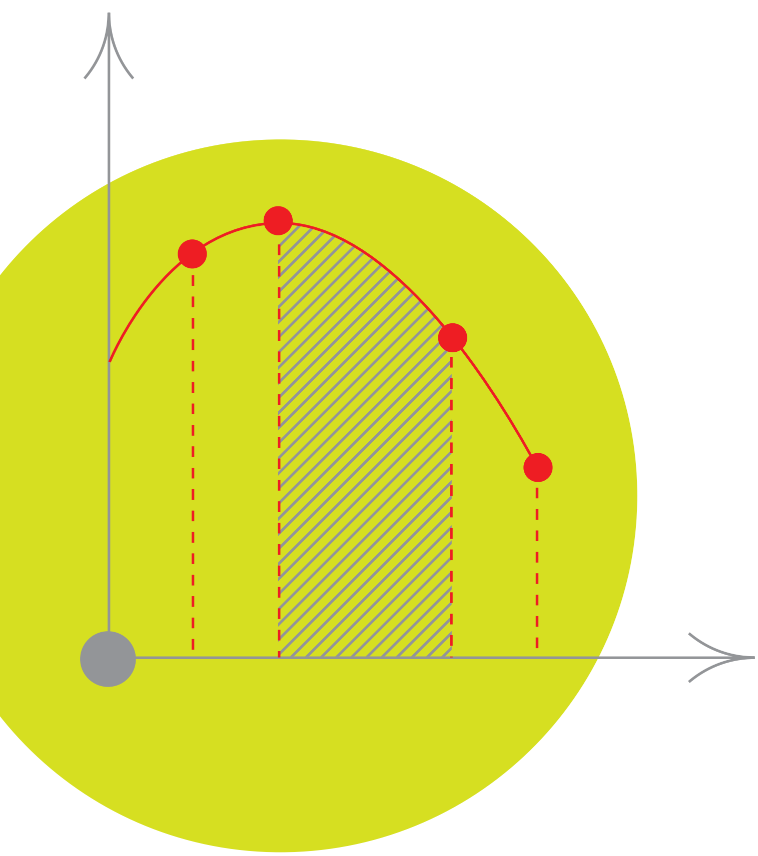
Видавництво
РАНОК

11

Євген Нелін
Оксана Долгова

Алгебра і початки аналізу

Профільний рівень



Інтернет-підтримка

Євген Нелін
Оксана Долгова

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

ПІДРУЧНИК ДЛЯ 11 КЛАСУ
ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

РЕКОМЕНДОВАНО
МІНІСТЕРСТВОМ ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВ
ВИДАВНИЦТВО «РАНОК»
2019

УДК 37.016:512(075.3)
Н49

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 12.04.2019 № 472)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Нелін Є. П.

Н49 Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2019. — 240 с.

ISBN 978-617-09-5232-5

УДК 37.016:512(075.3)

Інтернет-підтримка
Електронні матеріали
до підручника розміщено на сайті
interactive.ranok.com.ua

ISBN 978-617-09-5232-5

Шановні одинадцятикласники і одинадцятикласниці!

У цьому навчальному році ви продовжуєте вивчати предмет «Алгебра і початки аналізу».

Ви вже знаєте методи розв'язування рівнянь і нерівностей, вмієте досліджувати функції, зокрема за допомогою похідної. В 11 класі ви познайомитеся з новими видами функцій — показниковою і логарифмічною, відповідними рівняннями й нерівностями, а також принципово новим поняттям — інтегралом, навчитеся застосовувати його до розв'язування задач, більшість із яких виникла внаслідок практичної діяльності людини.

У 9 класі ви починали знайомитися з основами комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики. Цього року ви поглибите свої знання в цій галузі, навчитеся користуватися відповідними інструментами цієї науки, усвідомите її значення в житті сучасної людини.

Сподіваємося, ви отримаєте задоволення, опановуючи курс «Алгебра і початки аналізу», а набутий досвід допоможе вам успішно впоратися з багатьма задачами, які постануть перед вами в дорослому житті.

Бажаємо вам успіхів!

Як користуватися підручником

Підручник має чотири розділи, кожний із яких складається з параграфів, деякі параграфи — з пунктів. Параграфи і пункти, як правило, містять такі структурні блоки.

Довідкові таблиці наведені на початку більшості параграфів (пунктів) і вміщують основні означення, ознаки та властивості розглядуваних понять теми, систематизацію теоретичного матеріалу та *способів діяльності* з цим матеріалом у формі спеціальних *орієнтирів із розв'язування завдань*. Радимо опрацювати цей матеріал у першу чергу, а вже після цього переходити до наступного блоку.

Пояснення й обґрунтування містять докладне викладення теоретичного матеріалу, наведеного в таблицях. Таке подання навчального матеріалу (спочатку структурованого у вигляді таблиць, а потім описаного детально) дозволить кожному з вас вибирати свій власний рівень ознайомлення з обґрунтуваннями, будуючи власну освітню траєкторію.

Приклади розв'язування завдань ознайомлять вас із основними ідеями щодо розв'язування завдань, допоможуть усвідомити й засвоїти способи дій з основними алгебраїчними поняттями, набути необхідних предметних компетентностей. Для того щоб виділити орієнтовні основи діяльності з розв'язування завдань (загальні орієнтири), у прикладах власне розв'язання супроводжуються коментарями, які допоможуть вам скласти план розв'язування аналогічних завдань.

Розв'язання	Коментар
Як можна записати розв'язання завдання	Як можна міркувати під час розв'язування такого завдання

За такого подання коментар не заважає сприйняттю основної ідеї розв'язування завдань певного типу і дає змогу за потреби отримати детальну консультацію щодо розв'язування, яка міститься в коментарі.

З метою закріплення, контролю і самооцінювання засвоєння навчального матеріалу наприкінці кожного параграфа запропоновано систему запитань і вправ.

Запитання допоможуть вам пригадати й осмислити вивчене, звернути увагу на головне в параграфі, оцінити рівень засвоєння теоретичного матеріалу параграфа.

Вправи подано за трьома рівнями складності:

- *завдання середнього рівня* мають позначку «°»;
- *завдання достатнього рівня* (дещо складніші) подано без позначки;
- *завдання високого рівня* мають позначку «*».

До більшості вправ наприкінці підручника наведено *відповіді*.

У рубриці **«Виявіть свою компетентність»** наведено задачі практичного змісту та завдання, які для отримання розв'язку вимагають аналізу, узагальнення, систематизації набутих знань.

Зверніть також увагу на запропоновані в тексті параграфів супроводжуючі запитання, що спонукають до більш глибокого самостійного осмислення навчального матеріалу, та завдання, виконання яких, на нашу думку, сприятиме формуванню певних предметних і ключових компетентностей. Ці запитання та завдання мають відповідні позначення.

Матеріали рубрики **«Відомості з історії»** допоможуть вам дослідити розвиток математики як науки та дізнатися про досягнення видатних учених України та світу від давнини до сьогодення.

Інтернет-підтримка підручника дозволить здійснити онлайн-тестування за кожною темою на сайті *interactive.ranok.com.ua*, а також детальніше ознайомитися з навчальним матеріалом.

Для того щоб підручник допоміг вам у повній мірі, радимо ознайомитися із системою умовних позначень:

- ● початок обґрунтування твердження;
- ○ закінчення обґрунтування твердження;
- ▶ початок розв'язання задачі;
- ◁ закінчення розв'язання задачі;
- ? запитання до учнів;
- i матеріали, пов'язані з ІКТ та інтернет-підтримкою підручника;
- завдання, які вимагають самостійного опрацювання, сприяють активізації розумової діяльності;
- діяльність, розрахована на роботу в команді.

Розділ 1

ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ознайомитеся з поняттям логарифма та властивостями логарифмів;
- дізнаєтеся про показникову і логарифмічну функції, їхні властивості та графіки;
- ознайомитеся з формулами похідних цих функцій;
- навчитеся будувати графіки показникових і логарифмічних функцій, досліджувати їхні властивості та розв’язувати показникові і логарифмічні рівняння й нерівності, зокрема з параметрами

§ 1 УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ СТЕПЕНЯ. СТЕПІНЬ ІЗ ДІЙСНИМ ПОКАЗНИКОМ

Таблиця 1

1. Степінь із натуральним і цілим показниками

$\boxed{a^1 = a}$ $\qquad$ $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}}$ $\quad a \in \boldsymbol{R},\ n \in \boldsymbol{N} \quad (n \geqslant 2)$

$\boxed{a^0 = 1}$ $\quad a \neq 0$ $\qquad$ $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ $\quad a \neq 0,\ n \in \boldsymbol{N}$

2. Степінь із дробовим показником

$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$ $\quad a \geqslant 0$ $\qquad$ $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ $\quad a > 0,\ n \in \boldsymbol{N} \quad (n \geqslant 2),\ m \in \boldsymbol{Z}$

3. Властивості степенів

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$
$$1^s = 1$$
$$0^r = 0,\ r > 0$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Вам уже відомі поняття степенів із натуральним, цілим і дробовим показниками та властивості цих степенів (див. табл. 1). Покажемо, як можна ввести поняття степеня з ірраціональним показником.

Опишемо в загальних рисах, як можна означити число a^α для ірраціональних α, коли $a > 1$. Наприклад, пояснимо, як можна розуміти значення степеня $2^{\sqrt{3}}$.

Ірраціональне число $\sqrt{3}$ можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу $\sqrt{3} = 1{,}732\,050\,8075\ldots$. Розглянемо десяткові наближення числа $\sqrt{3}$ з недостачею і надлишком:

$$1 < \sqrt{3} < 2;$$
$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8;$$
$$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74;$$
$$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733;$$
$$1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321;$$
$$1{,}732\,05 < \sqrt{3} < 1{,}732\,06;$$
$$1{,}732\,050 < \sqrt{3} < 1{,}732\,051;$$
$$\ldots$$

Будемо вважати, що коли $r < \sqrt{3} < s$ (де r і s — раціональні числа), то значення $2^{\sqrt{3}}$ розташоване на числовій прямій між відповідними значеннями 2^r і 2^s, а саме: $2^r < 2^{\sqrt{3}} < 2^s$. Знайдемо за допомогою калькулятора наближені значення 2^r і 2^s, вибираючи як r і s наближені значення $\sqrt{3}$ з недостачею і надлишком відповідно. Одержуємо співвідношення:

$$2^1 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2;$$
$$2^{1{,}7} \approx 3{,}249\,0096 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}8} \approx 3{,}482\,2022;$$
$$2^{1{,}73} \approx 3{,}317\,2782 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}74} \approx 3{,}340\,3517;$$
$$2^{1{,}732} \approx 3{,}321\,8801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}733} \approx 3{,}324\,1834;$$
$$2^{1{,}7320} \approx 3{,}321\,8801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}7321} \approx 3{,}322\,1104;$$
$$2^{1{,}732\,05} \approx 3{,}321\,9952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}732\,06} \approx 3{,}322\,0182;$$
$$2^{1{,}732\,050} \approx 3{,}321\,9952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}732\,051} \approx 3{,}321\,9975;$$

Як бачимо, значення 2^r і 2^s наближаються до одного й того самого числа

3,32199... . Це число і вважають степенем $2^{\sqrt{3}}$. Отже, $2^{\sqrt{3}} = 3{,}32199...$.

Значення $2^{\sqrt{3}}$, обчислене на калькуляторі, таке: $2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321997$.

Можна довести, що завжди, коли ми вибираємо раціональні числа r, які з недостачею наближаються до ірраціонального числа α, і раціональні числа s, які з надлишком наближаються до цього самого ірраціонального числа α, для будь-якого $a > 1$ існує, і притому тільки одне, число y, більше за всі a^r і менше від усіх a^s. Це число y за означенням є a^α.

Аналогічно означають і степінь з ірраціональним показником α для $0 < a < 1$. Тільки у випадку, коли $r < \alpha < s$ при $0 < a < 1$, вважають, що $a^s < a^\alpha < a^r$. Крім того, як і для раціональних показників, за означенням вважають, що $1^\alpha = 1$ для будь-якого α і $0^\alpha = 0$ для всіх $\alpha > 0$.

Наведене вище розуміння степеня з ірраціональним показником можна сформулювати точніше, використовуючи поняття границі послідовності.

Нехай задані додатне число a та ірраціональне число x. Розглянемо послідовність $\{x_n\}$ раціональних чисел, границею якої є число x (наприклад, послідовність десяткових наближень числа x з недостачею або з надлишком), тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тоді границю послідовності $\{a^{x_n}\}$ (послідовності раціональних степенів числа a) будемо називати x-м степенем числа a, тобто

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}.$$

У курсах математичного аналізу доводиться, що оскільки послідовність $\{x_n\}$ має границю $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x\right)$, то й послідовність $\{a^{x_n}\}$ теж має границю, причому ця границя не залежить від вибору послідовності $\{x_n\}$, границею якої є число x.

Спираючись на властивості границь послідовностей, можна довести, що, як і для степенів із раціональними показниками, для степенів з ірраціональними показниками x і y виконуються властивості, наведені в п. 3 табл. 1, тобто:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
3. $(a^x)^y = a^{xy}$.
4. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^x$.
7. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.
8. $1^x = 1$.
9. $0^x = 0$ при $x > 0$.

Отже, ці властивості виконуються для степенів із довільними дійсними показниками.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Знайдіть значення виразу $5^{\sqrt{18}} \cdot \left(\dfrac{1}{125}\right)^{\sqrt{2}}$.

Розв'язання	Коментар
▶ $5^{\sqrt{18}} \cdot \left(\dfrac{1}{125}\right)^{\sqrt{2}} = 5^{3\sqrt{2}} \cdot \left(5^{-3}\right)^{\sqrt{2}} = 5^{3\sqrt{2}} \cdot 5^{-3\sqrt{2}} = 5^{3\sqrt{2}-3\sqrt{2}} = 5^0 = 1.$ ◁	Нагадаємо, що наведені вище властивості степенів можна застосовувати як зліва направо, так і справа наліво. Зокрема за властивістю $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ маємо: $\dfrac{1}{125} = 5^{-3}$. Також слід урахувати, що $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$.

Приклад 2

Знайдіть область визначення функції:

1) $y=(x+2)^{\sqrt{3}}$; 2) $y=(x-5)^{-\sqrt{7}}$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ $x+2\geqslant 0$, тобто $x\geqslant -2$, отже, $D(y)=[-2;+\infty)$. ◁ 2) ▶ $x-5>0$, тобто $x>5$, отже, $D(y)=(5;+\infty)$. ◁	Ураховуємо, що степінь a^{α} з ірраціональним показником α означена тільки при $a\geqslant 0$ для додатних значень α і тільки при $a>0$ для від'ємних значень α.

Приклад 3

Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\sqrt{2}}=3$; 2) $(x+5)^{-\sqrt{7}}=-\sqrt{7}$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ Підносячи обидві частини заданого рівняння до степеня $\frac{1}{\sqrt{2}}$, одержуємо $x=3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$. ◁	1) Як було обґрунтовано в підручнику для 10 класу*, функція $y=x^{\alpha}$ при $\alpha>0$ є зростаючою, а при $\alpha<0$ — спадною. Отже, функція $y=x^{\sqrt{2}}$ (її область визначення $x\geqslant 0$) — зростаюча і тому значення 3 вона набуває тільки при одному значенні аргумента. Його можна визначити, якщо піднести обидві частини заданого рівняння до степеня $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (і врахувати, що $\left(x^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=x^{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=x^1=x$). Зауважимо, що, записуючи результат $x=3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, ми автоматично враховуємо ОДЗ заданого рівняння $(x\geqslant 0)$, оскільки $3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}>0$, і тому ОДЗ можна не записувати до розв'язання.
2) ▶ Оскільки ОДЗ заданого рівняння $x+5>0$, то ліва частина цього рівняння завжди додатна і тому *рівняння коренів не має*. ◁	2) Оскільки степінь з від'ємним ірраціональним показником означений тільки для випадку, коли основа степеня є додатним числом, то ліва частина рівняння $(x+5)^{-\sqrt{7}}=-\sqrt{7}$ завжди додатна і не може дорівнювати від'ємному числу.

Запитання

1. Сформулюйте означення степеня з натуральним, цілим від'ємним і нульовим показниками. Наведіть приклади їх обчислення. При яких значеннях a існують значення виразів a^0 та a^{-n}, де $n\in N$?
2. Сформулюйте означення степеня з раціональним показником $r=\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне, $n\neq 1$. Наведіть приклади обчислення таких степенів. При яких значеннях a існують значення виразу $a^{\frac{m}{n}}$? Укажіть область допустимих значень виразів $a^{\frac{3}{7}}$ і $a^{-\frac{3}{7}}$.

* Мається на увазі підручник: Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018. — 272 с. : іл.

3. Поясніть на прикладі, як можна ввести поняття степеня з ірраціональним показником. Укажіть область допустимих значень виразів $a^{\sqrt{11}}$ і $a^{-\sqrt{11}}$.

4. Запишіть властивості степенів із дійсними показниками. Спробуйте сформулювати їх зміст для використання зліва направо і справа наліво. Наведіть приклади їх використання.

