

1. **При гомотетії відрізок відображається в паралельний йому відрізок (або у відрізок, який лежить із заданим відрізком на одній прямій),** $X'Y' \parallel XY$ **.**
2. **При гомотетії площина відображається в паралельну їй площину** (або в ту саму площину, якщо центр гомотетії лежить у заданій площині або якщо $k=1$).

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Перетворення фігур. Рух.

Нагадаємо поняття *перетворення фігур*, відоме вам із курсу планіметрії. Якщо кожну точку даної фігури перемістити яким-небудь чином, то ми отримаємо нову фігуру. Кажуть, що ця фігура отримана *перетворенням* із даної (рис. 20.1). Зауважимо, що на відміну від реального перетворення, яке можна уявити собі як неперервний процес, у геометрії *для нас будуть мати значення тільки початкове і кінцеве положення фігури*[*].

Перетворення однієї фігури в іншу називається рухом, **якщо воно зберігає відстані між точками,** тобто переводить довільні дві точки X і Y однієї фігури в точки X' і Y' другої фігури так, що $XY = X'Y'$ (рис. 20.2).

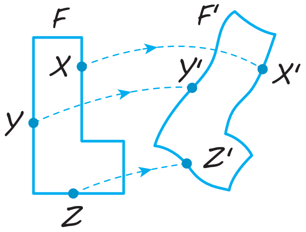


Рис. 20.1

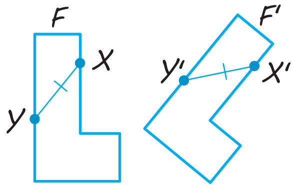


Рис. 20.2

---

[*] Фактично поняття перетворення в геометрії має той самий зміст, що і поняття функції в курсі алгебри і початків аналізу. Тобто *для перетворення однієї фігури в іншу потрібно встановити відповідність між точками цих фігур, при якій кожній точці першої фігури відповідає єдина точка другої фігури*.

Поняття перетворення й руху для фігур у просторі означаються так само, як і на площині. Дослівно так само, як і для руху на площині, обґрунтовується, що *при русі в просторі прямі переходять у прямі, промені — в промені, відрізки — у відрізки і зберігаються кути між променями*.

Новою властивістю руху в просторі є те, що **рух переводить площини в площини.** Доведемо цю властивість.

● Нехай α — довільна площина (рис. 20.3). Позначимо на ній будь-які три точки A, B, C, які не лежать на одній прямій. Унаслідок руху вони перейдуть у три точки A', B', C', які також не лежать на одній прямій. Проведемо через них площину α'. Доведемо, що унаслідок даного руху площина α переходить у площину α'.

Нехай X — довільна точка площини α. Проведемо через неї яку-небудь пряму a в площині α, що перетинає трикутник ABC у двох точках Y і Z. Пряма a перейде унаслідок руху в деяку пряму a'. Точки Y і Z прямої a перейдуть відповідно в точки Y' і Z', що належать трикутнику $A'B'C'$, а значить, і площині α'. Отже, пряма a' лежить у площині α'. Таким чином, довільна точка X площини α унаслідок руху переходить у точку X' прямої a', а значить, і площини α', що й потрібно було довести. ○

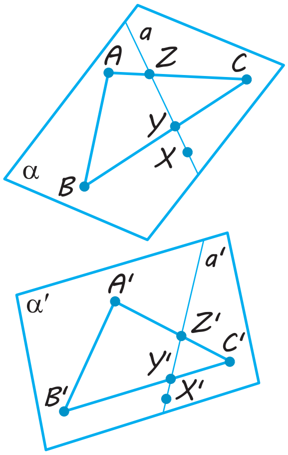


Рис. 20.3

Як і на площині, **дві фігури в просторі називають** рівними, **якщо вони рухом переводяться одна в іншу** (див. означення рівних фігур у § 1).

Так само як і на площині, означають перетворення симетрії відносно точки і прямої.

Рис. 20.4

Означення. Точки X і X' простору називаються симетричними відносно точки O, **яку називають** центром симетрії, **якщо точка O є серединою відрізка XX'.**

Точку O вважають симетричною самій собі (рис. 20.4).

Фігуру F у просторі називають *центрально-симетричною відносно точки* O, якщо кожна точка X фігури F симетрична відносно точки O деякій точці X' фігури F.

Наприклад, куб центрально-симетричний відносно точки перетину його діагоналей (рис. 20.5) (обґрунтуйте це самостійно).

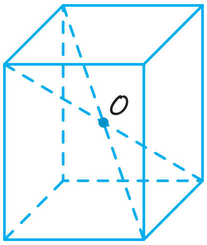


Рис. 20.5

Означення. Точки X і X' простору називаються симетричними відносно прямої a, **яку називають** віссю симетрії, **якщо пряма a проходить через середину відрізка XX' і перпендикулярна до цього відрізка** (рис. 20.6).

Точки прямої a вважають симетричними самим собі.

Фігуру F у просторі називають *симетричною відносно осі* a, якщо кожна точка X фігури F симетрична відносно цієї осі деякій точці X' фігури F.

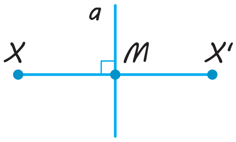


Рис. 20.6

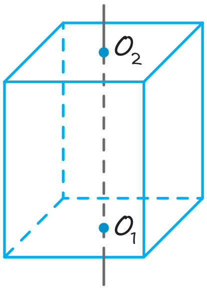


Рис. 20.7

Наприклад, прямокутний паралелепіпед симетричний відносно осі, що проходить через точки перетину діагоналей протилежних граней (рис. 20.7) (обґрунтуйте самостійно).

Крім симетрії відносно точки і прямої, у просторі розглядається ще й перетворення симетрії відносно площини.

✓ **Означення. Точки X і X' у просторі називаються симетричними відносно площини α, яку називають площиною симетрії, якщо ця площина проходить через середину відрізка XX' і перпендикулярна до нього.**

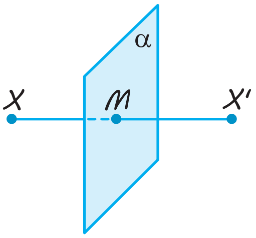


Рис. 20.8

Точки площини α вважають симетричними самим собі (рис. 20.8).

Симетрію відносно площини називають також *дзеркальною симетрією*.

Симетрія відносно площини є рухом.

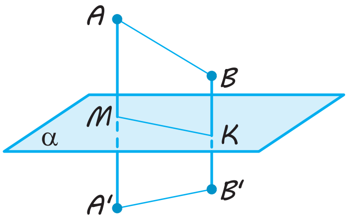


Рис. 20.9

● *Доведення*. Нехай точки A' і B' одержані симетрією відносно площини α точок A і B (рис. 20.9), точки M і K — ортогональні проекції точок A і B на площину α. Тоді точки A, B, A', B' належать одній площині і в цій площині точки A' і B' симетричні точкам A і B відносно прямої MK.

Із властивостей симетрії на площині випливає, що $AB = A'B'$. Отже, симетрія відносно площини зберігає відстані, значить, є рухом. ○

Аналогічно можна довести, що **рухами є симетрія відносно точки і симетрія відносно осі** (доведіть самостійно).

Фігуру F у просторі називають *симетричною (дзеркально-симетричною) відносно площини* α, якщо кожна точка X фігури F симетрична відносно цієї площини деякій точці X' фігури F.

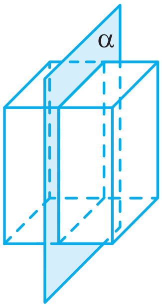


Рис. 20.10

Наприклад, прямокутний паралелепіпед симетричний відносно площини, що проходить через вісь симетрії та паралельна одній із пар протилежних граней (рис. 20.10) (обґрунтуйте самостійно).

Симетрія широко поширена в природі. Її можна спостерігати у формі листя і кольорах рослин, у розташуванні різних органів тварин, у формі кристалічних тіл (рис. 20.11).

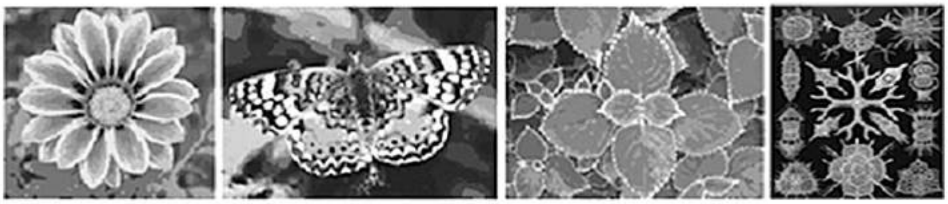


Рис. 20.11

Симетрія широко використовується на практиці, у будівництві й техніці (рис. 20.12).

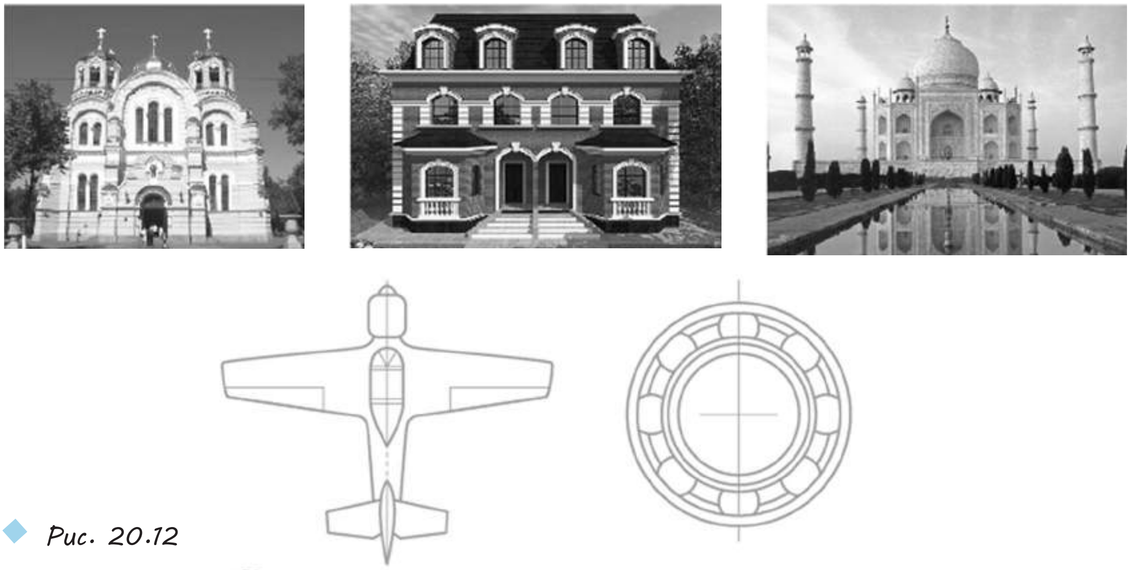


Рис. 20.12

Рис. 20.13

Симетрію широко застосовують у декоративно-прикладному мистецтві, зокрема у вишиванках. Кожному регіону України притаманні свої унікальні вишиванками. Вони відрізняються фасоном, кольорами та способом вишивання, орнаментом і візерунками (рис. 20.13).

2 Поворот. Фігури обертання.

Нагадаємо, що точку X' на площині можна одержати з точки X цієї площини поворотом навколо центра O на кут α, якщо $OX'=OX$ і кут XOX' дорівнює α (рис. 20.14).

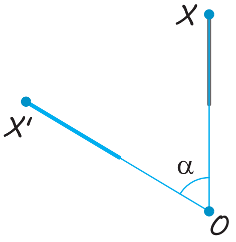


Рис. 20.14

У просторі аналогом перетворення повороту на площині навколо точки є поворот навколо прямої.

Нехай у просторі задані пряма a і точка X, що не належить цій прямій (рис. 20.15). Через точку X проведемо площину β, перпендикулярну до прямої a, і точку перетину прямої a і площини β позначимо O. Кажуть, що точка X' простору одержана з точки X поворотом навколо прямої a на кут α, якщо в площині β точка X' одержана з точки X поворотом навколо центра O на кут α.

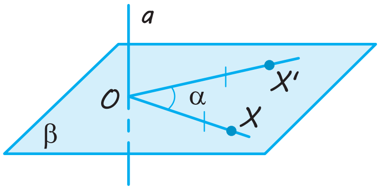


Рис. 20.15

✓ Означення. **Перетворення простору, при якому точки прямої a залишаються на місці, а всі інші точки повертаються навколо цієї прямої (в одному і тому ж напрямі) на кут α, називається поворотом, або обертанням.**

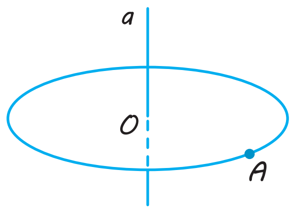


Рис. 20.16

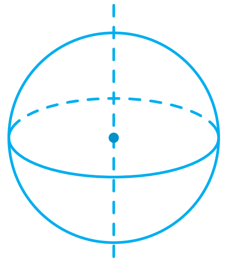


Рис. 20.17

Пряму a при цьому називають *віссю обертання*.

Говорять, що фігура Φ у просторі одержана обертанням фігури F навколо осі a, якщо всі точки фігури Φ одержують поворотами точок фігури F навколо осі a. Фігуру Φ при цьому називають *фігурою обертання*.

Наприклад, при обертанні точки A навколо прямої a (рис. 20.16) одержуємо коло з центром у точці O, що є перетином прямої a з площиною, яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a.

Сферу можна одержати обертанням кола навколо його діаметра (рис. 20.17).