Вправи

1.1°. Чи має зміст вираз:

1) $(-3)^{\sqrt{3}}$; 3) $2^{-2\sqrt{2}}$; 5) $5^{\sqrt{13}}$?

2) $0^{\sqrt{7}}$; 4) $0^{-\sqrt{5}}$;

1.2°. Знайдіть область допустимих значень виразу:

1) $x^{-\sqrt{3}}$; 3) $(2-x)^{-2\sqrt{2}}$; 5) $x^{\sqrt{13}}-5$.

2) $x^{\sqrt{7}}$; 4) $(x^2-1)^{\sqrt{5}}$;

1.3. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$; 3) $7^{\sqrt{12}}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{\sqrt{3}}+216^{\frac{1}{3}}$.

2) $16^{0{,}25+\sqrt{20}}:16^{2\sqrt{5}}$;

1.4. Спростіть вираз:

1) $\left(2+a^{\sqrt{2}}\right)^2-\left(2-a^{\sqrt{2}}\right)^2$; 2) $\frac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}}-b^{\sqrt{3}}}$; 3) $\frac{a^{3\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}}{a^{2\sqrt{7}}+1}$.

1.5. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\sqrt{7}}=2$; 3) $(x-2)^{-\sqrt{2}}=-2$; 5) $(x+4)^{\sqrt{5}}=a$;

2) $(x+4)^{\sqrt{11}}=1$; 4) $(x-6)^{-\sqrt{3}}=3$; 6) $(x-1)^{-\sqrt{7}}=a$.

1.6. Побудуйте ескіз графіка функції:

1) $y=x^{\sqrt{5}}$; 3) $y=x^{\sqrt{10}}+2$;

2) $y=x^{-\sqrt{7}}$; 4) $y=(x+2)^{\sqrt{7}}$.

Виявіть свою компетентність

1.7. Вкладник поклав на депозит в банку 3000 грн під 10 % річних. Яка сума буде на його рахунку через 3 роки, якщо в кінці кожного року гроші, нараховані за відсотками, не знімаються, а додаються до депозитного внеску?

§ 2 ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

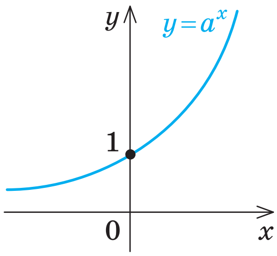
Таблиця 2

1. Поняття показникової функції та її графік

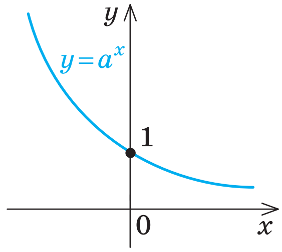
Означення. ***Показниковою функцією*** **називається функція виду** $y=a^x$**, де** $a>0$ **і** $a\neq 1$**.**

Графік показникової функції (експонента)

$a>1$



$0<a<1$



2. Властивості показникової функції

1. *Область визначення:* $x\in \boldsymbol{R}$. $\boxed{D(a^x)=\boldsymbol{R}}$
2. *Область значень:* $y>0$. $\boxed{E(a^x)=(0;+\infty)}$
3. *Функція ні парна, ні непарна.*
4. *Точки перетину з осями координат: Оу* $\boxed{\begin{cases}x=0,\\ y=1;\end{cases}}$ *Ox* $\boxed{\text{немає}}$.
5. *Проміжки зростання і спадання:*
   - при $a>1$ функція $y=a^x$ **зростає на всій області визначення;**
   - при $0<a<1$ функція $y=a^x$ **спадає на всій області визначення.**
6. *Проміжки знакосталості:* $y>0$ *при всіх значеннях* $x\in \boldsymbol{R}$.
7. *Найбільшого і найменшого значень функція не має.*
8. *Для будь-яких дійсних значень* u *і* v $(a>0,\ b>0)$ *виконуються рівності:*

$$a^u\cdot a^v=a^{u+v}\qquad (ab)^u=a^ub^u\qquad \frac{a^u}{a^v}=a^{u-v}\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^u=\frac{a^u}{b^u}\qquad (a^u)^v=a^{uv}$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття показникової функції та її графік

Означення. ***Показниковою функцією*** **називається функція виду** $y=a^x$**, де** $a>0$ **і** $a\neq 1$**.**

Наприклад, $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$, $y=\pi^x$ — показникові функції.

Зазначимо, що *функція виду* $y=a^x$ *існує і при* $a=1$. Тоді $y=a^x=1^x$, тобто $y=1$ при всіх значеннях $x\in \boldsymbol{R}$. Але в цьому випадку функція $y=1^x$ *не називається показниковою*. (Графік функції $y=1^x$ — пряма, зображена на рис. 2.1.)

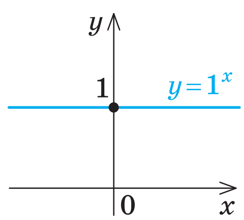


Рис. 2.1

Оскільки при $a>0$ вираз a^x означений при всіх дійсних значеннях x, то *областю визначення показникової функції $y=a^x$ є всі дійсні числа*.

Спочатку побудуємо графіки деяких показникових функцій, наприклад $y=2^x$ і $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, «за точками», а потім перейдемо до характеристики загальних властивостей показникової функції.

Складемо таблицю деяких значень функцій $y=2^x$ і $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

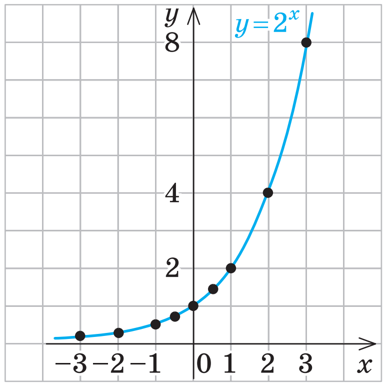


Рис. 2.2

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0,7$	1	$\sqrt{2}\approx 1,4$	2	4	8
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	$\sqrt{2}\approx 1,4$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0,7$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Побудуємо на координатній площині відповідні точки і з'єднаємо їх плавними лініями. Отримаємо графіки функцій $y=2^x$ (рис. 2.2) і $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 2.3).

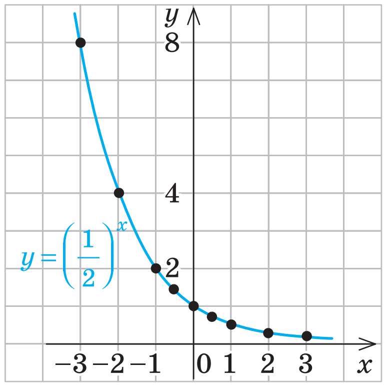


Рис. 2.3

Як бачимо з графіків, функція $y=2^x$ є зростаючою функцією, а функція $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ є спадною функцією, які набувають всіх значень із проміжку $(0;+\infty)$.

Зауважимо, що графік функції $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ можна одержати з графіка функції $y=2^x$ за допомогою геометричних перетворень. Приймемо $f(x)=2^x$, тоді $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2^x}=2^{-x}=f(-x)$. Отже, графік функції $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ симетричний графіку функції $y=2^x$ відносно осі Oy (див. підручник для 10 класу, п. 2.2) і тому, якщо функція $y=2^x$ є зростаючою, функція $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ обов'язково буде спадною.

Виявляється, завжди при $a>1$ графік функції $y=a^x$ схожий на графік функції $y=2^x$, а при $0<a<1$ — на графік функції $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 2.4).

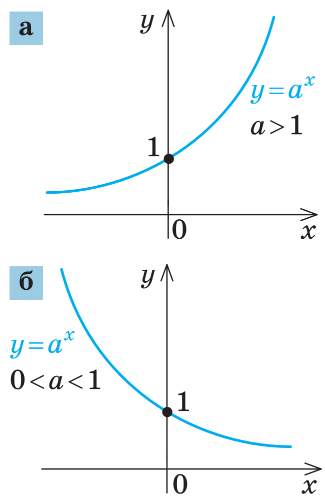


Рис. 2.4

Графік показникової функції називають *експонентою*.

2 Властивості показникової функції

Як було показано вище, областю визначення показникової функції $y=a^x$ $(a>0,$ $a\neq 1)$ є всі дійсні числа: $D(a^x)=\boldsymbol{R}$.

Областю значень функції $y=a^x$ є множина всіх додатних чисел, тобто функція $y=a^x$ набуває тільки додатних значень, причому будь-яке додатне число є значенням функції, або $E(a^x)=(0;+\infty)$.

Це означає, що графік показникової функції $y=a^x$ завжди розміщений вище від осі Ox і будь-яка пряма, паралельна осі Ox і розташована вище від неї, перетинає цей графік.

При $a>1$ функція $y=a^x$ зростає на всій області визначення, а при $0<a<1$ функція $y=a^x$ спадає на всій області визначення.

Обґрунтування області значень та проміжків зростання й спадання показникової функції проводять так. Ці властивості перевіряють послідовно для натуральних, цілих, раціональних показників, а потім уже узагальнюють для довільних дійсних показників. Але треба ураховувати, що, коли ми вводили поняття степеня з ірраціональним показником, ми вже користувалися зростанням функції, коли проводили такі міркування: оскільки $1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$, то $2^{1{,}7}<2^{\sqrt{3}}<2^{1{,}8}$. Отже, у нашій системі викладу матеріалу ми зможемо обґрунтувати ці властивості тільки для раціональних показників, але, враховуючи громіздкість таких обґрунтувань, приймемо їх без доведення.

Усі інші **властивості** показникової функції легко обґрунтовуються за допомогою цих властивостей.

Функція $y=a^x$ ні парна, ні непарна, оскільки $f(-x)=a^{-x}=\frac{1}{a^x}\neq f(x)=a^x$ (за означенням $a\neq 1$). Також $f(-x)\neq -f(x)$, оскільки $f(-x)=a^{-x}>0$ (тому що $E(a^x)=(0;+\infty)$), а $-f(x)=-a^x<0$.

Точки перетину з осями координат:

- графік функції $y=a^x$ перетинає вісь Oy у точці $y=1$ (справді, на осі Oy значення $x=0$, тоді $y=a^0=1$);
- графік показникової функції $y=a^x$ $(a>0,$ $a\neq 1)$ не перетинає вісь Ox, оскільки на осі Ox $y=0$, а значення $y=0$ не входить до області значень показникової функції $y=a^x$ ($y=a^x=0$ тільки при $a=0$, але за означенням $a>0$).

Проміжки знакосталості: $y>0$ при всіх дійсних значеннях x, оскільки $y=a^x>0$ при $a>0$.

Зазначимо ще одну властивість показникової функції. Оскільки графік функції $y=a^x$ перетинає вісь Oy у точці $y=1$, то, враховуючи зростання функції при $a>1$ та спадання при $0<a<1$, одержуємо такі *співвідношення між значеннями функції й відповідними значеннями аргумента*.

Значення функції	**Значення аргумента**	
	при $a>1$	**при $0<a<1$**
$y>1$	$x\in(0;+\infty)$	$x\in(-\infty;0)$
$0<y<1$	$x\in(-\infty;0)$	$x\in(0;+\infty)$

Функція $y=a^x$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень, оскільки її область значень — проміжок $(0;+\infty)$, який не містить ні найменшого, ні найбільшого чисел.

Властивості показникової функції, зазначені в п. 8 табл. 2: $a^u a^v=a^{u+v}$; $(a^u)^v=a^{uv}$; $\frac{a^u}{a^v}=a^{u-v}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^u=\frac{a^u}{b^u}$; $(ab)^u=a^u b^u$ — аналогічні до властивостей степеневої функції, які було обґрунтовано в курсі 10 класу.

Зазначимо ще одну властивість показникової функції, яка виокремлює її серед інших функцій: якщо $f(x)=a^x$ $(a>0,$ $a\neq 1)$, то при будь-яких дійсних значеннях аргументів x_1 і x_2 виконується рівність

$$f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2).$$

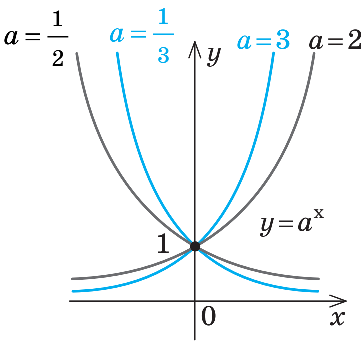


Рис. 2.5

Дійсно, $f(x_1)f(x_2)=a^{x_1}a^{x_2}=a^{x_1+x_2}=f(x_1+x_2)$. У курсах вищої математики ця властивість (разом зі строгою монотонністю) є основою аксіоматичного означення показникової функції. У цьому випадку формулюється означення: показникова функція $y=f(x)$ — **це строго монотонна функція, визначена на всій числовій осі, яка задовольняє функціональне рівняння** $f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2)$, а потім обґрунтовується, що функція $f(x)$ збігається з функцією $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

Крім спільних властивостей показникової функції при $a>1$ і $0<a<1$, зазначимо деякі особливості «поведінки» графіків показникових функцій при конкретних значеннях a. Так, на рис. 2.5 наведено графіки показникових функцій $y=a^x$ для випадків, коли основа a набуває значень 2; 3; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

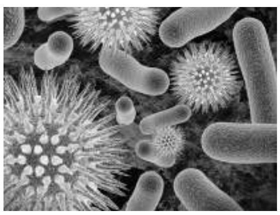
Порівнюючи ці графіки, можна зробити висновок: *чим більшою є основа $a>1$, тим крутіше «піднімається» графік функції $y=a^x$, якщо точка рухається вправо, і тим швидше графік наближається до осі Ox, якщо точка рухається вліво.* Аналогічно, *чим меншою є основа $0<a<1$, тим крутіше «піднімається» графік функції $y=a^x$, якщо точка рухається вліво, і тим швидше графік наближається до осі Ox, якщо точка рухається вправо.*

Завершуючи розмову про показникову функцію, звернемо увагу на ті причини, які заважають розглядати показникові функції з від'ємною або нульовою основою.

Показникова функція $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ означена при всіх дійсних значеннях x. Певна річ, вираз a^x можна розглядати і при $a=0$, і при $a<0$, але в цих випадках він уже буде означений не при всіх дійсних значеннях x. Зокрема, вираз 0^x означений при всіх $x>0$ (і тоді $0^x=0$), а вираз $(-2)^x$ — при всіх цілих значеннях x (наприклад, $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=-\frac{1}{8}$). Через це й не беруть за основу показникової функції $a=0$ (отримуємо сталу функцію при $x>0$) та $a<0$ (одержуємо функцію, означену тільки при окремих значеннях x, а саме $x\in \boldsymbol{Z}$). Але наведені міркування стосовно доцільності вибору основи показникової функції не впливають на область допустимих значень виразу a^x. Наприклад, як було зазначено вище, пара значень $a=-2$, $x=-3$ входить до його ОДЗ, і це доводиться враховувати під час розв'язування деяких завдань.

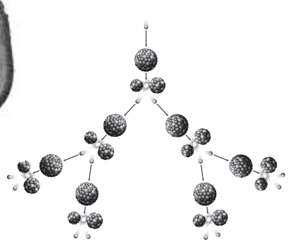
Зазначимо, що за допомогою показникової функції можна описати значну кількість процесів, які відбуваються в природі.

Наприклад, зростання кількості бактерій (за відсутності негативних для їх росту факторів і наявності великої кількості поживних речовин) відбувається за законом $N=5^t$, де t — час дослідження, N — число бактерій у колонії.



Тиск повітря зменшується з висотою за законом $p=p_0\cdot a^{-kh}$, де p_0 — тиск на рівні моря, p — тиск на висоті h, a і k — деякі сталі.

Зростання кількості деревини під час росту дерева відбувається за законом $A=A_0\cdot a^{kt}$, де A_0 — початкова кількість деревини, A — кількість деревини через час t, k і a — деякі сталі.



Маса речовини під час радіоактивного розпаду зменшується за законом $M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, де M_0 — початкова маса речовини, M — маса в момент часу t, T — період напіврозпаду речовини (тобто час, за який розпадається половина атомів заданої речовини). Оскільки періоди напіврозпаду певних речовин добре відомі, цю залежність застосовують для визначення віку археологічних знахідок.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Порівняйте значення виразів:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ і $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$; 2) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{4}$ і $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{3}$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ Функція $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ є спадною, оскільки $\frac{2}{3} < 1$, тому з нерівності $-3 > -5$ одержуємо $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} < \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$. ◁ 2) ▶ Функція $y = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^x$ є зростаючою, оскільки $\frac{\sqrt{7}}{2} > 1$, тому з нерівності $4 > 3$ одержуємо $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^4 > \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^3$. ◁	Урахуємо, що функція $y = a^x$ при $a > 1$ зростаюча, а при $0 < a < 1$ спадна. Отже, спочатку порівняємо задану основу степеня a з одиницею, а потім, порівнюючи аргументи, зробимо висновок про співвідношення між заданими значеннями функції.