3 Паралельне перенесення в просторі.

✓ **Означення.** Паралельним перенесенням **у просторі називається таке перетворення, при якому довільна точка $(x; y; z)$ фігури переходить у точку $(x+a; y+b; z+c)$, де числа a, b, c одні й ті самі для всіх точок $(x; y; z)$.**

Паралельне перенесення в просторі задається формулами $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$, що виражають координати x', y', z' точки, в яку переходить точка $(x; y; z)$ при паралельному перенесенні.

$$A(x; y; z) \to$$
$$\to A'(x+a; y+b; z+c)$$
$$x'=x+a, \quad y'=y+b,$$
$$z'=z+c$$

Так само як і на площині, доводяться такі *властивості паралельного перенесення*.

1) Паралельне перенесення є рухом.
2) При паралельному перенесенні точки зміщуються по паралельних (або таких, що збігаються) прямих на одну і ту саму відстань (рис. 20.18). (У цьому випадку часто кажуть, що точки зміщуються на один і той самий вектор $\overline{XX'}$).
3) При паралельному перенесенні кожна пряма переходить у паралельну їй пряму (або в себе).
4) Які б не були точки A і A', існує єдине паралельне перенесення, при якому точка A переходить у точку A'.

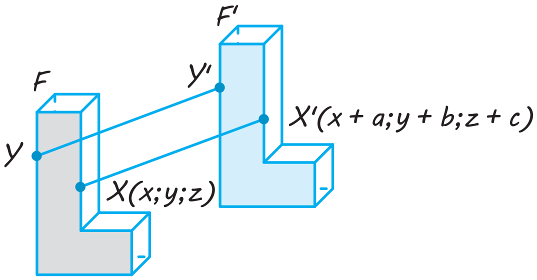


Рис. 20.18

Новою для паралельного перенесення в просторі є така властивість:

5) **При паралельному перенесенні в просторі кожна площина переходить або в себе, або в паралельну їй площину.**

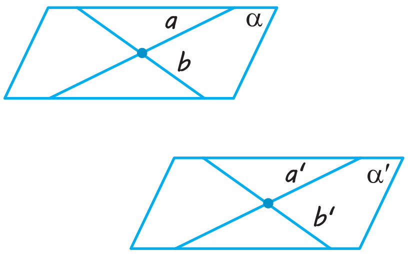


Рис. 20.19

● *Доведення.* Дійсно, нехай α — довільна площина (рис. 20.19). Проведемо в цій площині дві прямі a і b, які перетинаються. При паралельному перенесенні прямі a і b переходять або в себе, або в паралельні прямі a' і b'. Площина α переходить у деяку площину α', що проходить через прямі a' і b'. Якщо площина α' не збігається з площиною α, то за ознакою паралельності площин вона паралельна α, що й потрібно було довести. ○

4 Подібність просторових фігур.

Перетворення подібності в просторі визначається так само, як і на площині.

Означення. **Перетворення фігури F називається** перетворенням подібності, **якщо при цьому перетворенні відстані між точками змінюються в одне й те саме число разів, тобто для будь-яких двох точок X і Y фігури F і точок X', Y' фігури F', у які вони переходять, $X'Y' = kXY$.**

Так само як і на площині, *перетворення подібності в просторі переводить прямі в прямі, промені в промені, відрізки у відрізки і зберігає кути між променями*. Такими самими міркуваннями, як і для руху, доводиться, що *перетворення подібності переводить площини в площини*. (Виконайте таке обґрунтування самостійно).

Так само як і на площині, **дві фігури називаються** подібними, **якщо вони переводяться одна в іншу перетворенням подібності** (див. означення подібних фігур у § 1).

Найпростішим перетворенням подібності в просторі є гомотетія. Так само як і на площині, гомотетія **відносно центра O з коефіцієнтом гомотетії k — це перетворення, яке переводить довільну точку X у точку X' променя OX таку, що $OX' = kOX$.**

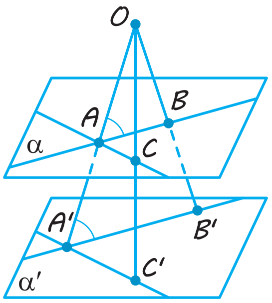


Рис. 20.20

Перетворення гомотетії в просторі переводить будь-яку площину, що не проходить через центр гомотетії, у паралельну площину (або в себе при $k = 1$).

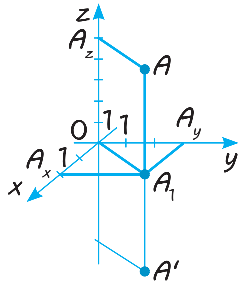
● *Доведення.* Дійсно, нехай точка O — центр гомотетії (рис. 20.20) і α — будь-яка площина, що не проходить через точку O. Візьмемо будь-яку пряму AB у площині α. Перетворення гомотетії переводить точку A в точку A' на промені OA, а точку B в точку B' на промені OB, причому $\frac{OA'}{OA} = k$ і $\frac{OB'}{OB} = k$, де k — коефіцієнт гомотетії. Звідси випливає подібність трикутників AOB і $A'OB'$. Із подібності трикутників отримуємо рівність відповідних кутів OAB і $OA'B'$, а значить, паралельність прямих AB і $A'B'$.

Візьмемо тепер іншу пряму AC в площині α. Вона при гомотетії перейде в паралельну пряму $A'C'$. При тій гомотетії, яка розглядається, площина α перейде в площину α', яка проходить через прямі $A'B'$, $A'C'$. Оскільки $A'B' \parallel AB$ і $A'C' \parallel AC$, то за ознакою паралельності площин площини α і α' паралельні, що й потрібно було довести. ○

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Дано точку $(2;3;5)$. Знайдіть точки, симетричні даній відносно координатних площин.

Розв'язання	Коментар
▶ Точка A', симетрична точці $A(2;3;5)$ відносно площини xOy, лежить на прямій, перпендикулярній до площини xOy, тому має ті самі координати x і y: $x=2$, $y=3$. Симетрична точка розташована на тій самій відстані від площини xOy, але по інший бік від неї. Тому координата z у неї відрізняється тільки знаком, тобто $z=-5$. Отже, точкою, симетричною точці $A(2;3;5)$ відносно площини xOy, буде точка з координатами $(2;3;-5)$. Аналогічно точкою, симетричною точці $A(2;3;5)$ відносно площини xOz, буде точка з координатами $(2;-3;5)$ і точкою, симетричною точці $A(2;3;5)$ відносно площини yOz, буде точка з координатами $(-2;3;5)$. ◁	Для побудови точки, симетричної заданій точці $A(2;3;5)$ відносно площини xOy, потрібно провести пряму $AA' \perp \text{пл.}\, xOy$ і від точки A_1 перетину цієї прямої з площиною xOy відкласти відрізок $A_1A'=AA_1$. Тоді точки A і A' матимуть однакові координати x і y, а координати z у них відрізнятимуться тільки знаком (рис. 20.21).  Рис. 20.21

Задача 2

Знайдіть значення a, b, c у формулах паралельного перенесення $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$, якщо при цьому паралельному перенесенні точка $A(4;5;3)$ переходить у точку $A'(3;-2;7)$.

Розв'язання	Коментар
▶ Підставляючи у формули паралельного перенесення координати точок A і A', тобто $x=4$, $y=5$, $z=3$ та $x'=3$, $y'=-2$, $z'=7$, одержуємо рівняння $3=4+a$, $-2=5+b$, $7=3+c$. Звідси $a=-1$, $b=-7$, $c=4$. ◁	Урахуємо координатні формули паралельного перенесення, при якому точка $(x;y;z)=(4;5;3)$ переходить у точку $(x';y';z')=(x+a;y+b;z+c)=(3;-2;7)$.

Задача 3

Чи існує паралельне перенесення, при якому точка A переходить у точку B, а точка C — у точку D, якщо $A(1;3;5)$, $B(4;0;1)$, $C(2;4;3)$, $D(5;1;-1)$?

Розв'язання	**Коментар**
▶ Порівняємо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB}(3;-3;-4)$, $\overrightarrow{CD}(3;-3;-4)$. Оскільки $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то доходимо висновку, що при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AB}$ точка A переходить у точку B, а точка C — у точку D. ◁	При паралельному перенесенні точки зміщуються по паралельним (або таким, що збігаються) прямим на одну й ту саму відстань, тобто точки зміщуються на один і той самий вектор $\vec{a}$. Отже, якщо при паралельному перенесенні точка A переходить у точку B, а точка C — у точку D, то вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ повинні бути рівними.

Запитання

1. Яке перетворення фігури називають рухом?

2.* Доведіть, що рух у просторі переводить площину в площину.

3. Які фігури в просторі називають рівними?

4. Що таке перетворення симетрії відносно точки? Яку фігуру називають центрально-симетричною?

5. Поясніть, що таке перетворення симетрії відносно площини. Яку фігуру називають симетричною відносно площини?

6. Дайте означення паралельного перенесення.

7. Назвіть властивості паралельного перенесення.

8.* Доведіть, що при паралельному перенесенні в просторі кожна площина переходить або в себе, або в паралельну площину.

9. Що таке перетворення подібності? Назвіть його властивості. Які фігури називають подібними?

10. Яке перетворення називають гомотетією?

11.* Доведіть, що перетворення гомотетії в просторі переводить будь-яку площину, що не проходить через центр гомотетії, у паралельну площину (або в себе).

Вправи

20.1.° Наведіть приклади центрально-симетричних і не центрально-симетричних фігур.

20.2.° Чи може центр симетрії фігури не належати їй?

20.3.° Побудуйте фігуру, симетричну кубу $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 20.22):

1) відносно центра A;

2) відносно площини BB_1C_1C.

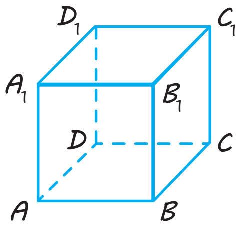


Рис. 20.22

20.4.° Чи існують точки, прямі і площини, які при центральній симетрії відображуються у себе? Відповідь проілюструйте на рисунку.

20.5.° Знайдіть центр, осі та площини симетрії фігури, яка складається з двох прямих, які перетинаються.

20.6.° Скільки осей симетрії має:

1) прямокутний паралелепіпед, який не є кубом; 2) куб?

20.7.° Скільки осей симетрії має сфера?

20.8.° Скільки площин симетрії має:
1) прямокутний паралелепіпед, який не є кубом; 2) куб?

20.9.° Наведіть приклади просторових фігур, у яких є вісь симетрії, але немає площини симетрії та, навпаки, є площина симетрії, але немає осі симетрії.

20.10.° Які види симетрії має куб?

20.11. Скільки в правильної шестикутної призми:
1) осей симетрії; 2) площин симетрії?

20.12. Скільки у правильної трикутної призми:
1) осей симетрії; 2) площин симетрії?

20.13. В основі прямої призми лежить ромб. Скільки вона має:
1) осей симетрії; 2) площин симетрії?

20.14. Скільки осей і площин симетрії має правильна піраміда, в основі якої лежить многокутник із:
1) парним числом сторін; 2) непарним числом сторін?

20.15. Чи може фігура мати рівно два центри симетрії? Відповідь обґрунтуйте.

20.16.* Доведіть, що коли дві прямі в просторі, які перетинаються і перпендикулярні, є осями симетрії даної фігури F, то і пряма, що проходить через точку їх перетину і перпендикулярна до цих прямих, також буде віссю симетрії фігури F.

20.17.* Доведіть, що фігура в просторі не може мати парне (ненульове) число осей симетрії.

20.18. Назвіть рух, який залишає на місці тільки:
1) одну точку;
2) точки однієї прямої;
3) точки однієї площини.

20.19. Чи існують рухи (якщо існують, то які), що переводять дану пряму в іншу пряму, яка:
1) паралельна першій;
2) перетинає першу;
3) мимобіжна до першої?

20.20.* Доведіть, що при русі в просторі круг переходить у круг того ж радіуса.

20.21.* Доведіть, що при русі в просторі три точки, які лежать на прямій, переходять у три точки, які також лежать на одній прямій.

20.22.* Доведіть, що рух переводить сферу у сферу того ж радіуса.

20.23.* Доведіть, що коли рух залишає на місці дві дані прямі, то він залишає на місці і всю площину, в якій лежать ці прямі, якщо:
1) дані прямі перетинаються; 2) дані прямі паралельні.

20.24.* Доведіть, що коли рух залишає на місці три точки, що не належать одній прямій, то він залишає на місці і всю площину, якій належать ці точки.

20.25.* У правильному тетраедрі зафарбували одну грань. У результаті яких рухів, що залишають на місці зафарбовану грань, він самосуміститься? (Під самосуміщенням тетраедра розуміють, що всі точки заданого тетраедра в результаті переміщення переходять в точки цього ж тетраедра.)

20.26.* У кубі зафарбували одну грань. У результаті яких рухів, що залишають на місці зафарбовану грань, він самосуміститься?

20.27.* Доведіть, що рухом є:
1) симетрія відносно точки;
2) осьова симетрія;
3) поворот.

20.28.* Доведіть, що паралельне перенесення може бути одержане в результаті послідовного виконання (композиції) двох симетрій відносно площин.

20.29.* Подайте симетрію відносно точки у вигляді композиції трьох симетрій відносно площин.