Приклад 2

Порівняйте з одиницею додатну основу степеня a, якщо відомо, що виконується нерівність:

1) $a^{\sqrt{5}} > a^{\sqrt{11}}$; 2) $a^{-\frac{1}{3}} < a^{-\frac{1}{5}}$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ Оскільки $\sqrt{5} < \sqrt{11}$ і за умовою $a^{\sqrt{5}} > a^{\sqrt{11}}$, то функція $y = a^x$ є спадною, отже, $0 < a < 1$. ◁ 2) ▶ Оскільки $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{5}$ і за умовою $a^{-\frac{1}{3}} < a^{-\frac{1}{5}}$, то функція $y = a^x$ є зростаючою, отже, $a > 1$. ◁	Задані в кожній нерівності вирази — це два значення функції $y = a^x$. Проаналізуємо, яке значення функції відповідає більшому значенню аргумента (для цього спочатку порівняємо аргументи). Якщо більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції, то функція $y = a^x$ є зростаючою і $a > 1$; якщо відповідає менше значення функції, то функція $y = a^x$ спадна і $0 < a < 1$.

Приклад 3

Побудуйте графік функції:

1) $y=1{,}7^x$; 2) $y=0{,}3^x$.

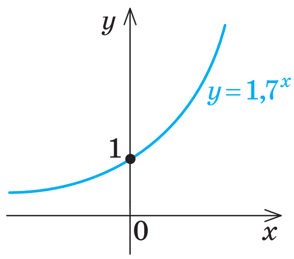
Коментар

Якщо $a>0$, то $a^x>0$, отже, графік функції $y=a^x$ завжди розташований вище від осі Ox. Цей графік перетинає вісь Oy в точці $y=1$ $(a^0=1)$.
При $a>1$ показникова функція зростає, отже, графіком функції $y=1{,}7^x$ буде крива (експонента), точки якої при збільшенні аргумента «піднімаються» вгору.

При $0<a<1$ показникова функція спадає, отже, графіком функції $y=0{,}3^x$ буде крива, точки якої при збільшенні аргумента «опускаються» вниз. (Нагадаємо, що, «опускаючись» вниз, графік наближається до осі Ox, але ніколи її не перетинає.)
Щоб уточнити поведінку графіків заданих функцій, знайдемо координати кількох додаткових точок.

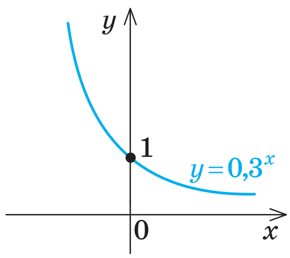
Розв'язання

1) ▶ $y=1{,}7^x$



x	-1	0	1	2
y	$\frac{10}{17}$	1	$1{,}7$	$2{,}89$ ◁

2) ▶ $y=0{,}3^x$



x	-1	0	1	2
y	$\frac{10}{3}$	1	$0{,}3$	$0{,}09$ ◁

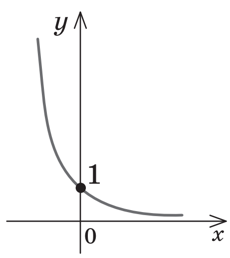
Приклад 4

Зобразіть схематично графік функції $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|$.

Розв'язання

▶ Послідовно будуємо графіки:

1. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

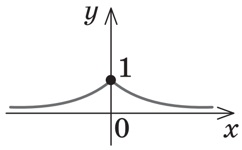


Коментар

Складемо план побудови графіка заданої функції за допомогою послідовних геометричних перетворень (див. підручник для 10 класу, п. 2.2).

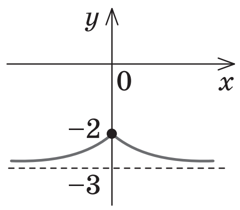
1. Ми можемо побудувати графік функції $y=f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (основа $a=\frac{1}{3}<1$, отже, показникова функція спадає).

2. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$



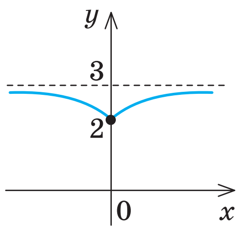
2. Потім можна побудувати графік функції $y=g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}=f(|x|)$: праворуч від осі Oy (і на самій осі) графік функції $y=f(x)$ залишається без зміни, і саме ця частина графіка симетрично відображається відносно осі Oy.

3. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3$



3. Після цього можна побудувати графік функції $y=\varphi(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3=g(x)-3$: паралельно перенести графік функції $y=g(x)$ уздовж осі Oy на -3 одиниці.

4. $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|$



4. Далі можна побудувати графік заданої функції $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|=|\varphi(x)|$: частина графіка функції $y=\varphi(x)$, розташована вище від осі Ox (і на самій осі), повинна залишитися без зміни (але таких точок графік функції $y=\varphi(x)$ не має), а частина графіка, розташована нижче від осі Ox, симетрично відображається відносно осі Ox (тобто весь графік функції $y=\varphi(x)$ потрібно відобразити симетрично відносно осі Ox). ◁

Запитання

1. Сформулюйте означення показникової функції.

2. Побудуйте графіки показникової функції $y=a^x$ при $a>1$ та при $0<a<1$ (виберіть конкретні значення a). Через яку точку проходять графіки всіх показникових функцій?

3. Користуючись графіком показникової функції $y=a^x$ (при $a>1$ та при $0<a<1$), охарактеризуйте її властивості.

4*. Обґрунтуйте властивості функції $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

5. Поясніть, як, використовуючи зростання чи спадання відповідної показникової функції, порівняти значення:

а) 7^5 і 7^9; б) $0{,}7^5$ і $0{,}7^9$.

Вправи

2.1. Укажіть, які із заданих функцій зростають, а які — спадають:

1°) $y=4^x$; 4°) $y=\pi^x$; 7*) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$;

2°) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$; 5) $y=\left(\sqrt{5}-2\right)^x$; 8*) $y=2^{-x}$;

3°) $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$; 6*) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^x$; 9*) $y=-5^x$.

2.2°. Побудуйте графік функції:

1) $y=3^x$; 3) $y=0{,}2^x$; 5) $y=0{,}7^x$.

2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$; 4) $y=2{,}5^x$;

2.3. Знаючи, що $a>b>1$, зобразіть схематично в одній системі координат графіки функцій $y=a^x$ і $y=b^x$.

2.4. Знайдіть область значень функції:

1) $y=3^x+1$; 3) $y=7^x-2$;

2) $y=-5^x$; 4) $y=-\left(\frac{1}{6}\right)^x$.

2.5. Побудуйте графік функції:

1°) $y=-3^x$; 3*) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; 5*) $y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right|$.

2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x+3$; 4*) $y=5^{|x|}$;

2.6. Порівняйте значення виразів:

1°) $3^{1,5}$ і $3^{1,4}$; 5) $0{,}5^{\sqrt{3}}$ і $0{,}5^{\sqrt{7}}$; 9) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-4}$ і $\left(\frac{5}{4}\right)^5$;

2°) $\left(\frac{2}{7}\right)^{1,3}$ і $\left(\frac{2}{7}\right)^{1,8}$; 6) $2^{\sqrt{2}}$ і $2^{\sqrt{3}}$; 10) $0{,}2^{-10}$ і 5^{11}.

3°) $0{,}78^{-0,7}$ і $0{,}78^{-0,6}$; 7) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^8$ і $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^9$;

4) $\left(\sqrt{2}\right)^{-3}$ і $\left(\sqrt{2}\right)^{-5}$; 8) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$ і $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2.7. Порівняйте показники степеня m і n, якщо відомо, що є правильною нерівність:

1) $3{,}2^m<3{,}2^n$; 4) $0{,}99^m<0{,}99^n$; 7) $\left(\sqrt{5}-1\right)^m<\left(\sqrt{5}-1\right)^n$;

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^m>\left(\frac{1}{9}\right)^n$; 5) $\left(\sqrt{2}\right)^m>\left(\sqrt{2}\right)^n$; 8) $\left(\sqrt{2}-1\right)^m<\left(\sqrt{2}-1\right)^n$.

3) $\left(\frac{7}{6}\right)^m>\left(\frac{7}{6}\right)^n$; 6) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m<\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$;

2.8. Порівняйте з одиницею додатну основу степеня a, якщо відомо, що є правильною нерівність:

1) $a^{100}>a^{99}$; 3) $a^{\sqrt{3}}<a^{\sqrt{7}}$; 5) $a^{-\frac{1}{17}}<a^{-\frac{1}{8}}$;

2) $a^{0,2}<a^{\frac{1}{3}}$; 4) $a^{\sqrt{17}}<a^4$; 6) $a^{-0,25}>a^{-\sqrt{3}}$.

2.9. Порівняйте з одиницею значення виразу:

1) $0{,}01^{1{,}2}$;
2) $0{,}99^{100}$;
3) $\left(\frac{13}{12}\right)^{\frac{1}{3}}$;
4) $\left(\frac{30}{31}\right)^{-\frac{1}{5}}$;
5) $0{,}007^{0}$;
6) $100^{-0{,}01}$;
7) $3^{-\sqrt{2}}$;
8) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\sqrt{3}}$.

2.10. Який висновок можна зробити про знак числа x, якщо:

1) $3^x = 0{,}6$; 2) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 10$; 3) $10^x = 4$; 4) $0{,}3^x = 0{,}1$?

2.11. Розташуйте числа в порядку їх зростання:

1) $2^{\frac{1}{3}}$, $2^{-1{,}5}$, $2^{\sqrt{2}}$, $2^{-\sqrt{2}}$, $2^{1{,}4}$, 1;

2) $0{,}3^{9}$, 1, $0{,}3^{-\sqrt{5}}$, $0{,}3^{\frac{1}{2}}$, $0{,}3^{-9}$, $0{,}3^{\frac{1}{3}}$.

Виявіть свою компетентність

2.12*. Унаслідок радіоактивного розпаду за x діб маса M_0 речовини зменшується до маси M. Цей процес можна описати формулою $M = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Звідси $\frac{M}{M_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Покажіть графічно, як зі зміною x змінюється відношення $\frac{M}{M_0}$.

Використовуючи за необхідності побудований графік, дайте відповіді (точні або наближені) на запитання.

1) У скільки разів зменшиться маса радіоактивної речовини через 1,5 доби, 2,5 доби, 3 доби, 4 доби?

2) Скільки часу має минути, щоб початкова маса радіоактивної речовини зменшилася у 2,5 разу, у 3 рази, у 4 рази?

§ 3 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОКАЗНИКОВИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

3.1. Найпростіші показникові рівняння

Таблиця 3

1. Основні формули та співвідношення

$a^u \cdot a^v = a^{u+v}$

$(ab)^u = a^u \cdot b^u$

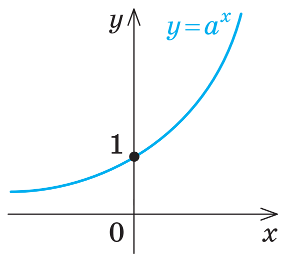
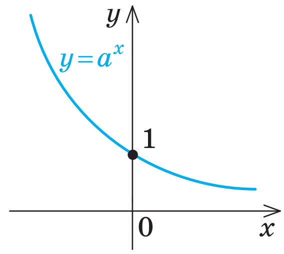
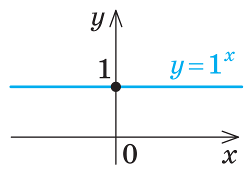
$\dfrac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^u = \dfrac{a^u}{b^u}$

$(a^u)^v = a^{uv}$

$\sqrt[u]{a^v} = a^{\frac{v}{u}}$

Графік функції $y = a^x$ $(a > 0)$

$a > 1$	$0 < a < 1$	$a = 1$
		
зростає	спадає	стала

2. Схема рівносильних перетворень найпростіших показникових рівнянь

Орієнтир	Приклад	
При $a > 0$ і $a \neq 1$ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$	$3^{2x+4} = 9.$ ▶ $3^{2x+4} = 3^2;$ $2x + 4 = 2;$ $x = -1.$ *Відповідь*: -1. ◁	$6^{x+3} = -36.$ ▶ Коренів немає, оскільки $6^t > 0$ для всіх t. *Відповідь*: коренів немає. ◁

3. Зведення деяких показникових рівнянь до найпростіших

Орієнтир	Приклад
1) *Якщо ліва й права частини показникового рівняння містять тільки добутки, частки, корені або степені, то доцільно за допомогою основних формул спробувати записати обидві частини рівняння як степені з однією основою.*	$2^{x-3} \cdot 4^x = \dfrac{\sqrt{2}}{16^x}.$ ▶ $2^{x-3} \cdot 2^{2x} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{4x}};$ $2^{3x-3} = 2^{\frac{1}{2}-4x};$ $3x - 3 = \dfrac{1}{2} - 4x;$ $x = \dfrac{1}{2}.$ *Відповідь*: $\dfrac{1}{2}$. ◁
2) *Якщо в одній частині показникового рівняння стоїть число, а в іншій усі члени містять вираз виду a^{kx} (показники степенів відрізняються тільки вільними членами), то зручно в цій частині рівняння винести за дужки найменший степінь a.*	$5^x - 2 \cdot 5^{x-2} = 23.$ ▶ $5^{x-2}(5^2 - 2) = 23;$ $5^{x-2} \cdot 23 = 23;$ $5^{x-2} = 1;$ $5^{x-2} = 5^0;$ $x - 2 = 0;$ $x = 2.$ *Відповідь*: 2. ◁

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Означення. ***Показниковими*** **зазвичай називаються рівняння, у яких показник степеня містить змінну, а основа цього степеня не містить змінної.**

Розглянемо найпростіше показникове рівняння

$$a^x = b, \qquad (1)$$

де $a>0$ і $a \neq 1$. Оскільки при цих значеннях a функція $y=a^x$ строго монотонна (зростає при $a>1$ і спадає при $0<a<1$), то кожного свого значення вона набуває тільки при одному значенні аргумента. Це означає, що **рівняння** $a^x = b$ **при** $b>0$ **має єдиний корінь.** Щоб його знайти, достатньо подати b у вигляді $b=a^c$.

Очевидно, що $x=c$ — корінь рівняння $a^x=a^c$.

Графічно це проілюстровано на рис. 3.1.

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $7^x=49$, достатньо подати це рівняння у вигляді $7^x=7^2$ і записати його єдиний корінь $x=2$.

Якщо $b \leqslant 0$, **то рівняння** $a^x=b$ **(при** $a>0$**) коренів не має**, оскільки a^x завжди більше нуля. (На графіках, наведених на рис. 3.2, пряма $y=b$ не перетинає графік функції $y=a^x$ при $b \leqslant 0$.) Наприклад, рівняння $7^x=-7$ не має коренів.

Узагальнюючи наведені вище міркування стосовно розв'язування найпростіших показникових рівнянь, зазначимо, що **при** $a>0$ **і** $a \neq 1$ **рівняння**

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad (2)$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x). \qquad (3)$$

Коротко це твердження можна записати так: **при** $a>0$ **і** $a \neq 1$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x).$$

Щоб обґрунтувати цю рівносильність, достатньо помітити, що рівності (2) і (3) можуть бути правильними тільки одночасно, оскільки функція $y=a^t$ є строго монотонною й кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргумента t (тобто з рівності степенів (2) обов'язково випливає рівність показників степеня (3)). Отже, усі корені рівняння (2) (які перетворюють це рівняння на правильну рівність) будуть і коренями рівняння (3), та навпаки, усі корені рівняння (3) будуть коренями рівняння (2). А це й означає, що рівняння (2) і (3) рівносильні.

У найпростіших випадках під час розв'язування показникових рівнянь треба за допомогою основних формул дій над степенями (див. табл. 3) звести (якщо це можливо) задане рівняння до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Для розв'язування більш складних показникових рівнянь найчастіше використовують заміну змінних (застосування цього методу розглянуто далі, в табл. 4) або

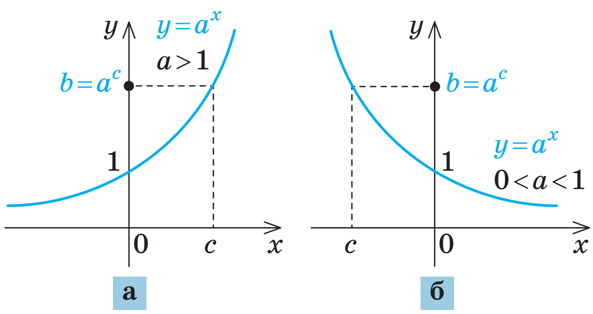


Рис. 3.1

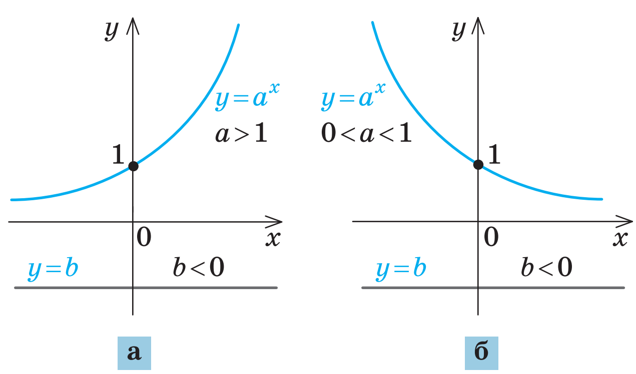


Рис. 3.2

властивості відповідних функцій (ці методи розглянуто в табл. 11, §8).