20.30. Доведіть, що перетворення симетрії відносно координатних площин задається формулами:
1) $x'=x$, $y'=y$, $z'=-z$ — відносно площини xOy;
2) $x'=x$, $y'=-y$, $z'=z$ — відносно площини xOz;
3) $x'=-x$, $y'=-x$, $z'=z$ — відносно площини yOz.

20.31. Знайдіть точки, симетричні відносно координатних площин точкам:
1) $(2;-7;3)$; 2) $(-3;4;1)$; 3) $(5;-3;7)$.

20.32. Знайдіть точки, симетричні відносно початку координат точкам:
1) $(2;-7;3)$; 2) $(-3;4;1)$; 3) $(5;-3;7)$.

20.33. Знайдіть значення a, b, c у формулах паралельного перенесення $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$, унаслідок якого точка $A(3;2;0)$ переходить у точку $A'(2;0;5)$.

20.34. При паралельному перенесенні точка $A(1;-1;3)$ переходить у точку $A'(3;-5;2)$. У яку точку переходить при цьому початок координат?

20.35. Чи існує паралельне перенесення, при якому точка A переходить у точку B, а точка C — у точку D, якщо:
1) $A(2;1;0)$, $B(1;0;1)$, $C(3;-2;1)$, $D(2;-3;0)$;
2) $A(-2;3;5)$, $B(1;2;4)$, $C(4;-3;6)$, $D(7;-2;5)$;
3) $A(0;1;2)$, $B(-1;0;1)$, $C(3;-2;2)$, $D(2;-3;1)$;
4) $A(1;1;0)$, $B(0;0;0)$, $C(-2;2;1)$, $D(1;1;1)$?

20.36. Доведіть, що при паралельному перенесенні паралелограм переходить у рівний йому паралелограм.

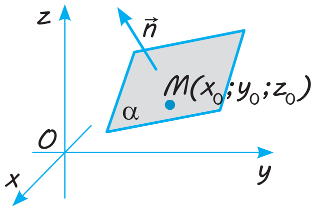
20.37. Чотири паралельні прямі перетинають паралельні площини у вершинах паралелограмів $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що паралелограми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ суміщаються паралельним перенесенням.

20.38.* Три прямі, що проходять через точку S, перетинають дану площину в точках A, B, C, а паралельну їй площину — у точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Доведіть, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ гомотетичні.

§ 21 РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Таблиця 21

Рівняння площини



$ax+by+cz+d=0$ — рівняння площини α

$$\alpha \perp \vec{n}(a, b, c)$$

Якщо площина α проходить через точку $M(x_0;y_0;z_0)$ і $\alpha \perp \vec{n}(a;b;c)$, то рівняння площини α :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

У курсі планіметрії було показано, що пряма на площині задається рівнянням $ax+by+c=0$, в якому *a*, *b*, *c* — дійсні числа, причому *a* і *b* одночасно не дорівнюють нулю. У просторі справедлива аналогічна теорема.

✓ **Теорема 21.1. Площина в просторі задається рівнянням $ax+by+cz+d=0$, де *a*, *b*, *c*, *d* — дійсні числа, причому *a*, *b*, *c* одночасно не дорівнюють нулю і є координатами вектора $\vec{n}$, перпендикулярного до цієї площини, який називається вектором нормалі.**

● *Доведення.* Нехай точка $M(x_0;y_0;z_0)$ належить площині α і $\vec{n}(a;b;c)$ — перпендикулярний до цієї площини вектор (рис. 21.1). Тоді довільна точка $A(x;y;z)$ належатиме цій площині в тому і тільки тому випадку, коли вектор $\overrightarrow{MA}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ буде перпендикулярним до вектора $\vec{n}$, тобто їх скалярний добуток дорівнюватиме нулю: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{MA}=0$. Записуючи скалярний добуток розглянутих векторів за допомогою координат, одержимо рівняння $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$, яке задає шукану площину α. Розкривши дужки і позначивши $-ax_0-by_0-cz_0=d$, одержимо необхідне рівняння площини α, а саме: $ax+by+cz+d=0$. ○

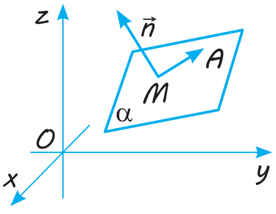


Рис. 21.1

$ax+by+cz+d=0$ — рівняння площини

Розглянемо також питання про взаємне розташування в просторі площин, заданих своїми рівняннями.

Зазначимо, що дві площини в просторі паралельні або збігаються, якщо їх нормалі $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ колінеарні, тобто для деякого числа λ виконується рівність $\vec{n}_2=\lambda\vec{n}_1$.

Для площин, заданих рівняннями $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ і $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$, вектори нормалей мають координати $\vec{n}_1(a_1;b_1;c_1)$ і $\vec{n}_2(a_2;b_2;c_2)$. Тому такі площини паралельні або збігаються, якщо для деякого числа λ виконується рівність $a_2=\lambda\cdot a_1$, $b_2=\lambda\cdot b_1$, $c_2=\lambda\cdot c_1$. При цьому, якщо $d_2=\lambda\cdot d_1$, то рівняння $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ і $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ визначають одну й ту саму площину. Якщо ж $d_2\neq\lambda\cdot d_1$, то ці рівняння визначають паралельні площини.

Якщо площини не паралельні і не збігаються, то вони перетинаються по прямій і кут φ між ними дорівнює куту між прямими, які містять їх нормалі $\vec{n}_1(a_1;b_1;c_1)$ і $\vec{n}_2(a_2;b_2;c_2)$.

Обґрунтуйте наведене твердження самостійно.

Цей кут можна обчислити за формулою $\cos\varphi=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$.

Зокрема, **площини перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ дорівнює нулю,** тобто виконується рівність $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

- $\alpha:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$;
  $\beta:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$.
  $\alpha\parallel\beta$, якщо $a_2=\lambda\cdot a_1$, $b_2=\lambda\cdot b_1$, $c_2=\lambda\cdot c_1$, $d_2\neq\lambda\cdot d_1$.
- $\varphi=\angle(\alpha;\beta)$, $\cos\varphi=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$.
- $\alpha\perp\beta$, якщо $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Визначте, які з точок $A(1;1;2)$, $B(1:2;1)$, $C(-2;-2;5)$, $D(-3;2;1)$ належать площині $3x-y+2z-6=0$.

Розв’язання	Коментар
▶ Точки A і C належать заданій площині, оскільки їх координати задовольняють рівняння площини (дійсно, $3\cdot1-1+2\cdot2-6=0$ і $3\cdot(-2)-(-2)+2\cdot5-6=0$). Точки B і D не належать заданій площині, оскільки їх координати не задовольняють рівняння площини. ◁	*Точка, задана своїми координатами, буде належати площині тоді і тільки тоді, коли координати точки будуть задовольняти рівняння площини.* Тому для розв’язування задачі потрібно підставити координати кожної точки в задане рівняння площини і перевірити — чи отримаємо ми правильну рівність.

Задача 2 Дано точки $A(1;-1;3)$ і $B(3;2;5)$. Запишіть рівняння площини α, яка проходить через точку A перпендикулярно до прямої AB.

Розв’язання	Коментар
▶ Оскільки $\overrightarrow{AB}\perp\alpha$, то вектор $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ є вектором нормалі для площини α. За формулою $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ одержуємо: $2(x-1)+3(y+1)+2(z-3)=0$. Звідси $2x+3y+2z-5=0$ — шукане рівняння площини α. ◁	Якщо пряма AB перпендикулярна до шуканої площини α, то будь-який ненульовий вектор на цій прямій (наприклад, вектор $\overrightarrow{AB}$) буде вектором нормалі для площини α. Тоді достатньо за формулою $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ записати рівняння площини, що проходить через точку A перпендикулярно до вектора нормалі $\overrightarrow{AB}$.

Задача 3

Запишіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;1)$.

Розв’язання	**Коментар**
▶ Нехай рівняння шуканої площини має вигляд $ax+by+cz+d=0$. Якщо точки *A*, *B*, *C* належать цій площині, то їхні координати задовольняють рівняння площини. Отримуємо систему рівнянь: $\begin{cases} a\cdot 0+b\cdot 1+c\cdot 0+d=0\,(\text{для точки } A),\\ a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot 0+d=0\,(\text{для точки } B),\\ a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1+d=0\,(\text{для точки } C).\end{cases}$ Звідси $b=-d$, $a=-d$, $c=d$. Тоді рівняння площини *ABC* має вигляд: $-dx-dy+dz+d=0$, або $x+y-z-1=0$ (після скорочення на $-d\neq 0$). ◁	Запишемо рівняння площини в загальному вигляді: $ax+by+cz+d=0$. Далі врахуємо, що площина проходить через точки *A*, *B*, *C*, отже, координати цих точок задовольняють рівняння площини.

Задача 4*

Доведіть, що **відстань від точки** $M(x_0;y_0;z_0)$ **до площини** α**, заданої рівнянням** $ax+by+cz+d=0$ (де *a*, *b*, *c* одночасно не дорівнюють нулю), **обчислюють за формулою** $\frac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Розв’язання	**Коментар**
▶ Для знаходження відстані від точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до площини α (рис. 21.2) проведемо перпендикуляр $MK\perp\alpha$ (точка $K(x;y;z)$ — основа перпендикуляра). Вектор нормалі $\vec{n}(a;b;c)$ також перпендикулярний до площини α, тому вектори $\overrightarrow{MK}$ і $\vec{n}$ колінеарні, отже, $\overrightarrow{MK}=\lambda\vec{n}$. Ураховуючи, що $\overrightarrow{MK}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$, $\lambda\vec{n}=\overrightarrow{(\lambda a;\lambda b;\lambda c)}$, отримуємо: $\begin{cases} x-x_0=\lambda a,\\ y-y_0=\lambda b,\\ z-z_0=\lambda c.\end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x=x_0+\lambda a,\\ y=y_0+\lambda b,\\ z=z_0+\lambda c.\end{cases}$ Оскільки точка *K* належить площині α, то координати цієї точки задовольняють рівняння площини α, тобто $a(x_0+\lambda a)+b(y_0+\lambda b)+c(z_0+\lambda c)+d=0$. Тоді $ax_0+by_0+cz_0+d=-\lambda(a^2+b^2+c^2)$. Звідси $\lambda=-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$.	Щоб знайти відстань від точки *M* до площини α, проведемо перпендикуляр *MK* до площини α і врахуємо, що вектор нормалі $\vec{n}$ також перпендикулярний до цієї площини. Оскільки два перпендикуляри до однієї площини паралельні (або лежать на одній прямій), то вектори $\overrightarrow{MK}$ і $\vec{n}$ колінеарні, отже, $\overrightarrow{MK}=\lambda\vec{n}$. Але рівні вектори мають рівні відповідні координати. Запишемо вектори $\overrightarrow{MK}$ і $\lambda\vec{n}$ у координатах та прирівняємо відповідні координати. Ураховуємо, що відстань *MK* від точки *M* до площини α дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{MK}$ і $\lvert\overrightarrow{MK}\rvert=\lvert\lambda\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert$. Для знаходження значення λ скористаємося тим, що точка *K* належить площині α, отже, координати цієї точки задовольняють рівняння площини α. Зауважимо, що за умовою коефіцієнти *a*, *b*, *c* одночасно не дорівнюють нулю, тому сума $a^2+b^2+c^2\neq 0$ (і завжди є додатною).

Розв'язання

Ураховуючи, що $\left|\overrightarrow{MK}\right|=|\lambda|\cdot|\vec{n}|$ і $|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, отримуємо:

$$MK=\left|\overrightarrow{MK}\right|=|\lambda|\cdot|\vec{n}|=$$

$$=\left|-\frac{ax_0+by_2+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \triangleleft$$

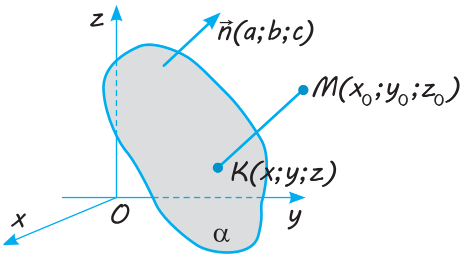


Рис. 21.2

Отже, **щоб знайти відстань від точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до площини α, заданої рівнянням $ax+by+cz+d=0$, достатньо в ліву частину рівняння площини підставити координати заданої точки і модуль результату поділити на квадратний корінь із суми квадратів коефіцієнтів при змінних.**

Задача 5 Знайдіть відстань від точки $A(2;-5;1)$ до площини, заданої рівнянням $4x-3y+12z+17=0$.

Розв'язання	Коментар
▶ Відстань від точки A до площини α дорівнює: $\rho(A;\alpha)=\frac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$ $=\frac{\lvert 4\cdot2-3\cdot(-5)+12\cdot1+17\rvert}{\sqrt{4^2+(-3)^2+12^2}}=\frac{52}{13}=4$. ◁	Для знаходження відстані від точки $A(x_0;y_0;z_0)$ до площини α, заданої рівнянням $ax+by+cz+d=0$, скористаємося формулою $\frac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Запитання

1. Запишіть у загальному вигляді:
   1) рівняння площини в просторі;
   2) рівняння площини, яка проходить через точку $M(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(a;b;c)$.

2.* Обґрунтуйте рівняння площини в просторі.

3. За якої умови площини, задані рівняннями $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ і $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$, будуть паралельними?

4. За якої умови площини, задані рівняннями $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ і $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$, будуть перпендикулярними?

Вправи

21.1° Визначте рівняння координатної площини:
1) xOy; 2) xOz; 3) yOz.

21.2° Дано точки $A(1;3;4)$, $B(-2;-1;2)$, $C(3;0;1)$, $D(-1;3;1)$. Укажіть, які з них належать площині $2x-5y+3z-7=0$.

21.3° Знайдіть точки перетину площини, заданої рівнянням $x+3y-5z-6=0$, з осями координат.

21.4. Запишіть рівняння площини з вектором нормалі $\vec{n}(4;2;-1)$, яка проходить через точку $A(2;-3;5)$.

21.5. Точка $M(2;-5;-3)$ є основою перпендикуляра, проведеного з початку координат на деяку площину. Запишіть рівняння цієї площини.

21.6. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точки:
1) $A(0;0;1)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$;
2) $M(3;-1;2)$, $N(4;1;-1)$, $K(2;0;1)$.

21.7* Чи належать одній площині точки $A(1;0;-2)$, $B(3;4;2)$, $C(0;1;3)$, $D(2;-1;1)$?

21.8. Запишіть рівняння площини, яка:
1) проходить через точку $M(1;-2;4)$ і паралельна координатній площині xOz;
2) проходить через точку $M(0;2;0)$ і перпендикулярна до осі ординат;
3) проходить через точки $A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$ і паралельна осі аплікат.

21.9. Визначте, які з площин, заданих наведеними рівняннями, є паралельними:
1) $x+y+z-7=0$, $3x+3y+3z+7=0$;
2) $3x-2y+5z-2=0$, $6x-4y+10z-4=0$;
3) $2x+6y-4z=0$, $-x-3y+2z+1=0$;
4) $x-y+2z-2=0$, $3x-y+6z-5=0$.

21.10. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(1;2;-1)$ паралельно площині, заданій рівнянням:
1) $3x+2y-z+4=0$; 2) $x-4y+3z-5=0$.

21.11. Визначте, які з площин, заданих наведеними рівняннями, є взаємно перпендикулярними:
1) $x+y+z-1=0$, $5x-3y-2z+3=0$;
2) $2x-2y+z-3=0$, $6x-4y+10z-4=0$;
3) $2x+6y-4z=0$, $-x-3y+2z+1=0$;
4) $x-y+2z-2=0$, $3x-y+6z-5=0$.

21.12. Знайдіть косинус кута φ між площинами, які задані рівняннями:
1) $x+3y-z-1=0$, $3x-2y+z+3=0$;
2) $2x-y+z-2=0$, $x-4y+3z-4=0$;
3) $2x+y-3z=0$, $x-y+z+1=0$;
4) $x-y+2z-2=0$, $4x-2y+z-5=0$.

21.13.* Площина задана рівнянням $ax+by+cz+d=0$. Запишіть рівняння площини, симетричної даній відносно:
1) координатних площин;
2) координатних прямих;
3) початку координат.

21.14. Обчисліть відстань від початку координат до площини, заданої рівнянням:
1) $2x-2y+z-6=0$;
2) $2x+3y-z+12=0$.

21.15.* Сфера, задана рівнянням $x^2+y^2+z^2=4$, перетнута площиною. Знайдіть координати центра кола перерізу і його радіус, якщо площина задана рівнянням:
1) $z=0$; 2) $y=1$; 3) $x+y+z=2$.

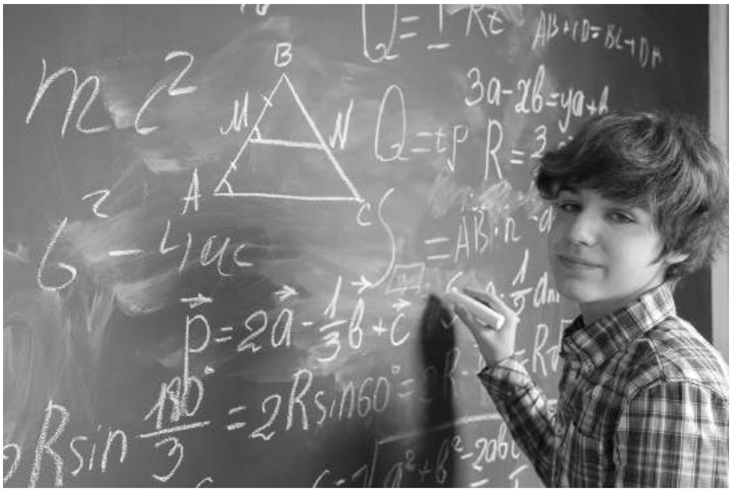
21.16. Знайдіть відстань від точки $M(-3;1;2)$ до площини, заданої рівнянням $3x+4y-12z+2=0$.

21.17. Обчисліть відстань між паралельними площинами, заданими рівняннями $3x+2y+4z+12=0$ і $9x+6y+12z-5=0$.

Вказівка. Для цього достатньо вибрати будь-яку точку першої площини, наприклад $M(0;0;-3)$, і знайти відстань від неї до другої площини.

21.18.* Доведіть, що в загальному випадку відстань між паралельними площинами α і β, заданими рівняннями $ax+by+cz+d_1=0$ і $ax+by+cz+d_2=0$, можна обчислити за формулою

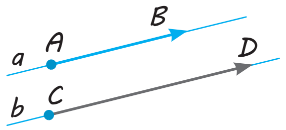
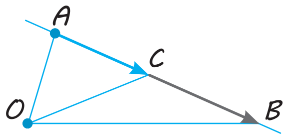
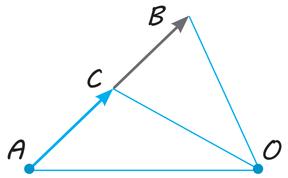
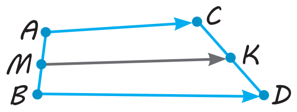
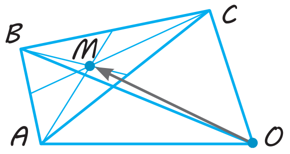
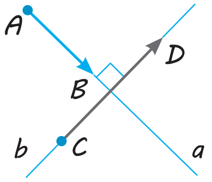
$$\rho(\alpha;\beta)=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$



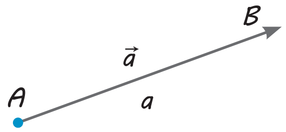
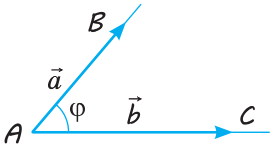
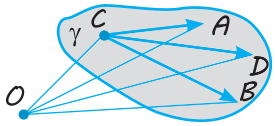
§ 22 ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ І ВЕКТОРІВ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Таблиця 22

1. Переклад геометричних фактів на векторну мову і векторних співвідношень на геометричну мову

№	Рисунок	Твердження геометричною мовою	Твердження векторною мовою
1		Прямі паралельні $a \parallel b$ (прямі a і b не збігаються)	Вектори колінеарні: $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$
2		$C \in AB$ $\left(\dfrac{AB}{AC}=\lambda\right)$	Вектори колінеарні: $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$ або $\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA}+(1-p)\cdot\overrightarrow{OB}$
3		$\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{m}{n}$	а) $\overrightarrow{AC}=\dfrac{m}{n}\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{OC}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$
		C — середина AB $\left(\dfrac{AC}{CB}=1\right)$	$\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$
4		M — середина AB; K — середина CD	$\overrightarrow{MK}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$
5		M — точка перетину медіан $\triangle ABC$. O — довільна точка	$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$
6		Прямі перпендикулярні $a \perp b$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ $(\overrightarrow{AB}\neq\vec{0},\ \overrightarrow{CD}\neq\vec{0})$

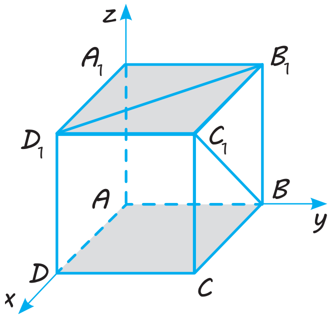
Продовження табл. 22

№	Рисунок	Твердження геометричною мовою	Твердження векторною мовою
7		$AB=a$	$\vec{a}^{\,2}=\lvert\vec{a}\rvert^2$, де $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\lvert\vec{a}\rvert=a$ (в координатах: $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x_a^2+y_a^2}$ — на площині; $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}$ — у просторі)
8		$\angle BAC=\varphi$	$\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$, де $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$
9		$D\in$ пл ABC; $C\notin$ прямій AB; O — довільна точка	а) $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{OD}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OC}$

2. Схема розв’язування геометричних задач векторним методом

1. **Перекласти вимогу задачі на векторну мову** (використовуючи співвідношення № 1–9 табл. 22).
2. **Увести прямокутну систему координат** або *вибрати два неколінеарних вектори на площині (або три некомпланарних вектори в просторі) як базисні.*
3. **Знайти координати векторів, зазначених на кроці 1**, *або виразити ці вектори через базисні*.
4. **Довести записане на кроці 1 співвідношення або знайти його значення і перекласти результат на геометричну мову** (для перекладу знову скористатися співвідношеннями № 1–9 табл. 22).

Приклад



Знайдіть кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба.

Розв’язання

Нехай дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рисунок). Діагоналі B_1D_1 і BC_1 двох суміжних граней куба мимобіжні. Позначимо кут між цими діагоналями через φ $(\angle(B_1D_1;BC_1)=\varphi)$.

1. *Векторною мовою вимога задачі виглядає так:*

необхідно знайти кут φ зі співвідношення $\cos\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{B_1D_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}\right|}{\left|\overrightarrow{B_1D_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC_1}\right|}$ (табл. 22).

Закінчення табл. 22

2. *Уведемо прямокутну систему координат так*:
початок координат виберемо в точці A, вісь Ox спрямуємо уздовж ребра AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, Oy — уздовж ребра AB і Oz — уздовж ребра AA_1.
Якщо довжину ребра куба прийняти за одиницю, то координати вершин куба будуть такими: $A(0;0;0)$, $D_1(1;0;1)$, $D(1;0;0)$, $C_1(1;1;1)$, $B_1(0;1;1)$, $B(0;1;0)$, $A_1(0;0;1)$, $C(1;1;0)$.
3. *Тоді координати векторів, зазначених на кроці 1, будуть такими*: $\overrightarrow{B_1D_1}(1;-1;0)$, $\overrightarrow{BC_1}(1;0;1)$.
4. *Знайдемо кут* φ: $\cos\varphi=\dfrac{|1\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}$.
Оскільки $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$ і кут φ гострий (як кут між прямими), то $\varphi=60°$.

Відповідь: 60°.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Зазначимо, що координатний метод розв’язування стереометричних задач зручно використовувати в тих випадках, коли в заданій конфігурації можна ввести прямокутну систему координат у просторі. Також для розв’язування деяких геометричних задач буває зручно поєднувати координатний і векторний методи (використовуючи координати відповідних векторів), а на деяких етапах розв’язування — застосовувати відомі геометричні співвідношення.

Розв’язування геометричних задач векторним методом зазвичай містить такі етапи: переклад умови задачі на векторну мову; розв’язування задачі за допомогою векторів; переклад результату на геометричну мову. Слід ураховувати, що запис умови задачі у векторній формі найчастіше не є однозначним.

Наприклад, навіть таке просте твердження: «Точка C — середина відрізка AB» (рис. 22.1), може бути записане у векторній формі одним із таких способів:

Рис. 22.1

1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$;
2) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$;
3) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CB}$;
4) $\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
5) $\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
6) $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CB}$;
7) $\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,

де O — довільна точка. Це призводить до того, що під час запису умови геометричної задачі у векторній формі важко зорієнтуватися, яке саме векторне співвідношення доведеться використати, щоб задовольнити вимогу задачі. До того ж запропонувати будь-який певний метод дослідження векторних співвідношень, отримуваних під час запису умови векторною мовою, практично неможливо. Тому доцільно спочатку записати векторною мовою тільки вимогу задачі, а потім, проаналізувавши умови (за кресленням), виявити, за допомогою яких векторів можна отримати необхідне співвідношення (у простих задачах) або які вектори доцільно вибрати як базисні (або як зручно ввести систему координат) для складніших задач. Лише потім у міру потреби можна перекладати умову на векторну мову, а на деяких етапах скористатися відомими учням геометричними співвідношеннями.

Слід ураховувати, що вектори доцільно застосовувати для розв’язування геометричних задач на доведення паралельності, належності трьох і більше точок одній прямій, перпендикулярності, на обчислення довжин відрізків і величин кутів, тому бажано вміти перекладати на векторну мову вимоги саме цих задач, а також здійснювати зворотний переклад отриманих векторних співвідношень на геометричну мову. Відповідні відомості наведено в табл. 22.

Уточнимо формулювання основних відомостей, наведених у цій таблиці.

Співвідношення, пов’язані з паралельністю прямих та належністю точок одній прямій

● З означення колінеарних векторів випливає, що *коли вектори лежать на одній прямій або на паралельних прямих, то вони колінеарні, і навпаки, якщо вектори колінеарні, то вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих*. Крім того, ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли існує таке число λ, що $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. Інакше кажучи, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ненульові та $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні (і лежать на паралельних прямих або на одній прямій); і навпаки, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні (лежать на паралельних прямих або на одній прямій), то існує таке число λ $(\lambda\neq 0)$, що $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. Отже, ми обґрунтували основні співвідношення, наведені в рядках 1 і 2 табл. 22. Зауважимо також, що в разі, коли три точки A, B, C лежать на одній прямій (див., наприклад, рис. 22.1), вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BA}$ колінеарні, отже, $\overrightarrow{BC}=p\overrightarrow{BA}$, але тоді $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=p\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)$. Звідси $\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA}+(1-p)\overrightarrow{OB}$.