Як відомо, усі рівносильні перетворення рівняння завжди виконуються на його області допустимих значень (ОДЗ), тобто на спільній області визначення всіх функцій, які входять до запису цього рівняння. Але в показникових рівняннях найчастіше областю допустимих значень є множина всіх дійсних чисел. У цих випадках, як правило, ОДЗ не знаходять і не записують до розв'язання рівняння (див. приклади 1–3 до п. 3.1).

Якщо ж у процесі розв'язування показникових рівнянь рівносильні перетворення виконуються не на всій множині дійсних чисел, то доводиться згадувати про ОДЗ (приклад 4 до п. 3.1).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Розв'яжіть рівняння:

1) $4^x = 64$; 2) $5^x = -1$; 3) $12^{x^2-4} = 1$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ $4^x = 64$; $4^x = 4^3$; $x = 3$; ◁ 2) ▶ $5^x = -1$ — коренів немає, оскільки $5^x > 0$ завжди; ◁ 3) ▶ $12^{x^2-4} = 1$; $12^{x^2-4} = 12^0$; $x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 2$. ◁	При $a > 0$ завжди $a^x > 0$, тому рівняння $5^x = -1$ не має коренів. Інші рівняння зведемо до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (де $a > 0$ і $a \neq 1$) і перейдемо до рівносильного рівняння $f(x) = g(x)$.

Приклад 2

Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{(0,2)^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5\cdot(0,04)^{x-2}$; 2) $2^x \cdot 3^x = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{2x-3}$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ Задане рівняння рівносильне рівнянням $\dfrac{(5^{-1})^{x-0,5}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5\cdot(5^{-2})^{x-2}$; $\dfrac{5^{-x+0,5}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5^1 \cdot 5^{-2x+4}$; $5^{-x+0,5-\frac{1}{2}} = 5^{1+(-2x+4)}$; $5^{-x} = 5^{5-2x}$; $-x = 5 - 2x$, $x = 5$. *Відповідь*: 5. ◁ 2) ▶ Задане рівняння рівносильне рівнянням $(2\cdot 3)^x = (6^{-1})^{2x-3}$; $6^x = 6^{-2x+3}$; $x = -2x + 3$; $x = 1$. *Відповідь*: 1. ◁	*Ліва і права частини заданих рівнянь містять тільки добутки, частки, корені або степені. У цьому випадку для зведення рівняння до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ спробуємо використати основні формули дій над степенями, щоб записати обидві частини рівняння як степені з однією основою.* У першому рівнянні треба звернути увагу на те, що $0,2 = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5} = 5^{-1}$, а $0,04 = \dfrac{4}{100} = \dfrac{1}{25} = 5^{-2}$ і $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$. Отже, ліву і праву частини цього рівняння можна записати як степені числа 5. Для перетворення рівняння 2 пригадаємо, що всі формули можна використовувати як зліва направо, так і справа наліво, наприклад для лівої частини цього рівняння скористаємося формулою $a^u b^u = (ab)^u$, тобто $2^x \cdot 3^x = (2\cdot 3)^x = 6^x$.

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $3^{2x+2}+5\cdot 3^{2x-2}=86$.

Розв'язання	Коментар
Задане рівняння рівносильне рівнянням $3^{2x-2}(3^4+5)=86;$ $3^{2x-2}\cdot 86=86;$ $3^{2x-2}=1;$ $3^{2x-2}=3^0;$ $2x-2=0;$ $x=1.$ *Відповідь*: 1. ◁	У лівій частині рівняння всі члени містять вирази виду 3^{2x} (показники степенів відрізняються тільки вільними членами). У цьому випадку зручно винести за дужки в лівій частині рівняння найменший степінь числа 3, тобто 3^{2x-2}.

Приклад 4* Розв'яжіть рівняння $(1+b^2)^{\sqrt{x}}=(1+b^2)^{4-\sqrt{x}}$.

Розв'язання	Коментар
ОДЗ: $x\geqslant 0$, $b\in \boldsymbol{R}$. Розглянемо два випадки. 1) При $b=0$ одержуємо рівняння $1^{\sqrt{x}}=1^{4-\sqrt{x}}$, корені якого — усі дійсні числа, що входять до ОДЗ, тобто $x\geqslant 0$. 2) При $b\neq 0$ $1+b^2\neq 1$, і тоді задане рівняння рівносильне рівнянню $\sqrt{x}=4-\sqrt{x}$. Звідси $\sqrt{x}=2$, тоді $x=4$. *Відповідь*: 1) при $b=0$ $x\in[0;+\infty)$; 2) при $b\neq 0$ $x=4$. ◁	У заданому рівнянні x — змінна, b — параметр. Проаналізувавши основу степенів у цьому рівнянні, робимо висновок, що при будь-яких значеннях b основа $1+b^2\geqslant 1$. Функція $y=a^x$ при $a>1$ є зростаючою, а при $a=1$ — сталою (див. графіки функції $y=a^x$, наведені в табл. 3). Основа $1+b^2$ при $b=0$ дорівнює 1, а при всіх інших значеннях b — більша за 1. Розглянемо кожний із цих випадків окремо: $b=0$ і $b\neq 0$.

Запитання

1. Поясніть, у яких випадках показникове рівняння $a^x=b$ (де $a>0$ і $a\neq 1$) має корені. У яких випадках воно не має коренів? Наведіть приклади, проілюструйте їх графічно.

2. Якому рівнянню рівносильне показникове рівняння $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ при $a>0$ і $a\neq 1$? Наведіть приклади.

3*. Чи зміниться відповідь на запитання 2, якщо для основи степенів буде задано тільки обмеження $a>0$?

Вправи

У завданнях 3.1.1–3.1.5 розв'яжіть рівняння.

3.1.1. 1°) $4^x = 8$; 2°) $3^x = 9^{x+1}$; 3°) $5^{3x-1} = 0{,}2$; 4°) $7^{1-4x} = 1$; 5°) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} = \sqrt[4]{2}$; 6°) $3^{x^2-4x} = 9$; 7) $4^x = 2^{6+x-x^2}$; 8) $2^{2^x} = 2$; 9°) $2^x = 4$; 10°) $2^x = 16$; 11°) $3^x = -1$; 12°) $2^x = 32$; 13°) $3^x = 0$; 14°) $5^x = 1$; 15) $3^x - 3 = 0$; 16) $3^{2x} = 81$; 17°) $2^{3x} = 8$; 18) $3^{x^2-5x+8} = 9$; 19) $7^x = 7^{2-x}$; 20) $25^x = 5^{3-x}$; 21*) $2^x \cdot 3^{x+1} = 108$; 22*) $3^x \cdot 5^{2x-3} = 45$.

3.1.2. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{9}{16}\right)^x = \frac{3}{8}$; 2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{10}{15}\right)^x = \frac{2}{5}$; 3) $\left(\frac{2}{8}\right)^x\left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$.

3.1.3. 1) $2^{x^2} = \frac{16^2}{4^x}$; 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2x^2}{3}} = 4^{-x} \cdot 8^{-4}$; 3) $(0{,}5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$; 4) $\frac{3^{x^2}}{27} = 9^x$; 5) $2^{x(x+2)-\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2} \cdot 4^x$.

3.1.4. 1°) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$; 2°) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$; 3°) $4^{x+1} + 4^x = 320$; 4°) $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$; 5°) $3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x-2} = 79$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 4{,}8$; 7) $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 162$; 8) $5 \cdot 9^x + 9^{x-2} = 406$.

3.1.5*. 1) $\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^{2x-3} = \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^{x+5}$;

2) $(1+|a|)^x = (1+|a|)^{2-x}$;

3) $\left(1+\sqrt{a}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(1+\sqrt{a}\right)^{6-\frac{2}{x}}$.

3.2. Розв'язування більш складних показникових рівнянь та їх систем

Таблиця 4

Схема пошуку плану розв'язування показникових рівнянь

Орієнтир	Приклад
1. **Позбуваємося числових доданків у показниках степенів** (використовуємо справа наліво основні формули дій над степенями, наведені в табл. 3).	$$4^{x+1}-3\cdot 2^x-10=0.$$ ▶ $4^x\cdot 4^1-3\cdot 2^x-10=0$. Ураховуючи, що $4^x=2^{2x}$, зводимо степені до однієї основи 2: $$4\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x-10=0.$$
2. **Якщо можливо, зводимо всі степені (зі змінною в показнику) до однієї основи** *і виконуємо заміну змінної*.	Виконавши заміну $2^x=t$, отримаємо рівняння $$4t^2-3t-10=0;\ t_1=2,\ t_2=-\frac{5}{4}.$$ У результаті оберненої заміни маємо: $2^x=2$, тобто $x=1$, або $2^x=-\frac{5}{4}$ — коренів немає. *Відповідь*: 1. ◁
3. Якщо не можна звести всі степені до однієї основи, то пробуємо звести їх **до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння** (*усі члени якого мають однаковий сумарний степінь і яке розв'язується почленним діленням обох частин рівняння на найбільший степінь однієї з двох одержаних основ*).	$$4^x+3\cdot 6^x-4\cdot 9^x=0.$$ ▶ Зведемо всі степені до двох основ 2 і 3: $$2^{2x}+3\cdot 2^x\cdot 3^x-4\cdot 3^{2x}=0.$$ Маємо однорідне рівняння (сумарний степінь усіх членів однаковий — $2x$). Для його розв'язування поділимо обидві частини на $3^{2x}\neq 0$: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+3\left(\frac{2}{3}\right)^x-4=0$. Виконаємо заміну $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$, одержимо: $t^2+3t-4=0$; $t_1=1$, $t_2=-4$. У результаті оберненої заміни маємо: $\left(\frac{2}{3}\right)^x=-4$ — коренів немає або $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$, тоді $x=0$. *Відповідь*: 0. ◁
4. В інших випадках **переносимо всі члени рівняння в один бік і пробуємо розкласти одержаний вираз на множники або** застосовуємо спеціальні прийоми розв'язування, у яких **використовуються властивості відповідних функцій.**	$$6^x-9\cdot 2^x-2\cdot 3^x+18=0.$$ ▶ Якщо попарно згрупувати члени в лівій частині рівняння і в кожній парі винести за дужки спільний множник, то одержимо $2^x(3^x-9)-2(3^x-9)=0$. Тепер можна винести за дужки спільний множник 3^x-9: $$(3^x-9)\cdot(2^x-2)=0.$$ Тоді $3^x-9=0$ або $2^x-2=0$. Одержуємо два рівняння: 1) $3^x=9$, тоді $x=2$; 2) $2^x=2$, тоді $x=1$. *Відповідь*: 2; 1. ◁

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Для розв'язування більш складних показникових рівнянь (порівняно з тими, які було розглянуто в п. 3.1) найчастіше використовують *заміну змінних*. Щоб зорієнтуватися, чи можна ввести заміну змінних у даному показниковому рівнянні, часто буває корисно на початку розв'язування *позбутися числових доданків у показниках степенів*, використовуючи формули

$$a^{u+v}=a^u a^v \text{ і } a^{u-v}=\frac{a^u}{a^v}.$$

Наприклад, у рівнянні

$$4^{x+1}-3\cdot 2^x-10=0 \qquad (1)$$

замість 4^{x+1} записуємо добуток $4^x\cdot 4^1$ і одержуємо рівняння

$$4^x\cdot 4-3\cdot 2^x-10=0, \qquad (2)$$

рівносильне заданому.

Потім намагаємося *всі степені* (зі змінною в показнику) *звести до однієї основи і виконати заміну змінної*.

Наприклад, у рівнянні (2) степінь з основою 4 можна записати як степінь з основою 2: $4^x=(2^2)^x=2^{2x}$ і одержати рівняння

$$2^{2x}\cdot 4-3\cdot 2^x-10=0. \qquad (3)$$

Нагадаємо загальний **орієнтир**

Якщо у рівнянні, нерівності або тотожності кілька разів присутній один і той самий вираз зі змінною, то зручно цей вираз позначити однією буквою (новою змінною).

Звертаємо увагу на те, що $2^{2x}=(2^x)^2$. Отже, до рівняння (3) змінна фактично входить тільки у вигляді степеня 2^x, тому в цьому рівнянні зручно ввести заміну $2^x=t$ і одержати квадратне рівняння

$$4t^2-3t-10=0. \qquad (4)$$

Знаходимо корені цього рівняння, а потім виконуємо обернену заміну (див. розв'язання, наведене в табл. 4).

Зазначимо, що використання як основних формул дій над степенями, так і заміни змінної та оберненої заміни завжди приводить до рівняння, рівносильного заданому на його ОДЗ (у рівнянні (1) — на множині всіх дійсних чисел), через те що всі вказані перетворення ми можемо виконати і в прямому, і в зворотному напрямках. (Отже, ми завжди зможемо довести, що кожний корінь одного рівняння є коренем другого й навпаки, — аналогічно обґрунтуванню рівносильного переходу для найпростіших показникових рівнянь в п. 3.1.)

У тих випадках, коли всі степені (зі змінною в показнику) у показниковому рівнянні, яке не зводиться безпосередньо до найпростішого, не вдається звести до однієї основи, потрібно *спробувати звести всі степені до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння*.

Наприклад, розглянемо рівняння

$$4^x+3\cdot 6^x-4\cdot 9^x=0. \qquad (5)$$

Усі степені в цьому рівнянні можна подати як степені з основами 2 і 3, оскільки $4^x=(2^2)^x=2^{2x}$; $9^x=(3^2)^x=3^{2x}$; $6^x=(2\cdot 3)^x=$ $=2^x\cdot 3^x$.

Одержуємо рівняння

$$2^{2x}+3\cdot 2^x\cdot 3^x-4\cdot 3^{2x}=0. \qquad (6)$$

Усі одночлени, розташовані в лівій частині цього рівняння, мають степінь $2x$ (степінь одночлена $2^x\cdot 3^x$ теж дорівнює $x+x=2x$).

Нагадаємо загальний **орієнтир** (розглянутий у підручнику для 10 класу).

Якщо всі члени рівняння, у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної), мають однаковий сумарний степінь*, то рівняння називається однорідним.

* Звичайно, якщо рівняння має вигляд $f=0$ (де f — многочлен), то йдеться тільки про степінь членів многочлена f, оскільки нуль-многочлен степеня не має.

Розв'язують однорідне рівняння почленним діленням обох його частин на степінь із найбільшим із наявних у рівнянні показником.

Отже, рівняння (6) є однорідним, і його можна розв'язати діленням обох частин або на 2^{2x}, або на 3^{2x}. Зазначимо, що при всіх значеннях x вирази 2^{2x} і 3^{2x} відмінні від нуля. Отже, під час ділення на ці вирази не може відбутися втрата коренів (як це могло бути, наприклад, для однорідних тригонометричних рівнянь), і в результаті ділення обох частин рівняння на будь-який із цих виразів завжди одержуємо рівняння, рівносильне заданому.

Наприклад, якщо розділити обидві частини рівняння (6) на $3^{2x} \neq 0$, одержуємо $\frac{2^{2x}}{3^{2x}} + \frac{3 \cdot 2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} - \frac{4 \cdot 3^{2x}}{3^{2x}} = 0$ або після скорочення $\frac{2^{2x}}{3^{2x}} + 3 \cdot \frac{2^x}{3^x} - 4 = 0$. В останньому рівнянні всі члени можна подати як степені з однією основою $\frac{2}{3}$, тобто: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0$, і виконати заміну $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$. Подальше розв'язання одержаного рівняння повністю аналогічне розв'язанню рівняння (2).

Повне розв'язання цього рівняння наведене в табл. 4.

Складаючи план розв'язування окремих показникових рівнянь, слід пригадати про доцільність *перенесення всіх членів рівняння в один бік і подальшого розкладання одержаного виразу на множники*, наприклад із використанням групування членів, як це зроблено в табл. 4 для рівняння

$$6^x - 9 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x + 18 = 0.$$

Для розв'язування деяких показникових рівнянь можна використовувати властивості відповідних функцій (ці методи розглянуто в § 8).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\frac{6}{3^x} - \frac{4}{3^x + 1} = 1$.

Розв'язання	Коментар
▶ Застосувавши заміну змінної $3^x = t$, $t > 0$, одержуємо $$\frac{6}{t} - \frac{4}{t+1} = 1.$$ Тоді $6(t+1) - 4t = t(t+1)$; $t^2 - t - 6 = 0$. Звідси $t_1 = -2$, $t_2 = 3$. У результаті оберненої заміни маємо: $3^x = -2$ (коренів немає) або $3^x = 3$, тоді $x = 1$. *Відповідь*: 1. ◁	У задане рівняння змінна входить тільки у вигляді степеня з однією основою: 3^x, тому зручно застосувати заміну $3^x = t$ і одержати дробове рівняння. Знаходимо його корені, а потім виконуємо обернену заміну. Як уже зазначалося, заміна й обернена заміна змінної — це рівносильні перетворення заданого рівняння, але під час розв'язування одержаного дробового рівняння треба подбати про те, щоб не отримати сторонніх коренів (для цього, наприклад, достатньо урахувати, що $t = 3^x > 0$, і тоді ОДЗ одержаного рівняння $t \neq -1$ і $t \neq 0$ буде врахована автоматично).

Приклад 2 Розв’яжіть рівняння $25^{x+\frac{1}{2}} - 10\cdot 5^{x-1} - 3 = 0$.

Розв’язання	Коментар
▶ $25^x \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 10\frac{5^x}{5^1} - 3 = 0$; $5^{2x}\cdot 5 - 2\cdot 5^x - 3 = 0$. Виконаємо заміну $5^x = t$ і отримаємо рівняння $5t^2 - 2t - 3 = 0$, його корені $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{3}{5}$. У результаті оберненої заміни маємо: $5^x = 1$, тоді $x = 0$, або $5^x = -\frac{3}{5}$ — коренів немає. *Відповідь*: 0. ◁	1. Позбуваємося числових доданків у показниках степенів. 2. Зводимо всі степені (зі змінною в показнику) до однієї основи 5. 3. Виконуємо заміну $5^x = t$, розв’язуємо одержане рівняння, здійснюємо обернену заміну і розв’язуємо одержані найпростіші показникові рівняння (ураховуємо, що всі перетворення були рівносильними).

Приклад 3 Розв’яжіть рівняння $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$.

Розв’язання	Коментар
▶ $2^x \cdot 2^3 - 3^x - 3^x \cdot 3^1 + 2^x = 0$; $9\cdot 2^x - 4\cdot 3^x = 0 \,\vert\, :3^x \neq 0$; $9\cdot\frac{2^x}{3^x} - \frac{4\cdot 3^x}{3^x} = 0$; $9\left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2$; $x = 2$. *Відповідь*: 2. ◁	1. Позбуваємося числових доданків у показниках степенів, переносимо всі члени рівняння в один бік і зводимо подібні члени. 2. Звертаємо увагу на те, що степені всіх членів одержаного рівняння $9\cdot 2^x - 4\cdot 3^x = 0$ (з двома основами 2 і 3) однакові (дорівнюють x), отже, це рівняння однорідне, його можна розв’язати діленням обох частин на степінь з основою 2 або 3 і найбільшим показником — або на 2^x, або на 3^x. Ураховуючи, що $3^x \neq 0$ при всіх значеннях x, у результаті ділення на 3^x отримуємо рівняння, рівносильне попередньому (а відповідно, і заданому).

Під час розв’язування систем рівнянь, що містять показникові функції, найчастіше використовують традиційні методи розв’язування систем рівнянь: метод підстановки і метод заміни змінних.

Приклад 4 Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 1, \\ 4^x + 4^y = 5. \end{cases}$

Розв’язання	Коментар
▶ Із першого рівняння системи маємо: $y = 1 - x$. Тоді з другого рівняння одержуємо $4^x + 4^{1-x} = 5$, тобто $4^x + \frac{4^1}{4^x} = 5$. Виконаємо заміну $4^x = t$, $t > 0$, одержуємо рівняння $t + \frac{4}{t} = 5$, з якого отримуємо рівняння $t^2 - 5t + 4 = 0$, що має корені $t_1 = 1$ і $t_2 = 4$.	Якщо з першого рівняння системи y виразити через x і підставити в друге рівняння, то одержимо показникове рівняння, яке ми вже вміємо розв’язувати (аналогічно до того, як це було зроблено в прикладі 2).

Виконуємо обернену заміну. Одержуємо: $4^x=1$, тоді $x_1=0$, або $4^x=4$, звідки $x_2=1$. Знаходимо відповідні значення змінної y: $y=1-x$.

Якщо $x_1=0$, то $y_1=1$;
якщо $x_2=1$, то $y_2=0$.

Відповідь: $(0;1)$, $(1;0)$. ◁

Виконуючи заміну змінної, ураховуємо, що $t=4^x\neq 0$. Тоді в одержаному дробовому рівнянні $t+\frac{4}{t}=5$ знаменник $t\neq 0$. Отже, це дробове рівняння рівносильне рівнянню

$$t^2-5t+4=0.$$

Приклад 5* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}5^x-3^y=16,\\ 5^{\frac{x}{2}}-3^{\frac{y}{2}}=2.\end{cases}$

Розв'язання	Коментар
▶ Виконавши заміну змінних $5^{\frac{x}{2}}=u$ і $3^{\frac{y}{2}}=v$, одержуємо систему рівнянь $\begin{cases}u^2-v^2=16,\\ u-v=2.\end{cases}$ Із другого рівняння цієї системи маємо $u=2+v$. Тоді з першого рівняння одержуємо $(2+v)^2-v^2=16$. Звідси $v=3$, тоді $u=5$. Виконуємо обернену заміну: $3^{\frac{y}{2}}=3$, тоді $\frac{y}{2}=1$, отже, $y=2$; $5^{\frac{x}{2}}=5$, тоді $\frac{x}{2}=1$, отже, $x=2$. *Відповідь*: $(2;2)$. ◁	Якщо позначити $5^{\frac{x}{2}}=u$ і $3^{\frac{y}{2}}=v$, то $5^x=u^2$ і $3^y=v^2$. Тоді задана система рівнянь буде рівносильною алгебраїчній системі, яку легко розв'язати. Після виконання оберненої заміни одержуємо систему найпростіших показникових рівнянь.

Запитання

1. Поясніть на прикладах, як можна скласти план розв'язування показникових рівнянь, які не вдається безпосередньо звести до найпростіших.
2. Яку заміну змінних можна виконати під час розв'язування рівняння $4^{2x}+2\cdot 4^x-3=0$? Яке рівняння одержимо після виконання заміни?
3. Поясніть, чому рівняння $5^x=7^x$ і $2^{2x}+3\cdot 2^x\cdot 5^x-4\cdot 5^{2x}=0$ є однорідними. Як можна їх розв'язати?

Вправи

У завданнях 3.2.1–3.2.5 розв'яжіть рівняння.

3.2.1°. 1) $5^{2x}+4\cdot 5^x-5=0$; 3) $3^{2x}-2\cdot 3^x=3$; 5) $\frac{6}{4^x-2}-\frac{5}{4^x+1}=2$.

2) $6^{2x}-5\cdot 6^x-6=0$; 4) $\frac{8}{5^x-3}-\frac{6}{5^x+1}=3$;

3.2.2. 1) $49^x - 6\cdot 7^x - 7 = 0$; 5) $2^{x+1} + 4^x = 80$;

2) $64^x - 7\cdot 8^x - 8 = 0$; 6) $\dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$;

3) $2^x + 2^{2-x} = 5$; 7) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$;

4) $3^x + 3^{2-x} = 10$; 8*) $10^{\sin^2 x} + 10^{\cos^2 x} = 11$.

3.2.3. 1°) $7^x = 9^x$; 4) $4^{x+1} + 4\cdot 3^x = 3^{x+2} - 4^x$;

2°) $5\cdot 3^x - 3\cdot 5^x = 0$; 5) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 2\cdot 5^x + 5^{x+1}$;

3) $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$; 6) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

3.2.4. 1) $2^{2x} + 2^x\cdot 5^x - 2\cdot 5^{2x} = 0$; 4) $4\cdot 9^x - 7\cdot 12^x + 3\cdot 16^x = 0$;

2) $3^{2x} + 2\cdot 3^x\cdot 7^x - 3\cdot 7^{2x} = 0$; 5) $5\cdot 4^x - 7\cdot 10^x + 2\cdot 25^x = 0$.

3) $4^x = 3\cdot 49^x - 2\cdot 14^x$;

3.2.5*. 1) $6^x - 4\cdot 3^x - 9\cdot 2^x + 36 = 0$; 3) $4\cdot 20^x - 20\cdot 5^{x-1} + 5\cdot 4^{x+1} - 20 = 0$;

2) $5\cdot 15^x - 3\cdot 5^{x+1} - 3^x + 3 = 0$; 4) $8^x - 4^x - 2^{x+3} + 8 = 0$.

3.2.6. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $2^x = 3 - x$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$;

2) $3^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$.

3.2.7*. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 3.2.6, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

3.2.8. Розв'яжіть систему рівнянь:

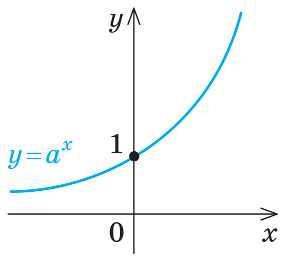
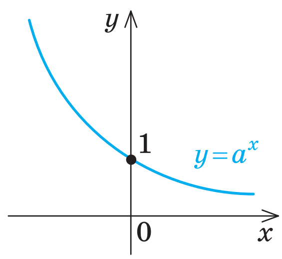
1) $\begin{cases} 4^{x+y} = 16, \\ 5^{x+2y-1} = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2^x + 2^y = 6; \end{cases}$ 5*) $\begin{cases} 3^x - 2^y = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y}{2}} = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3^{2y-x} = \dfrac{1}{81}, \\ 3^{x-y+2} = 27; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3^x - 3^y = 24; \end{cases}$ 6*) $\begin{cases} 5^x - 6^y = 589, \\ 5^{\frac{x}{2}} + 6^{\frac{y}{2}} = 31. \end{cases}$

3.3. Розв’язування показникових нерівностей

Таблиця 5

1. Графік показникової функції $y = a^x$ $(a > 0$ і $a \neq 1)$

$a > 1$	$0 < a < 1$
	

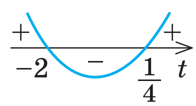
2. Схема рівносильних перетворень найпростіших показникових нерівностей

$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ *знак нерівності зберігається*	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ *знак нерівності змінюється на протилежний*

Приклади

$2^{x-3} > 4.$ ▶ $2^{x-3} > 2^2.$ Функція $y = 2^t$ є зростаючою, отже: $x - 3 > 2;$ $x > 5.$ *Відповідь*: $(5; +\infty)$. ◁	$0{,}7^{x-3} > 0{,}49.$ ▶ $0{,}7^{x-3} > 0{,}7^2.$ Функція $y = 0{,}7^t$ є спадною, отже: $x - 3 < 2;$ $x < 5.$ *Відповідь*: $(-\infty; 5)$. ◁

3. Розв’язування більш складних показникових нерівностей

Орієнтир	Приклад
I. За допомогою рівносильних перетворень (за схемою розв’язування показникових рівнянь, табл. 4) **задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду** (квадратної, дробової тощо). Після розв’язування одержаної нерівності приходимо до найпростіших показникових нерівностей.	$4^{x+1} + 7 \cdot 2^x - 2 > 0.$ ▶ $4^x \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0,$ $2^{2x} \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0.$ Виконаємо заміну $2^x = t$, одержимо нерівність $4t^2 + 7t - 2 > 0$, множина розв’язків якої $t < -2$ або $t > \frac{1}{4}$ (див. рисунок).  У результаті оберненої заміни отримаємо $2^x < -2$ (розв’язків немає) або $2^x > \frac{1}{4}$, звідки $2^x > 2^{-2}$, тобто $x > -2$. *Відповідь*: $(-2; +\infty)$. ◁

II. Застосовуємо загальний *метод інтервалів* — зводимо задану нерівність до виду $f(x) \gtrless 0$ і використовуємо таку схему.

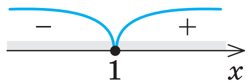
1. **Знайти ОДЗ.**
2. **Знайти нулі функції $f(x)$.**
3. **Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які ОДЗ розбивається нулями.**
4. **Записати відповідь, ураховуючи знак нерівності.**

$$3^x + 4^x > 7.$$

▶ Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Задана нерівність рівносильна нерівності $3^x + 4^x - 7 > 0$.

Позначимо $f(x) = 3^x + 4^x - 7$.

1. ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$.
2. Нулі функції: $f(x) = 0$; $3^x + 4^x - 7 = 0$. Оскільки функція $f(x) = 3^x + 4^x - 7$ є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій), то значення 0 вона набуває тільки в одній точці області визначення: $x = 1$ $\left(f(1) = 3^1 + 4^1 - 7 = 0\right)$.
3. Позначаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (див. рисунок), і записуємо множину розв'язків нерівності $f(x) > 0$.



Відповідь: $(1; +\infty)$. ◁

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Розв'язування найпростіших показникових нерівностей виду $a^x > b$ (або $a^x < b$), де $a > 0$ і $a \neq 1$, ґрунтується на властивостях функції $y = a^x$, яка зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$. Наприклад, щоб знайти множину розв'язків нерівності $a^x > b$ при $b > 0$, достатньо подати b у вигляді $b = a^c$. Одержуємо нерівність

$$a^x > a^c. \qquad (1)$$

При $a > 1$ функція $y = a^x$ зростає, отже, більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента, тому з нерівності (1) одержуємо $x > c$ (знак цієї нерівності збігається зі знаком нерівності (1)).

При $0 < a < 1$ функція $y = a^x$ спадає, отже, більшому значенню функції відповідає менше значення аргумента, тому з нерівності (1) одержуємо $x < c$ (знак цієї нерівності протилежний до знака нерівності (1)).

Графічно це проілюстровано на рис. 3.3.

Наприклад, щоб розв'язати нерівність $5^x > 25$, достатньо подати її у вигляді $5^x > 5^2$, урахувати, що $5 > 1$ (функція $y = 5^x$ зростаюча, отже, при переході від порівняння функцій до порівняння аргументів знак нерівності не змінюється), і записати множину розв'язків: $x > 2$.

Зауважимо, що множину розв'язків заданої нерівності можна записувати у вигляді нерівності $x > 2$ або у вигляді проміжку $(2; +\infty)$.

Аналогічно, щоб розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \frac{1}{16}$, достатньо подати цю нерівність у вигляді $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^2$, урахувати, що $\frac{1}{4} < 1$ (функція $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ спадна, отже, при переході від порівняння функцій до порівняння аргументів знак нерівності змінюється на протилежний), і записати множину розв'язків: $x < 2$.

Ураховуючи, що при будь-яких додатних значеннях a значення a^x завжди більше нуля, одержуємо, що при $b \leqslant 0$

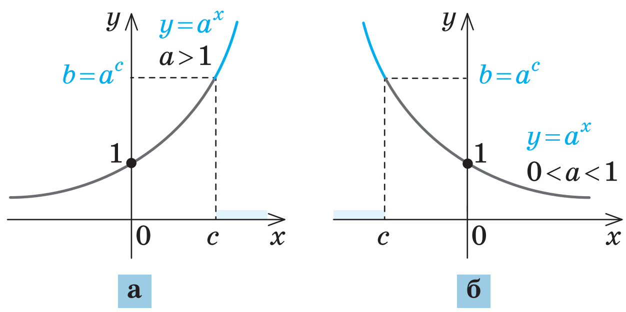


Рис. 3.3

нерівність $a^x < b$ розв'язків не має, а нерівність $a^x > b$ виконується при всіх дійсних значеннях x.

Наприклад, нерівність $7^x < -7$ не має розв'язків, а множиною розв'язків нерівності $7^x > -7$ є всі дійсні числа.

Узагальнюючи наведені вище міркування стосовно розв'язування найпростіших показникових нерівностей, зазначимо, що **при $a > 1$ нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$, а при $0 < a < 1$ — нерівності $f(x) < g(x)$.**

Коротко це твердження можна записати так:

- якщо $a > 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (*знак нерівності зберігається*);
- якщо $0 < a < 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x) < g(x)$ (*знак нерівності змінюється на протилежний*).

Щоб обґрунтувати рівносильність відповідних нерівностей, достатньо зазначити, що при $a > 1$ нерівності

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \tag{2}$$

$$f(x) > g(x) \tag{3}$$

можуть бути правильними тільки одночасно, оскільки функція $y = a^t$ при $a > 1$ є зростаючою і більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента (і навпаки: більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції). Отже, усі розв'язки нерівності (2) (які перетворюють її на правильну числову нерівність) будуть і розв'язками нерівності (3), та навпаки: усі розв'язки нерівності (3) будуть розв'язками нерівності (2). А це означає, що нерівності (2) і (3) рівносильні. ○

Аналогічно обґрунтовується рівносильність нерівностей $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ і $f(x) < g(x)$ при $0 < a < 1$.

У найпростіших випадках під час розв'язування показникових нерівностей, як і під час розв'язування показникових рівнянь, треба за допомогою основних формул дій над степенями звести (якщо це можливо) задану нерівність до виду $a^{f(x)} \gtrless a^{g(x)}$.

Для розв'язування більш складних показникових нерівностей найчастіше використовують заміну змінних або властивості відповідних функцій (ці методи розглянуто в § 8). Аналогічно до розв'язування показникових рівнянь усі рівносильні перетворення нерівності завжди виконуються на її області допустимих значень (ОДЗ), тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису цієї нерівності. Для показникових нерівностей досить часто областю допустимих значень є множина всіх дійсних чисел. У цих випадках, як правило, ОДЗ не знаходять і не записують до розв'язання нерівності (див. приклад 1). Якщо ж у процесі розв'язування показникової нерівності рівносильні перетворення виконуються не на всій множині дійсних чисел, то доводиться враховувати ОДЗ (див. приклад 2).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ

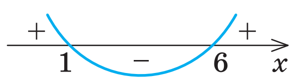
Приклад 1 Розв'яжіть нерівність $0{,}6^{x^2-7x+6} \geqslant 1$.