І навпаки, якщо виконується співвідношення $\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA}+(1-p)\overrightarrow{OB}$, то виконується і співвідношення $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=p\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)$, тобто $\overrightarrow{BC}=p\overrightarrow{BA}$. Тому вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BA}$ колінеарні, отже, точки A, B, C лежать на одній прямій (прямі BC і BA не можуть бути паралельними, тому що вони мають спільну точку B). Отримане співвідношення можна сформулювати так: **точки A, B, C лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли для довільної точки O виконується векторна рівність $\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA}+(1-p)\overrightarrow{OB}$ (тобто в розкладанні вектора $\overrightarrow{OC}$ за двома неколінеарними векторами $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ сума коефіцієнтів розкладання дорівнює одиниці).** ○

Співвідношення, пов’язані з поділом відрізка точкою

● Якщо точка C ділить відрізок AB у відношенні $m:n$ $\left(\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}\right)$, то $\overrightarrow{AC}=\frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$.

Тоді $n\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{CB}$ і тому

$n\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=m\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)$. Звідси

$$\overrightarrow{OC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{n+m}\overrightarrow{OB}.$$

І навпаки, якщо виконується рівність $\overrightarrow{OC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{n+m}\overrightarrow{OB}$, то виконується і рівність $\overrightarrow{AC}=\frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$, отже, точки A, B, C лежать на одній прямій і $\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$, тобто точка C ділить відрізок AB у відношенні $m:n$.

Отже, **точка** C **ділить відрізок** AB **у відношенні** $m:n$ **(рахуючи від точки** A**) тоді і тільки тоді, коли виконуються векторні рівності** $\overrightarrow{AC}=\frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$ **або** $\overrightarrow{OC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{n+m}\overrightarrow{OB}$. ○

Зауважимо, що **коли точка** C **є серединою відрізка** AB**, то** відношення $m:n=1:1$ і за формулою $\overrightarrow{OC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{n+m}\overrightarrow{OB}$ **отримуємо:** $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

Співвідношення, пов'язане з вектором, що з'єднує середини двох заданих відрізків

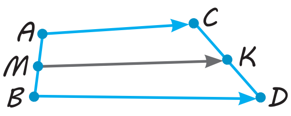


Рис. 22.2

● Нехай точка M — середина відрізка AB і точка K — середина відрізка CD (рис. 22.2). Тоді $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{DK}=-\overrightarrow{CK}$. Запишемо вектор MK двома способами: $\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CK}$ і $\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DK}$. Додаючи почленно ці рівності та враховуючи, що вектори $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$, а також $\overrightarrow{CK}$ і $\overrightarrow{DK}$ протилежні (а сума протилежних векторів дорівнює нульовому вектору), отримуємо: $2\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$, тоді $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. ○

Співвідношення, пов'язане з точкою перетину медіан трикутника

● Нехай у трикутнику ABC відрізок AK — медіана, точка M — точка перетину медіан (рис. 22.3). За властивістю медіан трикутника $AM:MK=2:1$. Тоді для довільної точки O за формулою $\overrightarrow{OC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{n+m}\overrightarrow{OB}$ маємо: $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$. Ураховуючи, що точка K — середина BC, маємо: $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$. Отже, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$. ○

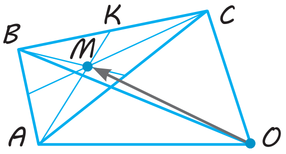


Рис. 22.3

Співвідношення, пов'язане з перпендикулярністю прямих

Це співвідношення відображує відому властивість: **якщо два ненульових вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю; і навпаки, якщо скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю, то ці вектори перпендикулярні.**

Співвідношення, пов'язане зі знаходженням довжини відрізка

Для знаходження довжини відрізка AB можна розглянути вектор $\overrightarrow{AB}=a$ і скористатися рівністю $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2$, тобто **для знаходження довжини відрізка можна знайти скалярний квадрат вектора, який зображує цей відрізок.** Якщо ж є можливість ввести прямокутну систему координат у просторі та знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}=\vec{a}\left(x_a;y_a;z_a\right)$, то $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}$.

Співвідношення, пов'язане зі знаходженням кута між променями або прямими

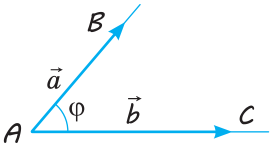


Рис. 22.4

● Якщо потрібно знайти $\angle BAC=\varphi$ (рис. 22.4), то можна розглянути ненульові вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ і скористатися формулою скалярного добутку векторів $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\varphi$. Звідси $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. ○

Зауважимо, що отриманий за формулою $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ кут BAC між векторами може бути як гострим $(\cos\varphi>0)$, так і тупим $(\cos\varphi<0)$. Якщо ж потрібно визначити кут φ між прямими AB і AC, то він може бути тільки гострим. У цьому випадку зручно застосовувати формулу $\cos\varphi=\dfrac{|\vec{a}\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Співвідношення, пов'язані з розміщенням чотирьох точок в одній площині

● Нехай точка D належить площині ABC і точка C не належить прямій AB (рис. 22.5). Тоді вектори $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$ неколінеарні. Оскільки вектор $\overrightarrow{CD}$ лежить у площині ABC (тобто компланарний векторам $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$), то він розкладається за двома неколінеарними векторами $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$ в такому вигляді:

$$\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}.$$

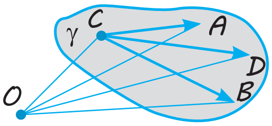


Рис. 22.5

І навпаки, якщо для ненульових векторів $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$ виконується рівність $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}$, то вектори $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{CD}$ лежать в одній площині, отже, точка D належить площині ABC.

Якщо O — довільна точка, то рівність $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}$ можна записати так: $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\alpha(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+\beta(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$. Тоді $\overrightarrow{OD}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OC}$.

Отже, **точка** D **належить площині** ABC (тобто всі чотири точки лежать в одній площині) **тоді і тільки тоді, коли** $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}$, **або** $\overrightarrow{OD}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OC}$. ○

Зауваження. Якщо в останній формулі позначити коефіцієнт біля вектора $\overrightarrow{OC}$ через γ (тобто $\gamma=1-\alpha-\beta$, що еквівалентно рівності $\alpha+\beta+\gamma=1$), то отримаємо (для довільної точки O), що $\overrightarrow{OD}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$, де $\alpha+\beta+\gamma=1$. Одержаний результат можна сформулювати так.

Точка D належить площині ABC (тобто всі чотири точки лежать в одній площині) тоді і тільки тоді, коли в розкладанні вектора $\overrightarrow{OD}$ за векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$ $\left(\overrightarrow{OD}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}\right)$ сума коефіцієнтів розкладання дорівнює одиниці ($\alpha+\beta+\gamma=1$).

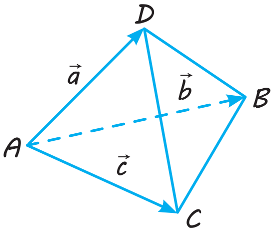
Співвідношення, наведені в табл. 22, дозволяють перекладати вимогу геометричної задачі векторною мовою, що дає можливість виокремити деякі орієнтири для здійснення решти етапів розв'язання геометричної задачі за допомогою векторів. Отже, розв'язування геометричних задач можна проводити за такою схемою.

1. **Перекласти вимогу задачі на векторну мову** (використовуючи співвідношення табл. 22).
2. **Увести прямокутну систему координат** або *вибрати два неколінеарних вектори на площині (або три некомпланарних вектори у просторі) як базисні.*
3. **Знайти координати векторів, зазначених на кроці 1**, *або виразити ці вектори через базисні.*
4. **Довести записане на кроці 1 співвідношення або знайти його значення і перекласти результат на геометричну мову** (для перекладу знову скористатися співвідношеннями табл. 22).

Приклад застосування цієї схеми під час застосування векторно-координатного методу розв'язування стереометричної задачі наведено в табл. 22. Наведемо приклад застосування векторного методу для розв'язування геометричних задач.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Доведіть, що в піраміді, усі грані якої — правильні трикутники, будь-які два мимобіжних ребра перпендикулярні.

Розв'язання	Коментар
▶ **1.** Нехай у піраміді *ABCD* всі грані — правильні трикутники, тобто всі ребра дорівнюють *a* і всі плоскі кути — 60° (рис. 22.6). Щоб довести, наприклад, що мимобіжні ребра *AD* і *BC* перпендикулярні, достатньо довести, що скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$ дорівнює нулю.  ◆ *Рис. 22.6* **2.** Виберемо три некомпланарних вектори як базисні: $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ (довжини цих векторів дорівнюють *a* і кути між кожною парою векторів — 60°). **3.** Виразимо вектори, вибрані в п. 1, через базисні: $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$.	Використаємо схему розв'язування геометричних задач векторним методом. **1.** *Перекласти вимогу задачі векторною мовою* — використовуючи табл. 22, згадуємо, що для доведення перпендикулярності відрізків достатньо довести, що скалярний добуток відповідних векторів дорівнює нулю. **2.** *Вибрати три некомпланарних вектори як базисні* — частіше за все ці вектори вибирають такими, що виходять з однієї точки. **3.** *Виразити вектори, зазначені на кроці 1, через базисні.* **4.** *Довести записане на кроці 1 співвідношення або знайти його значення і перекласти результат геометричною мовою* (для перекладу зручно знов скористатися співвідношеннями табл. 22).

4. Знайдемо скалярний добуток векторів:

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{a}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\vec{a}\vec{c}-\vec{a}\vec{b}=$$

$$=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ-a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=0\ .$$

Але якщо скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні, отже, $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$, тому $AD\perp BC$. ◁

Для знаходження отриманих скалярних добутків враховуємо, що *скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними.*

Задача 2*

Площина проходить через кінці трьох ребер паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини. Доведіть, що ця площина відтинає від діагоналі паралелепіпеда, проведеної з тієї ж вершини, відрізок, довжина якого дорівнює одній третині довжини діагоналі.

Розв’язання

▶ Нехай діагональ AC_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетинає площину A_1BD в точці M (рис. 22.7). Оскільки вектор $\overrightarrow{AM}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{AC_1}$, то $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC_1}$. За правилом паралелепіпеда $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$. Звідси $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC_1}=\lambda\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)=\lambda\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AA_1}$.

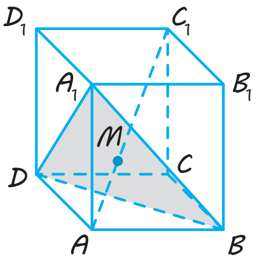


Рис. 22.7

Але $M\in$ пл. A_1BD, тоді сума коефіцієнтів розкладання вектора $\overrightarrow{AM}$ за некомпланарними векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ дорівнює одиниці, тобто $\lambda+\lambda+\lambda=1$. Тоді $3\lambda=1$ і $\lambda=\frac{1}{3}$. Отже, $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$ і тому $AM=\frac{1}{3}AC_1$. ◁

Коментар

Вимогу задачі векторною мовою можна записати так:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}\ .$$

Виберемо як базисні три некомпланарних вектори, які зображуються ребрами паралелепіпеда, що виходять з однієї точки, і запишемо вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{AC_1}$ через базисні. Потім використаємо векторну умову належності точки M площині A_1BD (сума коефіцієнтів розкладання вектора $\overrightarrow{AM}$ за некомпланарними векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ дорівнює одиниці).

Запитання

1. Назвіть етапи розв’язування геометричних задач за допомогою векторів.

2.* Як на векторній мові записати такі геометричні твердження:

1) прямі AB і CD паралельні;

2) точка C належить прямій AB;

3) точка C ділить відрізок AB у відношенні $\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$;

4) точка C — середина відрізка AB;

5) відрізок MK сполучає середини відрізків AB і CD;

6) точка M — точка перетину медіан трикутника ABC;

7) прямі AB і CD перпендикулярні;

8) довжина відрізка AB дорівнює a;

9) кут BAC дорівнює φ;

10) точка D належить площині ABC?

3.* Обґрунтуйте векторні співвідношення, наведені в табл. 22.

4. Запропонуйте схему розв'язування геометричної задачі векторним методом і наведіть приклад її застосування.

Вправи

22.1.° Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо:
1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AB}=0,2\overrightarrow{DC}$.

22.2.° Паралелограми $ABCD$ і A_1BC_1D не лежать в одній площині. За допомогою векторів доведіть, що $AA_1 \parallel CC_1$.

22.3.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 22.8). За допомогою векторів визначте кут між мимобіжними прямими A_1B і B_1D.

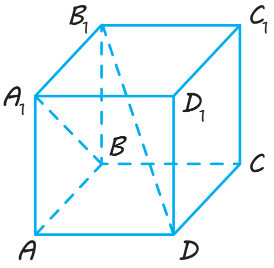


Рис. 22.8

22.4.° У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра AA_1, N — така точка ребра CC_1, що $C_1N:NC=1:2$. Знайдіть кут між прямою MN і діагоналлю D_1B.

22.5. Усі грані паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромби, що дорівнюють один одному, $AB=a$, $\angle BAD_1=60°$. Знайдіть довжини діагоналей AC_1 і BD_1.

22.6. Точки K, L, M, N — відповідно середини ребер AB, BC, CD і AD тетраедра $ABCD$. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників AML і CNK збігаються.