Розв'язання

▶ $0{,}6^{x^2-7x+6} \geqslant 0{,}6^0$.

Оскільки функція $y = 0{,}6^t$ є спадною, то $x^2 - 7x + 6 \leqslant 0$.

Звідси $1 \leqslant x \leqslant 6$ (див. рисунок).



Відповідь: $[1; 6]$. ◁

Коментар

Запишемо праву частину нерівності як степінь числа 0,6, тобто $1 = 0{,}6^0$.

Оскільки $0{,}6 < 1$, то при переході від порівняння степенів до порівняння показників степеня знак нерівності змінюється на протилежний (одержуємо нерівність, рівносильну заданій).

Для розв'язування одержаної квадратної нерівності використаємо графічну ілюстрацію.

Приклад 2

Розв'яжіть нерівність $3^{\sqrt{x}}-3^{2-\sqrt{x}}\leqslant 8$.

Розв'язання

► ОДЗ: $x\geqslant 0$.

$$3^{\sqrt{x}}-\frac{3^2}{3^{\sqrt{x}}}\leqslant 8.$$

Виконуємо заміну змінної $3^{\sqrt{x}}=t$ $(t>0)$, у результаті отримуємо нерівність $t-\frac{9}{t}\leqslant 8$, яка рівносильна нерівності $\frac{t^2-8t-9}{t}\leqslant 0$.

Оскільки $t>0$, одержуємо $t^2-8t-9\leqslant 0$. Звідси $-1\leqslant t\leqslant 9$. Ураховуючи, що $t>0$, маємо $0<t\leqslant 9$.

Виконуючи обернену заміну, одержуємо $0<3^{\sqrt{x}}\leqslant 9$. Тоді $3^{\sqrt{x}}\leqslant 3^2$.

Функція $y=3^t$ зростаюча, отже, $\sqrt{x}\leqslant 2$. Ураховуючи ОДЗ, одержуємо $0\leqslant x\leqslant 4$.

Відповідь: $[0;4]$. ◁

Коментар

Оскільки рівносильні перетворення нерівностей виконуються на ОДЗ початкової нерівності, то врахуємо цю ОДЗ. Використовуючи формулу $a^{u-v}=\frac{a^u}{a^v}$, позбуваємося числового доданка в показнику степеня й одержуємо степені з однією основою 3, що дозволяє виконати заміну змінної

$$3^{\sqrt{x}}=t,\text{ де } t>0.$$

В одержаній нерівності знаменник є додатним, тому цю дробову нерівність можна звести до рівносильної їй квадратної.

Після виконання оберненої заміни треба врахувати не тільки зростання функції $y=3^t$, а й ОДЗ початкової нерівності.

Приклад 3*

Розв'яжіть нерівність $2^{2x+1}-5\cdot 6^x+3^{2x+1}>0$.

Розв'язання

► Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Позначимо $f(x)=2^{2x+1}-5\cdot 6^x+3^{2x+1}$.

1. ОДЗ: $x\in \boldsymbol{R}$.
2. Нулі функції: $f(x)=0$;

$2^{2x+1}-5\cdot 6^x+3^{2x+1}=0$;

$2^{2x}\cdot 2-5\cdot 6^x+3^{2x}\cdot 3=0$;

$2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x\cdot 3^x+3\cdot 3^{2x}=0\,\big|:3^{2x}\neq 0$;

$2\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+3=0$.

Застосуємо заміну змінної $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t$. Одержуємо:

$2t^2-5t+3=0$; $t_1=1$, $t_2=\frac{3}{2}$.

У результаті оберненої заміни маємо:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1\text{ або }\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{3}{2}.$$

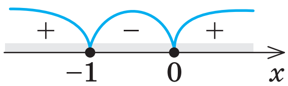
Звідси $x=0$ або $x=-1$.

Коментар

Задану нерівність можна розв'язувати або зведенням до алгебраїчної нерівності, або методом інтервалів. Для розв'язування її методом інтервалів використаємо схему, наведену в таблиці 5.

Для знаходження нулів функції зведемо всі степені до двох основ (2 і 3), щоб одержати однорідне рівняння. Це рівняння розв'язується діленням обох частин на степінь з основою 2 або 3 і найбільшим показником, наприклад на 3^{2x}. Ураховуючи, що $3^{2x}\neq 0$ при всіх значеннях x, у результаті ділення на 3^{2x} одержуємо рівняння, рівносильне попередньому. Звичайно, для розв'язування заданої нерівності можна було врахувати, що $3^{2x}>0$ завжди, і після ділення

3. Позначаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з одержаних проміжків (див. рисунок) і записуємо множину розв'язків нерівності $f(x)>0$.



Відповідь: $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. ◁

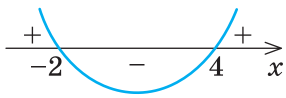
заданої нерівності на 3^{2x} та використання заміни $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$ одержати алгебраїчну нерівність.

Приклад 4* Розв'яжіть нерівність $(3^x-9)\sqrt{x^2-2x-8}\leqslant 0$.

Розв'язання

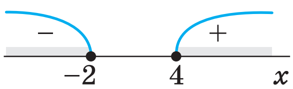
▶ Позначимо $f(x)=(3^x-9)\sqrt{x^2-2x-8}$.

1. ОДЗ: $x^2-2x-8\geqslant 0$. Тоді $x\leqslant -2$ або $x\geqslant 4$ (див. рисунок).



2. Нулі функції: $f(x)=0$;
$(3^x-9)\sqrt{x^2-2x-8}=0$, тоді $3^x-9=0$ або $\sqrt{x^2-2x-8}=0$.
Із першого рівняння: $x=2$ — не входить до ОДЗ; із другого: $x_1=-2$, $x_2=4$ (входять до ОДЗ).

3. Позначаємо нулі функції $f(x)$ на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які нулями розбивається ОДЗ (див. рисунок), і записуємо множину розв'язків нерівності $f(x)\leqslant 0$: $x\in(-\infty;-2]$ або $x=4$.



Відповідь: $x\in(-\infty;-2]\cup\{4\}$. ◁

Коментар

Задану нестрогу нерівність теж зручно розв'язувати методом інтервалів. Записуючи відповідь, треба враховувати, що *у випадку, коли ми розв'язуємо нестрогу нерівність $f(x)\leqslant 0$, усі нулі функції $f(x)$ мають увійти до відповіді.*

Запитання

1. Поясніть, у яких випадках показникові нерівності $a^x>b$ і $a^x<b$ (де $a>0$ і $a\neq 1$) мають розв'язки. У яких випадках дані нерівності не мають розв'язків? Наведіть приклади. Проілюструйте їх графічно.

2. Якій нерівності рівносильна показникова нерівність $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ при $a>1$? При $0<a<1$? Наведіть приклади.

Вправи

У завданнях 3.3.1–3.3.4 розв'яжіть нерівність.

3.3.1. 1°) $2^x > 1$;
2°) $2^x > \frac{1}{2}$;
3) $3^x > 0$;
4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 0$;
5°) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 9$;
6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \leqslant 4$;
7°) $5^x \geqslant 25\sqrt{5}$;
8) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} < 16$;
9*) $0{,}3^{\frac{x^2-7x+6}{x-3}} \leqslant 1$;
10*) $1{,}3^{\frac{x^2-9x+8}{x-4}} \geqslant 1$.

3.3.2. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > \frac{5}{2}$;
2°) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$;
3) $3^{2x+1} + 8 \cdot 3^x - 3 \geqslant 0$;
4) $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x - 4 \leqslant 0$;
5) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$;
6) $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 \leqslant 0$.

3.3.3. 1) $3^x > 5^x$;
2) $7^{x-1} \leqslant 2^{x-1}$;
3*) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} \geqslant 0$;
4*) $5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} \leqslant 8 \cdot 15^x$.

3.3.4*. 1) $(2^x - 2)\sqrt{x^2 - x - 6} \geqslant 0$;
2) $(3^{x-2} - 1)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0$;
3) $\sqrt{6 \cdot 3^x - 2} > 3^x + 1$;
4) $\sqrt{2 \cdot 5^{x+1} - 1} > 5^x + 2$.

§ 4 ЛОГАРИФМ ЧИСЛА. ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ

Таблиця 6

1. Логарифм числа

Означення	Приклади
Логарифмом додатного числа b за основою a **($a>0$, $a\neq1$) називається показник степеня, до якого треба піднести *a*, щоб одержати *b*.** Позначення: $\log_a b$.	1) $\log_4 16=2$, оскільки $4^2=16$; 2) $\log_7\sqrt{7}=\frac{1}{2}$, оскільки $7^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$.
***Десятковий логарифм — це логарифм за основою* 10.** Позначення: $\log_{10} b=\lg b$.	3) $\lg1000=3$, оскільки $10^3=1000$.
Натуральний логарифм — це логарифм за основою e (e — ірраціональне число, наближене значення якого $e\approx2,7$). Позначення: $\log_e b=\ln b$.	4) $\ln\frac{1}{e^2}=-2$, оскільки $e^{-2}=\frac{1}{e^2}$.

2. Основна логарифмічна тотожність

$\boxed{a^{\log_a b}=b}$, де $a>0$, $a\neq1$, $b>0$.	1) $3^{\log_3 5}=5$; 2) $10^{\lg2}=2$.

3. Властивості логарифмів і формули логарифмування ($a>0$, $a\neq1$, $x>0$, $y>0$)

1) $\log_a 1=0$;	*Логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює нулю.*
2) $\log_a a=1$;	*Логарифм числа, яке збігається з основою, дорівнює одиниці.*
3) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$;	*Логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників.*
4) $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$;	*Логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого й дільника.*
5) $\log_a x^n=n\log_a x$.	*Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня.*

4. Формула переходу до логарифмів з іншою основою

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\ \text{де}\ a>0,\ a\neq1,\ b>0,\ b\neq1,\ x>0$$

Наслідки

$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$	$\log_a b=\log_{a^k} b^k$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Логарифм числа

Якщо розглянути рівність $2^3 = 8$, то, знаючи будь-які два числа з цієї рівності, можна знайти третє.

Задана рівність	Що відомо	Що знаходимо	Запис	Назва
$2^3 = 8$	числа 2 і 3	число 8	$8 = 2^3$	степінь
	числа 8 і 3	число 2	$2 = \sqrt[3]{8}$	корінь третього степеня
	числа 8 і 2	число 3	$3 = \log_2 8$	логарифм

Перші дві операції, наведені в таблиці (піднесення до степеня й добування кореня n-го степеня), нам уже відомі, а з третьою — *логарифмуванням*, тобто знаходженням логарифма заданого числа, — ми ознайомимося в цьому параграфі.

У загальному вигляді операція логарифмування дозволяє з рівності $a^x = b$ (де $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$) знайти показник степеня x. Результат виконання цієї операції позначається $\log_a b$.

Означення. ***Логарифмом додатного числа b за основою a** ($a > 0$, $a \neq 1$) **називається показник степеня, до якого треба піднести a, щоб одержати b.***

Наприклад, $\log_2 8 = 3$, оскільки $2^3 = 8$; $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right) = 2$, оскільки $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = -2$, оскільки $4^{-2} = \frac{1}{16}$.

Зазначимо, що для додатних чисел b і a ($a \neq 1$) рівняння $a^x = b$ завжди має єдиний розв'язок, оскільки функція $y = a^x$ набуває всіх значень із проміжку $(0; +\infty)$ і при $a > 1$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ — спадною (рис. 4.1).

Отже, кожного свого значення $b > 0$ функція $y = a^x$ набуває тільки при одному значенні x. Тому *для будь-яких додатних чисел b і a* ($a \neq 1$) *рівняння* $a^x = b$ *має єдиний корінь* $x = \log_a b$.

При $b \leqslant 0$ рівняння $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) не має коренів, отже, *при* $b \leqslant 0$ *значення виразу* $\log_a b$ *не існує.*

Наприклад, не існують $\log_3(-9)$, $\log_2 0$, $\log_{\frac{1}{2}}(-7)$.

Зазначимо, що існують логарифми, які мають власні назви.

Логарифм за основою 10 називають десятковим логарифмом і позначають lg.

Наприклад,

$\log_{10} 7 = \lg 7$, $\lg 100 = \log_{10} 100 = 2$.

У недалекому минулому десятковим логарифмам віддавали перевагу й складали дуже детальні таблиці десяткових логарифмів, які використовувалися в різних обчисленнях. В епоху загальної комп'ютеризації

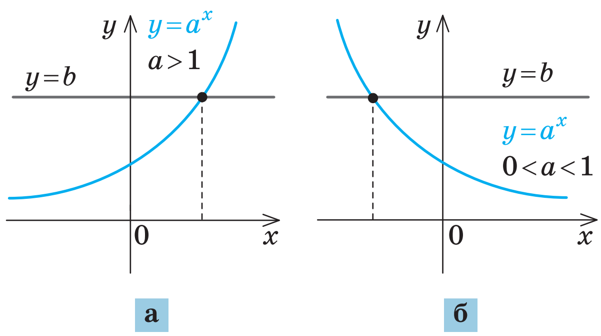


Рис. 4.1

десяткові логарифми втратили свою провідну роль. У сучасній науці й техніці широко використовуються логарифми, основою яких є особливе число e (так само відоме, як і число π). Число e, як і число π, — ірраціональне, $e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045...$. Число e можна означити через границю функції:

$$e = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ — друга чудова границя.}$$

Логарифм за основою e називають натуральним логарифмом і позначають ln.

Наприклад,

$$\log_e 7 = \ln 7,\ \ln\frac{1}{e} = \log_e \frac{1}{e} = -1.$$

2 Основна логарифмічна тотожність

За означенням логарифма, якщо $\log_a b = x$, то $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$). Якщо в останню рівність підставити замість x його значення, одержимо рівність, яка називається *основною логарифмічною тотожністю*:

$$a^{\log_a b} = b, \text{ де } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0.$$

Наприклад,

$$5^{\log_5 9} = 9,\ 10^{\lg 7} = 7,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2} = 2.$$

3 Властивості логарифмів і формули логарифмування

У всіх наведених нижче формулах $a > 0$ і $a \neq 1$.

1) З означення логарифма одержуємо:

$$\log_a 1 = 0,$$

оскільки $a^0 = 1$ (при $a > 0$, $a \neq 1$).

Отже, *логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює нулю.*

2) Оскільки $a^1 = a$, то

$$\log_a a = 1.$$

3) Щоб одержати формулу логарифма добутку xy ($x > 0$, $y > 0$), позначимо $\log_a x = u$, $\log_a y = v$. Тоді за означенням логарифма

$$x = a^u \text{ і } y = a^v. \qquad (1)$$

Перемноживши почленно дві останні рівності, отримаємо $xy = a^{u+v}$. За означенням логарифма з урахуванням уведених позначень з останньої рівності одержуємо $\log_a (xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$. Отже,

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y. \qquad (2)$$

Логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників.

4) Аналогічно, щоб одержати формулу логарифма частки $\frac{x}{y}$ ($x > 0$, $y > 0$), достатньо поділити почленно рівності (1). Тоді $\frac{x}{y} = a^{u-v}$. За означенням логарифма з урахуванням уведених позначень з останньої рівності одержуємо $\log_a \frac{x}{y} = u - v = \log_a x - \log_a y$. Отже,

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y. \qquad (3)$$

Логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника.

5) Щоб одержати формулу логарифма степеня x^n (де $x > 0$), позначимо $\log_a x = u$. За означенням логарифма $x = a^u$, тоді $x^n = a^{nu}$. За означенням логарифма з урахуванням позначення для u маємо $\log_a x^n = nu = n\log_a x$. Отже,

$$\log_a x^n = n\log_a x. \qquad (4)$$

Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня.

Ураховуючи, що при $x > 0$ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, за формулою (4) маємо

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x.$$

Отже, при $x > 0$ можна користуватися формулою

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x.$$

Цю формулу можна не запам'ятовувати, а кожного разу записувати корінь із додатного числа як відповідний степінь.

Зауваження. Іноді доводиться знаходити логарифм добутку xy і в тому випадку, коли числа x і y від'ємні ($x<0$, $y<0$). Тоді $xy>0$ і $\log_a(xy)$ існує, але формулою (2) скористатися не можна — вона обґрунтована тільки для додатних значень x і y. У випадку $xy>0$ маємо $xy=|x|\cdot|y|$, і тепер $|x|>0$ та $|y|>0$, отже, для логарифма добутку $|x|\cdot|y|$ можна скористатися формулою (2). Тому при $x<0$ і $y<0$ можемо записати

$$\log_a(xy)=\log_a(|x|\cdot|y|)=\log_a|x|+\log_a|y|.$$

Одержана формула справедлива і при $x>0$ та $y>0$, оскільки в цьому випадку $|x|=x$ і $|y|=y$. Отже,

$$\boxed{\text{при } xy>0\ \ \log_a(xy)=\log_a|x|+\log_a|y|.} \qquad (2')$$

Аналогічно можна узагальнити й формули (3) і (4):

$$\boxed{\text{при } \frac{x}{y}>0\ \ \log_a\frac{x}{y}=\log_a|x|-\log_a|y|,} \qquad (3')$$

$$\boxed{\text{при } x\neq 0\ \ \log_a x^{2k}=2k\log_a|x|.} \qquad (4')$$

4 Формула переходу до логарифмів з іншою основою

Нехай $\log_a x=u$ ($x>0$, $a>0$, $a\neq 1$). Тоді за означенням логарифма $a^u=x$. Прологарифмуємо обидві частини останньої рівності за основою b ($b>0$, $b\neq 1$). Одержимо $\log_b a^u=\log_b x$.