Вказівка. Щоб довести, що точки E і F збігаються, достатньо довести, що для довільної точки O вектори $\overrightarrow{OE}$ і $\overrightarrow{OF}$ збігаються.

22.7. У тетраедрі $ABCD$ ребра AB і CD, BC і AD взаємно перпендикулярні. Доведіть, що ребра AC і BD також перпендикулярні.

22.8. За допомогою векторів доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.

22.9. За допомогою векторів доведіть теорему про три перпендикуляри.

22.10. В основі тетраедра $ABCD$ лежить прямокутний трикутник ABC, у якому $\angle ACB=90°$, $AC=3$, $BC=4$. Ребро AD перпендикулярне до площини ABC і дорівнює 4. Знайдіть кут між прямими AC і BD.

22.11. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F, P, Q — середини ребер DD_1, BC, AA_1 і B_1C_1 відповідно. Знайдіть кут між прямими EF і PQ.

22.12. Дано тетраедр $ABCD$ з прямими плоскими кутами при вершині D. Точки M і N — середини ребер AB і CD відповідно. Знайдіть кут між прямими AN і DM, якщо $DA = DB = 1$ і $DC = 2$.

22.13. У тетраедрі $ABCD$ ребро AD перпендикулярне до грані ABC, $AD = a$, $AB = b$, $\angle BAC = 45°$. Знайдіть кут між прямими AC і BD.

22.14. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ усі бічні грані є квадратами. Знайдіть кут між прямими:

1) AC_1 і BA_1;
2) AC_1 і CB_1;
3) BA_1 і CB_1.

22.15.* Знайдіть косинус кута між прямими, які містять мимобіжні медіани двох граней правильного тетраедра (рис. 22.9).

22.16.* У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$, усі ребра якої дорівнюють одне одному, точки E і F — середини ребер SB і SC відповідно. Знайдіть косинус кута між прямими AE і BF

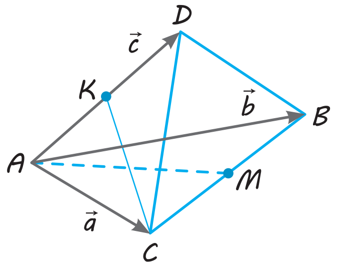


Рис. 22.9

Виявіть свою компетентність

22.17. Повторіть навчальний матеріал щодо застосування координатного та векторного методів розв’язування геометричних задач (за посиланням interactive.ranok.com.ua). Якими методами, на вашу думку, доцільніше розв’язувати вправи, запропоновані до цього параграфа?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 4

Пройдіть онлайн-тестування

1. Яка з точок $A(6;3;0)$, $B(0;7;-6)$, $C(-8;0;9)$ належить координатній площині yOz?

А Точка A **Б** Точка B **В** Точка C **Г** Жодна з даних точок

2. Яка із заданих точок належить осі Oz?

А $A(3;0;0)$ **Б** $B(0;0;-5)$ **В** $C(0;-4;0)$ **Г** $D(2;3;0)$

3. Відносно якої з даних точок симетричні точки $A(8;-5;3)$ і $B(0;1;-9)$?

А $C(8;-4;-6)$ **Б** $D(4;-3;6)$ **В** $E(-8;6;-12)$ **Г** $F(4;-2;-3)$

4. Точка M — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо $A(1;2;5)$, $M(4;0;-3)$.

А $B(3;-2;-8)$ **Б** $B(-3;2;8)$ **В** $B(-7;2;11)$ **Г** $B(7;-2;-11)$

5. Знайдіть довжину відрізка AC, якщо $A(4;-3;1)$, $C(8;1;3)$.

А 36 **Б** $2\sqrt{6}$ **В** 6 **Г** $4\sqrt{6}$

6. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{DC}$, якщо $C(11;-7;5)$, $D(13;2;-4)$.

А $\overrightarrow{DC}(2;9;-9)$ **В** $\overrightarrow{DC}(24;-5;1)$

Б $\overrightarrow{DC}(-2;-9;9)$ **Г** $\overrightarrow{DC}(-2;-9;1)$

7. Дано точки $A(2;1;4)$, $B(4;2;6)$, $C(3;-2;1)$ і $D(7;0;5)$. Яка з рівностей є правильною?

А $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ **Б** $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$ **В** $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$ **Г** $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

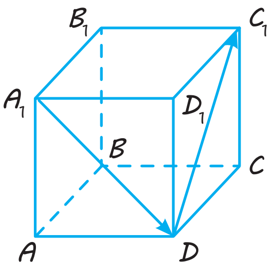
8. Знайдіть значення λ, при якому вектори $\vec{a}(3;2-\lambda;5)$ і $\vec{b}(3;2\lambda+8;5)$ рівні?

А 4 **Б** 2 **В** −2 **Г** −4

9. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}(-3;7;1)$.

А 11 **Б** 59 **В** $\sqrt{59}$ **Г** 5

10. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, зображеного на рисунку, дорівнює 4. Знайдіть довжину суми векторів $\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{DC_1}$.



А 4 **Б** $4\sqrt{2}$ **В** 8 **Г** $4\sqrt{3}$

11. Який із даних векторів колінеарний вектору $\vec{a}(12;-16;20)$?

А $\vec{b}(6;8;10)$ **В** $\vec{d}(6;-8;10)$

Б $\vec{c}(24;-32;-40)$ **Г** $\vec{e}(-24;32;40)$

12. У прямокутній системі координат у просторі задано точки $O(0;0;0)$ і $A(3;4;5)$. Із точки A на вісь Oz проведено перпендикуляр. Точка B — основа цього перпендикуляра. Установіть відповідність між величинами (1–4) та їхніми числовими значеннями (А–Д).

Величина	*Числове значення*
1 довжина вектора OA	**А** 0
2 відстань від точки A до площини xOz	**Б** $5\sqrt{2}$
3 абсциса точки B	**В** 3
4 довжина відрізка AB	**Г** 4
	Д 5

13. У прямокутній системі координат у просторі задано сферу з центром у початку координат, якій належить точка $A(0;0;-3)$. Яка з наведених точок також належить цій сфері?

А $B(1;1;-1)$ **В** $C(2;0;1)$

Б $B(0;1;2\sqrt{2})$ **Г** $D(3;-3;0)$

14. При якому значенні m вектори $\vec{a}(2; m; 5)$ і $\vec{b}(-4; 6; 2m)$ перпендикулярні?

А $-\frac{1}{2}$ **Б** -2 **В** 2 **Г** $\frac{1}{2}$

15. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}(-2; 0; 2)$ і $\vec{b}(0; 2; 2)$.

А 60° **Б** 120° **В** 45° **Г** 135°

16. Укажіть рівняння площини, паралельної площині $2x-5y+3z-7=0$.

А $4x+10y+6z+9=0$ **В** $10x-25y-15z-1=0$

Б $6x-15y+9z+13=0$ **Г** $4x-10y+3z-7=0$

17. Укажіть рівняння площини, перпендикулярної до площини $3x+2y-4z+5=0$.

А $4x-3y+z+9=0$ **В** $2x-4y-5z-1=0$

Б $3x-5y+2z+13=0$ **Г** $2x+3y+3z-7=0$

Теми навчальних проектів

1. Різні системи координат в математиці.
2. Що можна назвати вектором в математиці?
3. Вектори і їх застосування в геометрії і фізиці.
4. Симетрія в природі, техніці й архітектурі.
5. Геометрія в орнаменті.
6. Кругові орнаменти в архітектурі.

Видатні постаті в математиці

М. Ґ. Аньєзі

Н. К. Барі

І. Г. Башмакова

К. Вуазен

Марія Ґаетана Аньєзі (1718–1799) — відома італійка, яка займалася математичними дослідженнями, перша у світі професор математики. Вона вивчала геометрію та балістику, диференціальне й інтегральне числення тощо. Одна з кривих, яку вивчала Аньєзі, отримала її ім’я — «локон Аньєзі».

Ніна Карлівна Барі (1901–1961) була однією з перших жінок, що вчилися на фізико-математичному факультеті Московського університету. Вона досліджувала теорію множин, мала великі заслуги у вивченні тригонометричних рядів. У 1935 р. Н. К. Барі було присуджено ступінь доктора фізико-математичних наук.

Ізабелла Григорівна Башмакова (1921–2005) — дослідниця математичних проблем, доктор фізико-математичних наук, професор, дійсний член Міжнародної академії історії науки. І. Г. Башмакова провела аналіз «Начал» Евкліда, досліджувала доробок Архімеда та Діофанта. Ізабелла Григорівна писала вірші, перед нею завжди стояв вибір між математикою та поезією.

Клер Вуазен (нар. 1962) — французька дослідниця, спеціаліст у галузі комплексної алгебраїчної геометрії, професор Колеж де Франс (це звання вважається одним із найвищих досягнень у французькій вищій освіті), член Французької Академії наук, іноземний член Академії деі Лінчеї (старішої академії наук Італійської республіки) і Національної академії наук США. К. Вуазен у 2016 р. отримала золоту медаль Національного центра наукових досліджень — найвищу наукову нагороду Франції; у 2017 р. стала Лауреатом наукової премії Шао.

М. С. В’язовська

Марина Сергіївна В’язовська (нар. 1984) — народилася в Києві, навчалась у Київському природничо-науковому ліцеї № 145, брала участь у математичних олімпіадах. Потім навчалась на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка, у період 2002–2005 рр. щороку займала призові місця на Міжнародній студентській олімпіаді з математики. Марина В’язовська розв’язала задачу про найщільніше пакування куль (її поставив у 1611 р. німецький учений Й. Кеплер) у 8-вимірному та (у співавторстві) 24-вимірному просторах, за що отримала в 2016 р. премію Салема, а в 2017 р. — премію Математичного інституту Клея.

Ніна Опанасівна Вірченко (нар. 1930) — українська вчена, яка досліджувала математичні проблеми, доктор фізико-математичних наук, професор, академік-секретар відділення математики АН ВШ України, віце-президент АН ВШ, член Українського, Американського, Австралійського, Бельгійського, Единбурзького, Лондонського математичних товариств. Н. О. Вірченко — Заслужений працівник освіти України, авторка понад 500 наукових і науково-методичних праць, зокрема 20 книжок, виданих українською, російською, англійською та японською мовами.

Н. О. Вірченко

Олена Степанівна Дубинчук (1919—1994) народилася на Вінниччині, після закінчення школи навчалася на механіко-математичному факультеті Київського державного університету ім. Т. Г. Шевченка. Потім працювала в школах, з 1951 р. — у Київському державному педагогічному інституті, з 1954 р. — у Науково-дослідному інституті педагогіки УРСР. Олена Степанівна займалася проблемами методики викладання математики в загальноосвітніх школах, професійних навчально-виховних закладах і педагогічних вузах. Вона авторка понад 200 наукових праць, серед яких є підручники, навчальні посібники, збірники задач, тематико-поурочні плани та статті.

О. С. Дубинчук

Софі Жермен (1776—1831) — французька дослідниця, яка займалася проблемами математики, а також філософією та механікою, зробила вагомий внесок у диференціальну геометрію та теорію чисел. Саме про неї написав видатний математик К. Ф. Гаусс: «Жінка через свою стать і наші забобони зустрічається зі значно важчими перешкодами, ніж чоловік, опановуючи складні наукові проблеми. Але коли вона долає ці бар'єри і поринає в таємниці світобудови, вона безумовно виявляє благородну сміливість, винятковий талант і високу геніальність».

Ета Зубер (1933—2002) — американська педагог, математик, одна з двох перших афроамериканок, яким була присуджена ступінь доктора філософії з математики у США. Вона присвятила викладацькій діяльності 37 років життя. Е. Зубер була Почесним членом Асоціації жінок-математиків, у 2001 р. Американська асоціація сприяння розвитку науки удостоїла доктора Е. Зубер Фалконер своєї премії за багаторічні досягнення і життєвий внесок у науку.

Софія Василівна Ковалевська (1850—1891) — математик, письменниця і публіцистка, професор Стокгольмського університету. С. В. Ковалевська — авторка праць із математичного аналізу (диференціальні рівняння і аналітичні функції), механіки й астрономії, перша жінка, яка отримала звання професора математики в Європі.

Ніколь Ель Каруї (нар. 1944) — французька жінка-математик, працює в галузі розвитку фінансової математики. Вона — одна з найдіяльніших математиків, які почали інтенсивно просувати фінансову математику у Франції. Зокрема, курси, які проводить Ель Каруї, вважають найпрестижнішими в цій галузі. Дослідження Ніколь Ель Каруї присвячені моделюванню фінансового ринку та керівництву ризиками.

С. Жермен

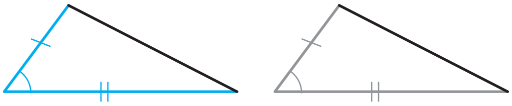
Е. Зубер

С. В. Ковалевська

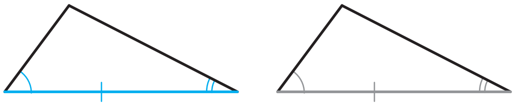
Н. Е. Каруї

ДЕЯКІ ФАКТИ ПЛАНІМЕТРІЇ

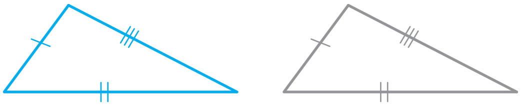
Ознаки рівності трикутників



1. За двома сторонами і кутом між ними

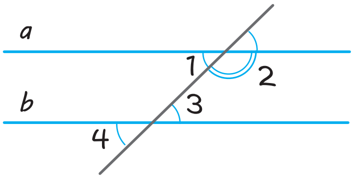


2. За стороною і двома прилеглими до неї кутами.