Використовуючи для лівої частини цієї рівності формулу логарифма степеня, отримаємо $u\log_b a=\log_b x$. Звідси $u=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$. Ураховуючи, що $u=\log_a x$, одержуємо:

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},$$

де $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, $x>0$.

Отже, *логарифм додатного числа x за старою основою a дорівнює логарифму цього самого числа x за новою основою b, поділеному на логарифм старої основи a за новою основою b.* ○

За допомогою останньої формули можна одержати такі *наслідки*.

1) Запишемо $\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}$. Ураховуючи, що $\log_b b=1$, маємо:

$$\boldsymbol{\log_a b=\frac{1}{\log_b a}},\ \text{де } a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1.$$

2) Аналогічно, ураховуючи формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої і формулу логарифма степеня, одержуємо (при $k\neq 0$):

$$\log_{a^k} b^k=\frac{\log_a b^k}{\log_a a^k}=\frac{k\log_a b}{k}=\log_a b.$$

Записавши одержану формулу справа наліво, маємо:

$$\boldsymbol{\log_a b=\log_{a^k} b^k},$$

де $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, $k\neq 0$.

Логарифми широко застосовуються для моделювання різноманітних процесів навколишнього життя. Наприклад, за відомим психофізіологічним законом Вебера — Фехнера сила p відчуття людиною певного подразника пропорційна логарифму інтенсивності S цього подразника. Гучність (рівень звукового тиску) звучання музичних інструментів, побутових приладів тощо обчислюють за формулою $p=10\lg\dfrac{S}{S_0}$, де S — значення інтенсивності звуку, а S_0 — нижнє граничне значення інтенсивності звуку (якщо $S<S_0$, то ми звук зовсім не чуємо). Величину p вимірюють у децибелах (дБ).

Зазначимо, що безпечною для слуху людини вважають гучність 40–50 дБ — це інтенсивність звучання звичайної розмови. Якщо ж ви прослуховуєте музику за допомогою навушників, які увімкнені так, щоб «перекричати» навколишній світ (тобто з інтенсивністю 80–100 дБ), то це шкідливо для здоров'я і може призвести до погіршення слуху або й зовсім до глухоти.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Обчисліть:

1) $\log_5 125$; 2) $\log_{\frac{1}{27}} 3$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ $\log_5 125 = 3$, оскільки $5^3 = 125$; ◁ 2) ▶ $\log_{\frac{1}{27}} 3 = -\frac{1}{3}$, оскільки $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$. ◁	Ураховуючи означення логарифма, потрібно підібрати такий показник степеня, щоб при піднесенні основи логарифма до цього степеня одержати число, яке стоїть під знаком логарифма.

Приклад 2

Запишіть розв'язки найпростіших показникових рівнянь:

1) $5^x = 3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 10$; 3) $10^x = \frac{1}{3}$.

Розв'язання	Коментар
За означенням логарифма: 1) ▶ $x = \log_5 3$; ◁ 2) ▶ $x = \log_{\frac{1}{3}} 10$; ◁ 3) ▶ $x = \lg \frac{1}{3}$. ◁	Для будь-яких додатних чисел b і a $(a \neq 1)$ рівняння $a^x = b$ має єдиний корінь. Показник степеня x, до якого потрібно піднести основу a, щоб одержати b, називається логарифмом b за основою a, тому $x = \log_a b$.

Приклад 3

Виразіть логарифм за основою 3 виразу $\frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}}$ (де $a > 0$ і $b > 0$) через логарифми за основою 3 чисел a і b. (Коротко кажуть: *«прологарифмуйте заданий вираз за основою 3»*.)

Розв'язання	Коментар
▶ $\log_3 \frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}} = \log_3 \frac{3^3 a^2}{b^{\frac{1}{5}}} =$	Спочатку запишемо вирази в чисельнику і знаменнику заданого виразу як степені чисел і букв.

$=\log_3(3^3a^2)-\log_3 b^{\frac{1}{5}}=$ $=\log_3 3^3+\log_3 a^2-\log_3 b^{\frac{1}{5}}=$ $=3\log_3 3+2\log_3 a-\frac{1}{5}\log_3 b=$ $=3+2\log_3 a-\frac{1}{5}\log_3 b.$ ◁	Потім урахуємо, що логарифм частки $\frac{3^3a^2}{b^{\frac{1}{5}}}$ додатних чисел дорівнює різниці логарифмів чисельника і знаменника, а потім те, що логарифм добутку 3^3a^2 дорівнює сумі логарифмів множників.

Приклад 4 Відомо, що $\log_2 5=a$, $\log_2 7=b$. Виразіть $\log_2 700$ через a і b.

Розв'язання	Коментар
▶ $\log_2 700=\log_2(7\cdot 5^2\cdot 2^2)=$ $=\log_2 7+\log_2 5^2+\log_2 2^2=$ $=\log_2 7+2\log_2 5+2\log_2 2=$ $=b+2a+2.$ ◁	Спочатку подамо число 700 як добуток степенів чисел 5 і 7 (заданих) та 2 (основи логарифма), а потім використаємо властивості логарифмів та підставимо в одержаний вираз значення $\log_2 5$ і $\log_2 7$.

Приклад 5* Прологарифмуйте за основою 10 вираз $\frac{ab^3}{c^2}$.

Розв'язання	Коментар
▶ Якщо $\frac{ab^3}{c^2}>0$, то $\lg\frac{ab^3}{c^2}=\lg\left\|ab^3\right\|-\lg\left\|c^2\right\|=$ $=\lg\left(\left\|a\right\|\cdot\left\|b^3\right\|\right)-\lg\left\|c^2\right\|=$ $=\lg\left\|a\right\|+\lg\left\|b^3\right\|-2\lg\left\|c\right\|=$ $=\lg\left\|a\right\|+3\lg\left\|b\right\|-2\lg\left\|c\right\|.$ ◁	Оскільки логарифми існують тільки для додатних чисел, ми можемо прологарифмувати заданий вираз тільки у випадку, коли $\frac{ab^3}{c^2}>0$. З умови не випливає, що в заданому виразі значення a, b і c додатні. Тому будемо користуватися узагальненими формулами логарифмування (2′)–(4′), а також урахуємо, що $\left\|ab^3\right\|=\left\|a\right\|\cdot\left\|b^3\right\|$, $\left\|b^3\right\|=\left\|b\right\|^3$, $\left\|c^2\right\|=\left\|c\right\|^2$.

Інколи доводиться шукати вираз, знаючи його логарифм. Таку операцію називають *потенціюванням*.

Приклад 6 Знайдіть x за його логарифмом:

1) $\lg x=\lg 5-2\lg 3+3\lg 2$; 2) $\log_a x=\frac{1}{2}\log_a b+5\log_a c-\log_a p$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ $\lg x=\lg 5-2\lg 3+3\lg 2$; $\lg x=\lg 5-\lg 3^2+\lg 2^3$; $\lg x=\lg\frac{5\cdot 2^3}{3^2}$; $x=\frac{5\cdot 2^3}{3^2}=\frac{40}{9}$. ◁	Користуючись формулами логарифмування справа наліво, запишемо праві частини заданих рівностей у вигляді логарифма якогось виразу M.

2) ▶ $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a b + 5\log_a c - \log_a p$;

$\log_a x = \log_a b^{\frac{1}{2}} + \log_a c^5 - \log_a p$;

$\log_a x = \log_a \frac{b^{\frac{1}{2}}c^5}{p}$; $x = \frac{b^{\frac{1}{2}}c^5}{p}$. ◁

З одержаної рівності $\log_a x = \log_a M$ отримуємо $x = M$.
(Як буде показано в § 5, значення x, що задовольняє рівність $\log_a x = \log_a M$, — єдине).

Приклад 7*

Обчисліть значення виразу $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5}+\frac{1}{2}\log_5 4}$.

Розв'язання	Коментар
▶ Оскільки $\log_{\sqrt{3}} 5 = \frac{1}{\log_5 \sqrt{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_5 3} = \frac{2}{\log_5 3}$, то $\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} = \frac{4}{\frac{2}{\log_5 3}} = 2\log_5 3 = \log_5 3^2 = \log_5 9$. Крім того, $\frac{1}{2}\log_5 4 = \log_5 4^{\frac{1}{2}} = \log_5 \sqrt{4} = \log_5 2$. Тоді $\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4 = \log_5 9 + \log_5 2 = \log_5 (9\cdot 2) = \log_5 18$. Отже, $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5}+\frac{1}{2}\log_5 4} = 5^{\log_5 18} = 18$. ◁	Спробуємо привести показник степеня заданого виразу до виду $\log_5 b$, щоб можна було скористатися основною логарифмічною тотожністю $5^{\log_5 b} = b$. Для цього перейдемо в показнику степеня до однієї основи логарифма (до основи 5).

Запитання

1. Сформулюйте означення логарифма додатного числа b за основою a ($a > 0$, $a \neq 1$).
2. Який логарифм називають десятковим і який — натуральним? Наведіть приклади запису й обчислення таких логарифмів.
3. 1) Запишіть основну логарифмічну тотожність. Наведіть приклади її використання.
   2*) Обґрунтуйте основну логарифмічну тотожність.
4. 1) Запишіть формули логарифмування. Сформулюйте їх зміст. Наведіть приклади використання цих формул.
   2*) Обґрунтуйте формули логарифмування.
5. 1) Запишіть формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої. Наведіть приклади використання цієї формули.
   2*) Обґрунтуйте формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої.

6*. Чи можна прологарифмувати вирази xy, $\frac{x}{y}$, x^4 у тому випадку, коли значення x і y від'ємні? Якщо так, як це зробити? Обґрунтуйте відповідні формули.

Вправи

4.1°. Перевірте правильність рівності:

1) $\log_2 16 = 4$; 3) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; 5) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$;

2) $\log_3 27 = 3$; 4) $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$; 6) $\log_{0,2} 0{,}008 = 3$.

4.2. Обчисліть:

1°) $\log_5 25$; 5) $\log_9 \frac{1}{27}$; 9*) $\log_{7+4\sqrt{3}} \left(7-4\sqrt{3}\right)$;

2°) $\log_4 64$; 6°) $\log_{\frac{1}{7}} 1$; 10*) $\log_{9-4\sqrt{5}} \left(9+4\sqrt{5}\right)$.

3°) $\log_3 \frac{1}{9}$; 7*) $\log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$;

4°) $\log_6 \sqrt{6}$; 8*) $\log_7 \sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}$;

4.3°. Користуючись означенням логарифма, запишіть розв'язки найпростіших показникових рівнянь:

1) $4^x = 9$; 3) $10^x = 11$; 5) $0{,}2^x = 0{,}7$;

2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 15$; 4) $5^x = 19$; 6) $e^x = 3$.

4.4. Користуючись основною логарифмічною тотожністю, спростіть вираз:

1) $5^{\log_5 7}$; 3) $\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}}$; 5*) $7^{1+\log_7 2}$;

2) $3^{\log_3 4}$; 4) $3{,}5^{\log_{3,5} 13}$; 6*) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 6-2}$.

4.5. Прологарифмуйте вираз за заданою основою, якщо $a>0$, $b>0$, $c>0$:

1°) $10a^3c^4$ за основою 10; 4) $\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}}{c^2}$ за основою e;

2) $\frac{0{,}1a^2b^5}{c^7}$ за основою 10; 5°) $9a^7\sqrt[3]{b}$ за основою 3;

3°) $a^2c\sqrt{b}$ за основою e; 6) $\frac{a^{\frac{2}{5}}b^4}{c^{\frac{1}{2}}}$ за основою 3.

4.6*. Прологарифмуйте вираз за основою 10, якщо $ab>0$ і $c\neq 0$:

1) $a^3b^5c^8$; 2) $\frac{\sqrt[3]{ab}}{c^2}$; 3) $\frac{c^4}{(ab)^{\frac{2}{5}}}$; 4) $100\sqrt[5]{abc^2}$.

4.7. Відомо, що $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$. Виразіть через a і b:

1) $\log_5 15$; 2) $\log_5 12$; 3) $\log_5 30$; 4) $\log_5 72$.

4.8. Знайдіть значення виразу:

1) $\lg 56+\lg 125-\lg 7$;
2) $\log_9 351-\log_9 13$;
3) $2\lg 5+\frac{1}{3}\lg 64$;
4) $\frac{\log_7 243}{\log_7 9}$;
5) $\log_2 \log_3 \sqrt[4]{3}$;
6) $\log_{\frac{3}{2}} \log_8 4$.

4.9. Подайте:

1) число 7 у вигляді степеня числа 5;
2) число 13 у вигляді степеня числа 10;
3) число $\frac{2}{3}$ у вигляді степеня числа 2;
4) число $\frac{\sqrt{3}}{2}$ у вигляді степеня числа 7.

4.10. Подайте:

1) число 3 у вигляді логарифма за основою 5;
2) число -2 у вигляді логарифма за основою 0,2;
3) число $\frac{1}{3}$ у вигляді логарифма за основою 8;
4) число 0,5 у вигляді логарифма за основою 10.

4.11. Знайдіть x, якщо:

1) $\log_6 x=3\log_6 2+0{,}5\log_6 25-2\log_6 3$;
2) $\lg x=\frac{1}{3}\lg(5a)-2\lg b+5\lg c$;
3) $\lg x=3\lg m+\frac{2}{7}\lg n-\frac{1}{5}\lg p$;
4) $\log_3 x=\frac{1}{3}\log_3 8-2\log_3 20-3\log_3 2$.

4.12. Перейдіть у заданому логарифмі до основи 3:

1) $\log_{\frac{1}{3}} a$;
2) $\log_9 a$;
3) $\log_{\frac{1}{9}} a$;
4) $\log_{\sqrt{3}} a$;
5) $\log_2 a$.

4.13*. Обчисліть значення виразу:

1) $6^{\frac{3}{\log_{\sqrt{2}} 6}+\frac{1}{3}\log_6 27}$;
2) $3^{\frac{2}{\log_{\sqrt{5}} 3}+\frac{1}{4}\log_3 16}$;
3) $\log_4 5\log_5 6\log_6 7\log_7 32$;
4) $\log_9 10\lg 11\log_{11} 12\log_{12} 27$;
5) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125} 8}\right)49^{\log_7 2}$;
6) $15\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt[5]{7}\cdot\frac{1}{49}\cdot5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt[4]{49}}\right)$.

4.14*. Знайдіть:

1) $\log_8 9$, якщо $\log_{12} 18 = a$;

2) $\log_9 15$, якщо $\log_{45} 25 = a$;

3) $\log_{175} 56$, якщо $\log_{14} 7 = a$ і $\log_5 14 = b$;

4) $\log_{150} 200$, якщо $\log_{20} 50 = a$ і $\log_3 20 = b$.

У завданнях 4.15–4.18 обчисліть значення виразу.

4.15. 1) $10\log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$; 3) $81^{0,5\log_9 7}$;

2) $9^{\log_{16} 2 + \log_3 \sqrt{5}}$; 4) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$.

4.16*. 1) $\sqrt[4]{25^{-3\log_{\sqrt{5}} 0,1}} + 64^{\log_4 5}$; 2) $\left(15 + 3^{1+\log_3 4}\right)\log_2 \sqrt{3} \log_3 4$.

4.17. 1) $\dfrac{\log_2 66}{\log_6 66} - \log_2 3$; 2) $\log_2 27 - 2\log_2 3 + \log_2 \dfrac{2}{3}$.

4.18*. 1) $20^{\frac{1}{2\log_{81} 5}} \cdot 0,25^{\frac{1}{2\log_{81} 5}}$; 2) $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right)49^{\log_7 2}$.

У завданнях 4.19, 4.20 порівняйте значення заданих числових виразів.

4.19. 1) $\log_{0,5} \dfrac{7}{4}$ і $\log_{0,125} \dfrac{7}{164}$; 2) $\sqrt{15}$ і $8^{\frac{1}{3}\log_2\left(1 - \frac{1}{32}\right) \cdot 2\log_{27} 3}$.

4.20*. 1) $7^{\log_5 2} - 0,1$ і $2^{\log_5 7}$; 3) $2^{\log_7 3} + 0,1$ і $3^{\log_7 2}$.