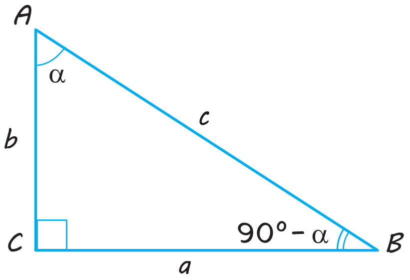
3. За трьома сторонами

Ознаки паралельності прямих | Властивості паралельних прямих



Ознаки паралельності прямих	Властивості паралельних прямих
$a \parallel b$, якщо $\angle 1 = \angle 3$, або $\angle 1 = \angle 4$, або $\angle 2 + \angle 3 = 180°$	Якщо $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$

Співвідношення у прямокутному трикутнику



$$a^2 + b^2 = c^2$$

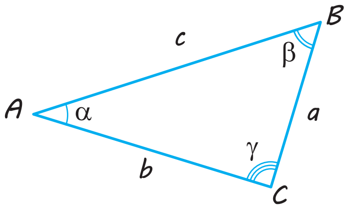
(теорема Піфагора)

$$a = c \sin \alpha$$

$$b = c \cos \alpha$$

$$a = b \operatorname{tg} \alpha$$

Співвідношення у довільному трикутнику



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$ (теорема синусів)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$ (теорема косинусів)

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$ де $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

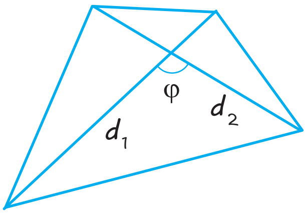
(формула Герона)

Радіус описаного кола $R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{abc}{4S}$

Радіус вписаного кола $r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{S}{p}$

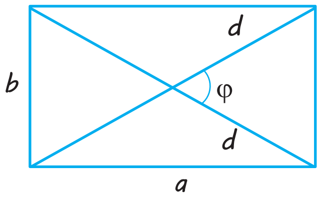
Площа чотирикутника

Довільний чотирикутник



$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$$

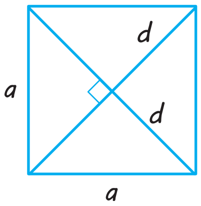
Прямокутник



$$S=ab$$

$$S=\frac{1}{2}d^2\sin\varphi$$

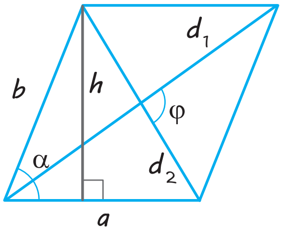
Квадрат



$$S=a^2$$

$$S=\frac{1}{2}d^2$$

Паралелограм

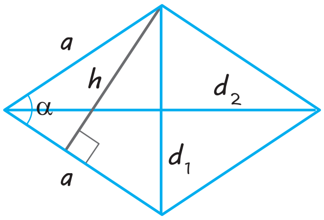


$$S=a\cdot h$$

$$S=ab\sin\alpha$$

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$$

Ромб

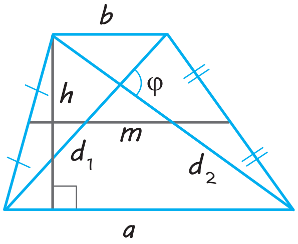


$$S=a\cdot h$$

$$S=a^2\sin\alpha$$

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2$$

Трапеція



$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$$

$$S=m\cdot h,\text{ де }m=\frac{a+b}{2}$$

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$$

Значення тригонометричних функцій деяких кутів

градуси	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
радіани	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не існує	0	не існує

ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ

§ 1

1.2. Так. **1.3.** Так. **1.4.** Одна або безліч. **1.7.** Ні. **1.8.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **1.9.** Безліч. **1.10.** 1) Ні; 2) ні. **1.11.** Ні. **1.12.** Збігаються. **1.15.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **1.16.** 1) Так; 2) так. **1.17.** 1) Ні; 2) так. **1.18.** Ні. **1.20.** Ні, не обов'язково. Одну або три. **1.21.** 1) AA_1 і AB; AB і BB_1 і т. д.; 2) AA_1, A_1D_1, A_1B_1; A_1B_1, BB_1, B_1C_1 і т. д.; 3) площини AA_1B_1B і $A_1B_1C_1D_1$, площини $ABCD$ і AA_1B_1B і т. д.; 4) пло-щини ABD, ABB_1, ADD_1; площини ABC, ABB_1, BCC_1 і т. д. **1.35.** 1; 5; 7; 10; безліч.

§ 2

2.2. Тупокутний. **2.4.** 6; $6\sqrt{3}$; $6\sqrt{3}$. **2.5.** $4{,}25\pi$ см^2. **2.6.** 5. **2.7.** $\sqrt{7}$. **2.8.** $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{3}}$. **2.9.** $10\sqrt{3}$; 60°, 120°, 60°, 120°. **2.10.** 10 см. **2.11.** 8 см і 15 см. **2.12.** 87 см^2. **2.13.** 156 см^2. **2.14.** 9 см і 25 см. **2.15.** $\dfrac{2ab}{a+b}$. **2.16.** 2 см, 3 см і 5 см. **2.17.** $25\sqrt{2}$ см^2. **2.19.** 100 см^2. **2.23.** $42{,}5\pi$. **2.24.** $10\sqrt{3}$. **2.25.** 14,4. **2.26.** $a\sqrt{3}$. **2.27.** $4\sqrt{3}$. **2.28.** 150. **2.29.** 17. Точка O розташована зовні квадрата. **2.30.** $3\sqrt{2}-3$.

§ 3

3.1. 1) Точка C; 2) пряма CC_1. **3.2.** 1) Точка B; 2) пряма BC. **3.8.** Ні. **3.16.** $3\sqrt{3}$. **3.17.** $5\sqrt{2}$.

Тест № 1. **1.** Б. **2.** В. **3.** В. **4.** Б. **5.** Б. **6.** Г. **7.** В. **8.** А. **9.** Г. **10.** Б. **11.** А. **12.** В.

§ 4

4.1. 1) AB і A_1D_1; AB і CC_1 і т. д. 2) AB і CC_1; AB і B_1C_1 і т. д.; 3) AS і DC; SB і DC і т. д. **4.2.** Прямі можуть перетинатися або бути мимобіжними. **4.3.** Ні. **4.4.** Ні. **4.8.** Не завжди. **4.9.** 1) Три; 2) п'ятнадцять; 3) $3C_n^4 = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$. **4.10.** 1) AB і CD; AA_1

і BB_1 і т. д.; 2) AB і A_1B_1; AA_1 і BB_1 і т. д.; 3) AB і CD; BC і AD. **4.13.** Ні. **4.15.** Ні. **4.17.** 1) 4 м; 2) 3 дм; 3) $\frac{a+b}{2}$. **4.18.** 1) 1 м; 2) 0,5 дм; 3) $\left|\frac{a-b}{2}\right|$. **4.19.** 5 см.

§ 5

5.1. 1) DCC_1D_1, $A_1B_1C_1D_1$; 2) $ABCD$, BCC_1B_1; 3) ADD_1A_1, ABB_1A_1. **5.2.** AD і BC мають спільну точку з площиною α; $DC \parallel \alpha$. **5.4.** Ні. **5.5.** Ні. **5.8.** Безліч. **5.9.** Безліч. **5.13.** 1) 12 см; 2) 4 см; 3) 4 см.

§ 6

6.1. 1) $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 і DCC_1D_1 і т. д.; 2) ABC і $A_1B_1C_1$. **6.2.** 1) Ні; 2) так, три пари. **6.3.** Ні. **6.4.** Ні. **6.5.** Так. **6.6.** Так. **6.7.** Ні. Якщо пряма паралельна площині. **6.8.** Ні. **6.10.** Не завжди. **6.14.** Третя площина або перетинає дві дані площини, або паралельна їм. **6.16.** Три площини можуть мати спільну точку, або спільну пряму, або перетинатися по трьох різних прямих. **6.21.** a. **6.26.** 30 см, 45 см. **6.27.** 20 см, 30 см.

§ 7

7.1. Відрізок або трикутник. **7.2.** 1) Так; 2) так; 3) так. **7.3.** 1) Відрізок або паралелограм; 2) відрізок або паралелограм; 3) відрізок або трапеція. **7.4.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) ні. **7.5.** Ні. Твердження виконується, якщо площина проекцій паралельна площині ромба. **7.6.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **7.7.** Провести медіани цього трикутника. **7.8.** Провести середні лінії цього трикутника. **7.9.** Ні. **7.10.** Так. **7.11.** Наприклад, паралельність протилежних сторін зберігається; рівність сусідніх сторін не зберігається. **7.12.** Наприклад, паралельність протилежних сторін зберігається. **7.17.** 1) 6 см; 2) $\frac{a+b+c}{3}$. **7.19.** 3,5.

§ 8

8.1. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) ні. **8.2.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так; 5) ні; 6) ні. **8.3.** 1) Так; 2) ні. **8.4.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **8.5.** Ромбом. **8.6.** Паралелограм (точніше прямокутник).

8.7. П’ятикутник. 8.8. Трапеція. 8.12. Трикутник, чотирикутник, п’ятикутник. 8.13. Так. 8.23. 1) $\frac{9a^2}{8}$; 2) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Тест № 2. 1. В. 2. Г. 3. В. 4. Г. 5. А. 6. В. 7. А. 8. Б. 9. А. 10. В. 11. Б. 12. В. 13. В. 14. Б. 15. Г. 16. Г. 17. А. 18. В.

§ 9

9.1. 1) 90°; 2) 60°. 9.2. 45°. 9.3. 60°. 9.4. Безліч. 9.5. Одну. 9.6. Безліч. 9.8. 1) 90°; 2) 0°; 3) 90°. 9.9. 1) 45°; 2) 60°. 9.10. 60°. 9.11. 60°, 60°, 60°. 9.12. 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{a^2-b^2+d^2}$. 9.13. 90°. 9.14. Прямі b і c мимобіжні або перетинаються, кут між ними дорівнює 90°. 9.15. Прямі b і c мимобіжні або перетинаються, кут між ними дорівнює 30°. 9.18. 60°. 9.20. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. 9.22. $\sqrt{3}a$.

§ 10

10.1. Ні. 10.2. Якщо прямі перпендикулярні (перетинаються або мимобіжні). 10.3. Пряма перпендикулярна до площини трикутника. 10.4. 1) Ні; 2) так. 10.5. Перпендикулярні. 10.6. Так. 10.17. 5 м. 10.18. $\approx 7{,}8$ м. 10.19. 9 м. 10.20. Довжина перпендикуляра $\sqrt{2a^2-b^2}$, довжина сторони квадрата $\sqrt{b^2-a^2}$. 10.21. Довжина перпендикуляра $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, довжини сторін прямокутника $\sqrt{c^2-b^2}$ і $\sqrt{c^2-a^2}$. 10.22. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. 10.23. $\sqrt{a^2-b^2}$. 10.24. $KA=KB=20$ см; $DA=DB=32$ см. 10.26. Так.

§ 11

11.1. Проекція діагоналі A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на грань $ABCD$ — AC, на грань ADD_1A_1 — A_1D, на грань AA_1B_1B — A_1B, на грань BB_1C_1C — B_1C, на грань DD_1C_1C — D_1C, на грань $A_1B_1C_1D_1$ — A_1C_1. 11.2. $SA<SB=SD<SC$. 11.3. Найбільший відрізок SB, найменший — SA. 11.4. 40 см. 11.5. 16 см. 11.6. 9 см. 11.7. $AD=6$ см, довжина проекції AD на площину α дорівнює 4,8 см. 11.9. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 11.10. 6,5 м. 11.11. $\frac{\sqrt{4a^2-2b^2}}{2}$. 11.12. 6 см і 15 см. 11.13. 1) 15 см

і 41 см; 2) 4 см і 8 см. **11.14.** 9 см. **11.16.** $3\sqrt{41}$ см. **11.17.** 8 см і $2\sqrt{66}$ см. **11.18.** Так. **11.19.** Так. **11.22.** 2 см. **11.25.** 24 см. **11.26.** $6\sqrt{3}$ см. **11.27.** 20 см. **11.28.** 13 см. **11.29.** 7 см, 7 см, 9 см, 9 см. **11.33.** 5 см, 27 см, 31 см, 53 см (залежно від розміщення вершин паралелограма відносно площини).

§ 12

12.1. 1) $\angle B_1AB$; 2) $\angle AB_1A_1$; 3) $\angle D_1AB_1$; 4) $\angle AB_1B$; 5) $\angle D_1BD$; 6) $\angle D_1BB_1$; 7) $\angle B_1CB$; 8) $\angle B_1CC_1$. **12.2.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **12.3.** 1) $2d$; 2) $d\sqrt{2}$; 3) $\frac{2d}{\sqrt{3}}$. **12.5.** Коло. **12.7.** Ні. 45°. **12.10.** Не обов'язково. **12.11.** Паралельні або перетинаються. **12.12.** 30°. **12.13.** 30°. **12.14.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}=\operatorname{arcctg}\sqrt{2}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **12.16.** 45°. **12.17.** 30°. **12.18.** $a\sqrt{2}$. **12.19.** a. **12.20.** 30°. **12.21.** Кут нахилу висоти, проведеної на основу трикутника, до площини α. **12.23.** $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta$.

§ 13

13.1. Прямий. **13.2.** $\angle ACP$. **13.3.** $\angle OCB$. **13.4.** Так. **13.5.** $\angle MBC$. **13.6.** $2a$. **13.7.** 45°. **13.8.** 3,36 м. **13.9.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **13.10.** $\frac{a}{2}$. **13.12.** 30°. **13.13.** 1) $\frac{1}{14}$; 2) $\frac{2}{31}$. **13.14.** 13 м. **13.15.** 60°. **13.16.** 1) $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha+c^2}$; 2) 60°. **13.17.** 1) $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$; 2) $2a^2$. **13.18.** 1) 60°; 2) $\operatorname{tg}\varphi=2$. **13.19.** 45°.

§ 14

14.1. Ні. **14.2.** Перетинаються (зокрема, перпендикулярні), паралельні, мимобіжні (зокрема, перпендикулярні). **14.3.** Ні. **14.4.** Ні. **14.5.** Ні. **14.6.** Ні. **14.7.** Так. **14.8.** Безліч або одну. **14.11.** Безліч. **14.12.** 1) 90°; 2) 60°. **14.13.** Так. **14.14.** Так. **14.15.** Ні. **14.17.** 1) 11 м; 2) 13 м; 3) 8 м; 4) 7 м; 5) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 6) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **14.18.** $\sqrt{a^2+b^2}$.

14.19. 1,3 м. **14.20.** 1,7 м. **14.21.** 1) 45°; 2) $\cos\varphi = 0{,}2$. **14.22.** $a\sqrt{\cos 2\varphi}$. **14.23.** 1) $4\sqrt{73}$; 2) 12. **14.24.** 1) $\sqrt{30}$; 2) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{15}}{10}$. **14.25.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **14.26.** $8\left(1+\sqrt{3}\right)$ та $16\sqrt{2}$.

§ 15

15.1. Ні. **15.2.** Наприклад, куля. **15.3.** Відрізок, що дорівнює другій діагоналі. **15.4.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **15.5.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **15.6.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **15.7.** 1) Так; 2) ні. **15.8.** Ні. **15.9.** 1) Так; 2) так; 3) так. **15.10.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **15.11.** Прямокутником, що дорівнює основі. **15.12.** 10 см^2. **15.13.** 1) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{3a^2}{8}$; $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **15.14.** 1) 30°; 2) 0°. **15.15.** $\arccos\frac{b^2\sin\alpha}{a^2}$. **15.17.** $\frac{1}{3}$. **15.19.** $\frac{1}{2}a^2$. **15.20.** Правильний шестикутник. **15.21.** $a^2\sqrt{3}$. **15.25.** $\frac{2\sqrt{3a}}{3}$. **15.26.** 72 см або 90 см. **15.27.** $\frac{7a^2}{8\cos\varphi}$. **15.28.** $2\sqrt{m^2+2a^2}$. **15.29.** Ромб; $DD_1 = 6$; $P = 20$; $S = 4\sqrt{34}$.

§ 16

16.1. 30°. **16.2.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **16.3.** a. **16.4.** 1) a; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **16.5.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **16.6.** $\sqrt{b^2-a^2}$. **16.7.** 1) 4,25 см; 2) 6,75 см; 3) $\frac{a+b}{2}$. **16.8.** 1) 1,05 см; 2) 0,65 см; 3) $\left|\frac{a-b}{2}\right|$. **16.10.** 6 м. **16.11.** $\frac{a}{2}$. **16.12.** 5 м і 3 м. **16.13.** $\sqrt{c^2+b^2-a^2}$. **16.17.** 1) a; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 3) a; 4) a; 5) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **16.18.** $a\sin\alpha$. **16.19.** Площина, яка паралельна даним площинам і лежить між ними на відстані, що дорівнює половині відстані між даними площинами. **16.20.** $\frac{\sqrt{4h^2+2a^2}}{2}$. **16.21.** $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$. **16.22.** $\arccos\frac{a}{\sqrt{3}b}$. **16.23.** C — точка перетину відрізка AB_1, де B_1 — точка, яка лежить на промені BO ($BO \perp \alpha$ і $O \in a$), причому $BO = BO_1$. **16.24.** $\sqrt{2}$ м. **16.25.** $2\sqrt{2}$ м. **16.26.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **16.27.** $\sqrt{a^2-\frac{d^2}{8}}$.

16.28. 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні. **16.30.** $\sqrt{23}$ м. **16.31.** 10. **16.32.** 5 або 9. **16.33.** 90°. **16.34.** 8, 8, 8. **16.35.** 4, 4, 4, 8. **16.36.** 1) Мимобіжні; 2) паралельні; 3) 5. **16.37.** 1) $3\sqrt{7}$; 2) $3\sqrt{3}$. **16.40.** 0,36 м або 0,44 м. **16.41.** 0,06 м або 0,26 м. **16.42.** $\frac{an}{m+n}$ або $\frac{am}{m+n}$. **16.43.** $\sqrt{2b^2-a^2}$. **16.44.** 4 м. **16.45.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) a; 3) a; 4) a; 5) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$; 6) a; 7) $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **16.46.** $4\frac{8}{13}$. **16.47.** $2\sqrt{3}$. **16.49.** $\frac{a\sqrt{30}}{8}$. **16.50.** 12.

§ 17

17.1. Коло. **17.2.** Дві площини, які паралельні даній площині і розташовані на відстані h від неї. **17.3.** Площина, яка паралельна даним площинам і лежить посередині між ними. **17.4.** Пряма, яка перпендикулярна до площини трикутника і проходить через центр кола, вписаного в даний трикутник. **17.6.** Площина, яка паралельна даній площині і розташована від неї на відстані, що дорівнює половині відстані від даної точки до даної площини. **17.7.** Площина, яка перпендикулярна до даної прямої і проходить через дану на ній точку.

Тест № 3. **1.** А. **2.** В. **3.** В. **4.** Г. **5.** В. **6.** Б. **7.** В. **8.** Б. **9.** А. **10.** Б. **11.** А. **12.** Г. **13.** Б. **14.** В. **15.** Г. **16.** А. **17.** В. **18.** А.

§ 18

18.8. 1) Площина, яка паралельна площині yOz і проходить через точку $(1;0;0)$; 2) пряма, яка паралельна осі Oz і проходить через точку $(1;1;0)$. **18.14.** Правильний. **18.15.** $C(0;0;0)$. **18.19.** $B(0-1;3)$. **18.23.** $(-0{,}25;0{,}25;0)$. **18.24.** $(-2;-2;-2)$, $(2;2;2)$. **18.30.** 1) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5$; 2) $(x-1)^2+(y-2)^2\ +(z+1)^2=8$; 3) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5$.

§ 19

19.2. 1) $(1;-6;-5)$, $\sqrt{62}$; 2) $(3;-1;2)$, $\sqrt{14}$; 3) $(5;-2;-2)$, $\sqrt{33}$; 4) $(4;2;-9)$, $\sqrt{101}$; 6) $(-2;-3;5)$, $\sqrt{38}$. **19.3.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **19.4.** $(-3;2;-2)$. **19.5.** $(3;2-4)$. **19.6.** 1) $\overrightarrow{AB_1}$; 2) $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AD_1}$; 4) $\overrightarrow{AD}$. **19.9.** $m=1$, $n=10$. **19.10.** $(-0{,}6;-1;0{,}2)$. **19.11.** $(5;-2;-1)$. **19.12.** 1) $(-5;10;-1)$; 2) $(3;-4;4)$. **19.13.** 1) 20; 2) −8; 3) 3; 4) −10.

19.14. 1) Плюс; 2) мінус. **19.15.** 1) Прямий; 2) гострий; 3) тупий. **19.16.** 1) -12; 2) 0; 3) 0; 5; 4) -2; 1. **19.17.** $(0;0;-3)$. **19.18.** $\frac{4}{13}$. **19.19.** $\frac{\sqrt{30}}{15}$. **19.20.** 2. **19.21.** 1) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\pi}{2}$. **19.22.** 1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{c}$; 3) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; 4) $\vec{a}+\vec{b}+0{,}5\vec{c}$; 5) $\vec{a}+\vec{b}-0{,}5\vec{c}$; 6) $\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$. **19.23.** ≈ 52 с.

§ 20

20.2. Так. **20.4.** Так. **20.6.** 1) 3; 2) 9. **20.8.** 1) 3; 2) 9. **20.11.** 1) 7; 2) 7. **20.12.** 1) 3; 2) 4. **20.13.** 1) 3; 2) 3. **20.31.** 1) $(2;-7;-3)$, $(2;7;3)$, $(-2;-7;3)$; 2) $(-3;4;-1)$, $(-3;-4;1)$ $(3;4;1)$; 3) $(5;-3;-7)$, $(5;3;7)$, $(-5;-3;7)$. **20.32.** 1) $(-2;7;-3)$; 2) $(3;-4;-1)$; 3) $(-5;3;-7)$. **20.33.** $a=-1$, $b=-2$, $c=5$. **20.34.** $(2;-4;-1)$.

§ 21

21.1. 1) $z=0$; 2) $y=0$; 3) $x=0$. **21.2.** Точка B. **21.3.** $(6;0;0)$; $(0;2;0)$; $(0;0;-1{,}2)$. **21.4.** $4x+2y-z+3=0$. **21.5.** $2x-5y-3z-38=0$. **21.6.** 1) $x+y+z-1=0$; 2) $x+4y+3z-5=0$. **21.7.** Ні. **21.8.** 1) $y+2=0$; 2) $y-2=0$; 3) $x+y-3=0$. **21.9.** $x+y+z-7=0$ і $3x+3y+3z+7=0$; $2x+6y-4z=0$ і $-x-3y+2z+1=0$. **21.10.** 1) $3x+2y-z-8=0$; 2) $x-4y+3z+10=0$. **21.11.** $x+y+z-1=0$ і $5x-3y-2z+3=0$. **21.12.** 1) $\frac{2\sqrt{154}}{77}$; 2) $\frac{9\sqrt{39}}{78}$; 3) $\frac{\sqrt{42}}{21}$; 4) $\frac{8}{3\sqrt{14}}$. **21.14.** 1) 2; 2) $\frac{6\sqrt{14}}{7}$. **21.15.** 1) $(0;0;0)$, $R=2$; 2) $(0;1;0)$, $R=\sqrt{3}$; 3) $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$, $R=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **21.16.** $2\frac{3}{13}$. **21.17.** $\frac{41}{\sqrt{261}}$.

§ 22

22.1. 1) Паралелограм; 2) трапеція. **22.3.** 90°. **22.4.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{219}}$. **22.10.** $\arccos\frac{3}{\sqrt{41}}$. **22.11.** $\arccos\frac{1}{3}$. **22.12.** 60°. **22.13.** $\arccos\frac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$. **22.14.** 1) $\arccos\frac{1}{4}$; 2) $\arccos\frac{1}{4}$; 3) $\arccos\frac{1}{4}$. **22.15.** $\frac{2}{3}$. **22.16.** $\frac{1}{3}$.

Тест № 4. **1.** Б. **2.** Б. **3.** Г. **4.** Г. **5.** В. **6.** Б. **7.** Г. **8.** В. **9.** В. **10.** Б. **11.** В. **12.** 1–Б, 2–Г, 3–А, 4–Д. **13.** Б. **14.** Г. **15.** А. **16.** Б. **17.** Г.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Розділ 1. Вступ до стереометрії

Розділ 2. Паралельність прямих і площин у просторі

Розділ 3. Перпендикулярність прямих і площин у просторі

Розділ 4. Координати, вектори, геометричні перетворення в просторі

Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім’я учня / учениці	Навчальний рік	Стан підручника	
			на початку року	в кінці року
1				
2				
3				
4				
5				

Навчальне видання

НЕЛІН Євген Петрович

«ГЕОМЕТРІЯ (ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ)»
підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Редактор *О. В. Костіна*. Технічний редактор *А. В. Пліско.* Художнє оформлення *В. І. Труфен.*
Комп’ютерна верстка *О. М. Правдюк.* Коректор *Н. В. Красна.*

В оформленні підручника використані зображення,
розміщені в мережі Інтернет для вільного використання

Підписано до друку 16.07.2018. Формат 84×108/16. Папір офсетний. Гарнітура Шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 25,2. Обл.-вид. арк. 24,2.
Тираж 7382 прим. Зам. № 5207-2018.

ТОВ Видавництво «Ранок»,
вул. Кібальчича, 27, к. 135, Харків, 61071.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 5215 від 22.09.2016.
Адреса редакції: вул. Космічна, 21а, Харків, 61145.
E-mail: office@ranok.com.ua. Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.

Надруковано у друкарні ТОВ «ТРІАДА-ПАК»,
пров. Сімферопольський, 6, Харків, 61052.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 5340 від 15.05.2017.
Тел. +38 (057) 703-12-21. E-mail: sale@triada.kharkov.ua

ГЕОМЕТРІЯ 10

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

Особливості підручника:

- узагальнюючі таблиці в кожному параграфі
- приклади розв’язування завдань з коментарями
- різнорівневі запитання і вправи
- завдання, які сприяють формуванню й розвитку предметних і ключових компетентностей

Інтернет-підтримка дозволить:

- здійснити онлайн-тестування за кожною темою
- детальніше ознайомитися з навчальним матеріалом
- дізнатися про досягнення видатних учених України та світу

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

22952530

ISBN 978-617-09-4358-3
9 786170 943583

Інтернет-підтримка
interactive.ranok.com.ua