2) $5^{\log_3 7} + 0,1$ і $7^{\log_3 5}$;

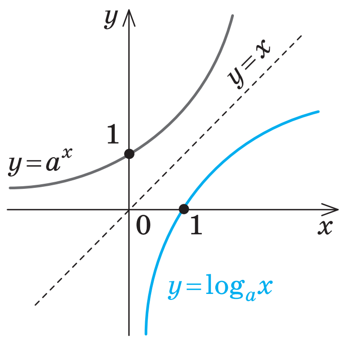
§ 5 ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

Таблиця 7

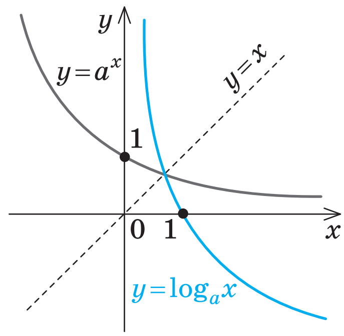
Означення. ***Логарифмічною функцією* називається функція виду $y=\log_a x$, де $a>0$, $a\neq 1$.**

1. Графік логарифмічної функції

Функції $y=a^x$ і $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ є взаємно оберненими функціями, тому їх графіки симетричні відносно прямої $y=x$.



$a>1$



$0<a<1$

2. Властивості логарифмічної функції

1. *Область визначення*: $x>0$. $\boxed{D(\log_a x)=(0;+\infty)}$
2. *Область значень*: $y\in \boldsymbol{R}$. $\boxed{E(\log_a x)=\boldsymbol{R}}$
3. *Функція ні парна, ні непарна.*
4. *Точки перетину з осями координат*: з віссю Oy $\boxed{\textbf{немає}}$, з віссю Ox $\boxed{\begin{cases} y=0, \\ x=1 \end{cases}}$
5. *Проміжки зростання і спадання*:
   - при $a>1$ функція $y=\log_a x$ **зростає на всій області визначення**;
   - при $0<a<1$ функція $y=\log_a x$ **спадає на всій області визначення**.
6. *Проміжки знакосталості:*
   - якщо $a>1$, то $y>0$ при $x>1$, $y<0$ при $0<x<1$;
   - якщо $0<a<1$, то $y>0$ при $0<x<1$, $y<0$ при $x>1$.
7. *Найбільшого і найменшого значень функція не має.*

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття логарифмічної функції та її графік

Означення. ***Логарифмічною функцією* називається функція виду $y=\log_a x$, де $a>0$, $a\neq 1$.**

Покажемо, що ця функція є оберненою до функції $y=a^x$.

Справді, показникова функція $f(x)=a^x$ при $a>1$ зростає на множині $\boldsymbol{R}$, а при $0<a<1$ спадає на множині $\boldsymbol{R}$. Областю значень функції $f(x)=a^x$ є проміжок $(0;+\infty)$. Отже, як було показано в підручнику для 10 класу, функція $f(x)$ оборотна і має обернену функцію, областю визначення

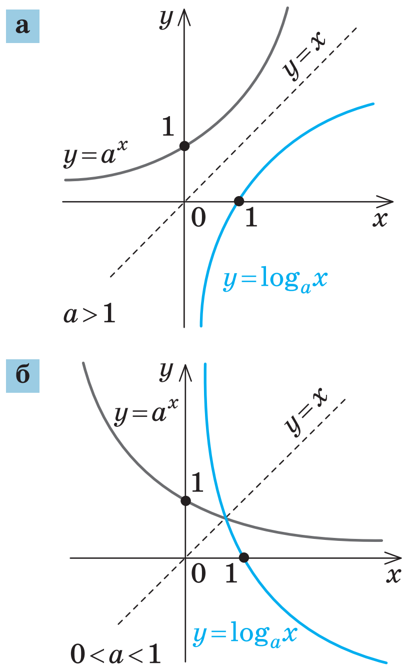


Рис. 5.1

якої є проміжок $(0;+\infty)$ і областю значень — множина $\boldsymbol{R}$. Нагадаємо, що для запису формули оберненої функції достатньо з рівності $y=f(x)$ виразити x через y і в одержаній формулі $x=g(y)$ аргумент позначити через x, а функцію — через y.

Тоді з рівняння $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ за означенням логарифма одержуємо формулу оберненої функції $x=\log_a y$, у якій аргумент позначено через y, а функцію — через x. Змінюючи позначення на традиційні, отримуємо формулу $y=\log_a x$ — формулу функції, оберненої до функції $y=a^x$. ○

Як відомо, графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y=x$. Отже, графік функції $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ можна одержати з графіка функції $y=a^x$ симетричним відображенням відносно прямої $y=x$. На рис. 5.1 наведено графіки логарифмічних функцій для $a>1$ і $0<a<1$.

Графік логарифмічної функції називають *логарифмічною кривою*.

2 Властивості логарифмічної функції

Властивості функції $y=\log_a x$ або визначимо з одержаного графіка цієї функції, або обґрунтуємо, спираючись на властивості функції $y=a^x$.

Оскільки область визначення прямої функції є областю значень оберненої, а область значень прямої функції — областю визначення оберненої, то, знаючи ці характеристики для функції $y=a^x$, одержимо відповідні характеристики для функції $y=\log_a x$.

Характеристика	Функція	
	$y=a^x$	$y=\log_a x$
Область визначення	$\boldsymbol{R}$	$(0;+\infty)$
Область значень	$(0;+\infty)$	$\boldsymbol{R}$

1. *Областю визначення* функції $y=\log_a x$ є множина $\boldsymbol{R}_+$ усіх додатних чисел $(x>0)$.

2. *Областю значень функції* $y=\log_a x$ *є множина* $\boldsymbol{R}$ *усіх дійсних чисел* (тоді функція $y=\log_a x$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень).

3. Функція $y=\log_a x$ не може бути *ні парною, ні непарною*, оскільки її область визначення не симетрична відносно точки 0.

4. Графік функції $y=\log_a x$:

- *не перетинає вісь* Oy, оскільки на осі Oy $x=0$, а це значення не входить до області визначення функції $y=\log_a x$;
- *перетинає вісь* Ox *у точці* $x=1$, оскільки $\log_a 1=0$ при всіх значеннях a $(a>0,\ a\neq 1)$.

5. З графіків функції $y=\log_a x$, наведених на рис. 5.1, робимо висновок, що *при* $a>1$ *функція* $y=\log_a x$ *зростає на всій області визначення, а при* $0<a<1$ *спадає на всій області визначення.*

Цю властивість можна обґрунтувати, спираючись не на вид графіка, а тільки на властивості функції $y=a^x$.

Наприклад, при $a>1$ візьмемо $x_2>x_1>0$. За основною логарифмічною тотожністю можна записати: $x_1=a^{\log_a x_1}$, $x_2=a^{\log_a x_2}$. Тоді, ураховуючи, що $x_2>x_1$, маємо $a^{\log_a x_2}>a^{\log_a x_1}$. Оскільки при $a>1$ функція $y=a^x$ зростаюча, то з останньої нерівності одержуємо $\log_a x_2>\log_a x_1$. А це й означає, що при $a>1$ функція $y=\log_a x$ зростає на всій області визначення.

Аналогічно можна обґрунтувати, що при $0<a<1$ функція $y=\log_a x$ спадає на всій області визначення.

6. *Проміжки знакосталості*. Оскільки графік функції $y=\log_a x$ перетинає вісь Ox у точці $x=1$, то, ураховуючи зростання функції при $a>1$ та спадання при $0<a<1$, отримаємо такі проміжки знакосталості.

Значення функції	**Значення аргумента**	
	при $a>1$	**при $0<a<1$**
$y>0$	$x\in(1;+\infty)$	$x\in(0;1)$
$y<0$	$x\in(0;1)$	$x\in(1;+\infty)$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\log_5(3-x)$; 2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3)$; 3) $y=\log_7(x^2-x)$.

Розв'язання

1) ▶ $y=\log_5(3-x)$.

Область визначення задається нерівністю $3-x>0$. Звідси $x<3$, тобто $D(y)=(-\infty;3)$. ◁

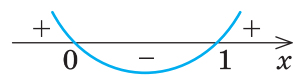
2) ▶ $y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3)$.

Область визначення задається нерівністю $x^2+3>0$. Ця нерівність виконується при всіх дійсних значеннях x. Отже, $D(y)=\boldsymbol{R}$. ◁

3) ▶ $y=\log_7(x^2-x)$.

Область визначення задається нерівністю $x^2-x>0$. Розв'язуючи цю квадратну нерівність, одержуємо $x<0$ або $x>1$ (див. рисунок).

Отже, $D(y)=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. ◁



Коментар

Оскільки вираз, що стоїть під знаком логарифма, має бути додатним, то для знаходження області визначення заданої функції треба знайти ті значення аргумента x, при яких вираз, що стоїть під знаком логарифма, буде додатним.

Приклад 2

Зобразіть схематично графік функції:

1) $y=\log_2 x$; 2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

Коментар

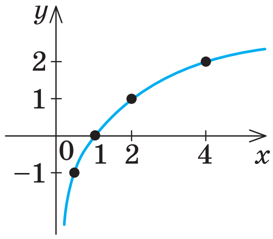
Область визначення $D(y)$ функції $y=\log_a x$ така: $x>0$, отже, графік цієї функції завжди розташований праворуч від осі Oy. Він перетинає вісь Ox у точці $x=1$ (оскільки $\log_a 1=0$). При $a>1$ логарифмічна функція зростає, отже, графіком функції $y=\log_a x$ буде логарифмічна крива, точки якої при збільшенні аргумента «піднімаються вгору».

При $0<a<1$ логарифмічна функція спадає, отже, графіком функції $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ буде логарифмічна крива, точки якої при збільшенні аргумента «опускаються вниз».

Щоб уточнити поведінку графіків заданих функцій, знайдемо координати кількох додаткових точок.

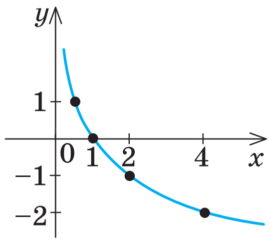
Розв'язання

▶ $y = \log_2 x$



x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	−1	0	1	2 ◁

▶ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$



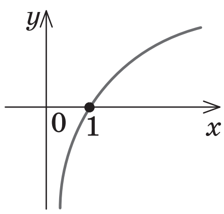
x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	1	0	−1	−2 ◁

Приклад 3 Зобразіть схематично графік функції $y = \log_3 |x-2|$.

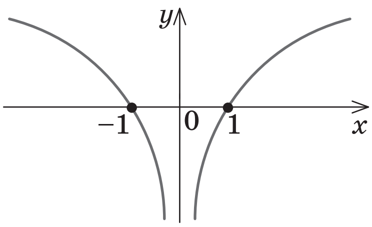
Розв'язання

▶ Послідовно будуємо графіки:

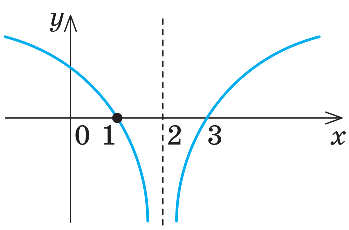
1) $y = \log_3 x$



2) $y = \log_3 |x|$



3) $y = \log_3 |x-2|$



◁

Коментар

Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції за допомогою геометричних перетворень.

1. Ми можемо побудувати графік функції $y = f(x) = \log_3 x$ (основа логарифма $a = 3 > 1$, отже, логарифмічна функція зростає).
2. Потім можна побудувати графік функції $y = g(x) = \log_3 |x| = f(|x|)$ (праворуч від осі Oy графік функції $f(x)$ залишається без зміни, і ця сама частина графіка симетрично відображується відносно осі Oy).
3. Після цього можна побудувати графік заданої функції $y = \log_3 |x-2| = g(x-2)$ паралельним перенесенням графіка функції $y = g(x)$ уздовж осі Ox на 2 одиниці вправо.

Короткий план побудови шуканого графіка зручно зобразити схематично у такий спосіб:

$$y = \log_3 x \to y = \log_3 |x| \to y = \log_3 |x-2|.$$

Виконайте завдання прикладу 3, використовуючи програму *Desmos*. Які ще програми для побудови графіків вам відомі?

Приклад 4 Порівняйте додатні числа b і c, знаючи, що:

1) $\log_3 b > \log_3 c$; 2) $\log_{0,3} b > \log_{0,3} c$.

Розв'язання	Коментар
1) ▷ Оскільки функція $y=\log_3 x$ зростаюча, то для додатних чисел b і c з нерівності $\log_3 b > \log_3 c$ одержуємо $b > c$. ◁ 2) ▷ Оскільки функція $y=\log_{0,3} x$ спадна, то для додатних чисел b і c з нерівності $\log_{0,3} b > \log_{0,3} c$ одержуємо $b < c$. ◁	У кожному завданні задані вирази — це значення логарифмічної функції $y=\log_a x$ у точках b і c. Використовуємо зростання або спадання відповідної функції: 1) при $a=3>1$ функція $y=\log_3 x$ є зростаючою, тому більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента; 2) при $a=0,3<1$ функція $y=\log_{0,3} x$ є спадною, тому більшому значенню функції відповідає менше значення аргумента.

Приклад 5 Порівняйте з одиницею додатне число a, знаючи, що $\log_a 6 < 0$.

Розв'язання	Коментар
▷ Оскільки $6>1$, а з умови маємо, що $\log_a 6 < 0$ (оскільки $0=\log_a 1$, то $\log_a 6 < \log_a 1$), то функція $y=\log_a x$ є спадною, отже, $0<a<1$. ◁	Числа $\log_a 6$ і 0 — це два значення функції $y=\log_a x$. Ураховуючи задану нерівність, з'ясовуємо, якою є ця функція — зростаючою або спадною, і згадуємо, що вона зростає при $a>1$ і спадає при $0<a<1$.

Запитання

1. Сформулюйте означення логарифмічної функції.
2. Як розташовані графіки функцій $y=a^x$ і $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ відносно прямої $y=x$? Відповідь поясніть. Побудуйте зазначені графіки для $a>1$ і $0<a<1$.
3. Користуючись графіком функції $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, охарактеризуйте її властивості.
4*. Обґрунтуйте властивості функції $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$.
5. Поясніть, як, ураховуючи зростання або спадання відповідної логарифмічної функції, порівняти значення:
а) $\log_5 7$ і $\log_5 3$; б) $\log_{\frac{1}{5}} 7$ і $\log_{\frac{1}{5}} 3$.

Вправи

5.1. Знайдіть область визначення функції:

1°) $y=\log_{11}(2x+6)$;

2°) $y=\log_{\frac{1}{6}}(x-3)$;

3) $y=\log_{\sqrt{2}}(x^2-1)$;

4) $y=\log_{5,2}(3x-x^2)$;

5) $y=\log_{\frac{3}{8}}(2x^2+1)$;

6) $y=\log_{\pi}(x^2+x+1)$;

7*) $y=\log_{0,4}\dfrac{2x-6}{x+2}$;

8*) $\log_{\sqrt{7}}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$;

9*) $y=\log_{3,1}\dfrac{|x|+5}{|x|-3}$;

10*) $y=\log_x(2x-x^2)$;

11*) $y=\log_{2x-3}(5x-x^2)$.

У завданнях 5.2, 5.3 зобразіть схематично графік заданої функції.

5.2. 1°) $y=\log_3 x$; 3°) $y=\log_{0,3} x$; 5) $y=\log_{\frac{1}{6}} x$;

2°) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$; 4) $y=\log_{\sqrt{5}} x$; 6) $y=\log_{\sqrt{2}} x$.

5.3. 1) $y=\log_2(-x)$; 4) $y=\log_4 x+3$; 7*) $y=\left|\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)\right|$;

2) $y=\log_{\frac{1}{4}}(x-1)$; 5) $y=-\log_6 x$; 8*) $y=\log_4 \frac{x^2}{|x|}$;

3) $y=\log_4(x+3)$; 6*) $y=\left|\log_3|x|\right|$; 9*) $y=\log_3\log_3 x$.

5.4. Порівняйте числа:

1) $\log_2 3{,}5$ і $\log_2 4{,}5$; 6) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 10$ і $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 20$;

2) $\log_{0,1} 1{,}3$ і $\log_{0,1} 1{,}1$; 7) $\log_2 3$ і 0;

3) $\log_{\frac{1}{5}} 2$ і $\log_{\frac{1}{5}} 5$; 8) $\log_7 \frac{1}{3}$ і 0;

4) $\log_{\sqrt{3}} 2{,}3$ і $\log_{\sqrt{3}} 0{,}2$; 9) $\log_3 4$ і 1;

5) $\log_\pi 5$ і $\log_\pi 7$; 10) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$ і 1.

5.5. Порівняйте додатні числа b і c, якщо:

1) $\log_5 b>\log_5 c$; 3) $\log_{\sqrt{7}} b<\log_{\sqrt{7}} c$;

2) $\log_{0,5} b>\log_{0,5} c$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} b<\log_{\frac{1}{3}} c$.

5.6. Порівняйте з одиницею додатне число a, якщо:

1) $\log_a 5>0$; 3) $\log_a 2{,}3<0$;

2) $\log_a \frac{1}{3}>0$; 4) $\log_a 0{,}2<0$.

5.7. З'ясуйте, додатним чи від'ємним є число:

1) $\log_{0,2} 5$; 3) $\log_2 0{,}5$; 5) $\lg 0{,}9$;

2) $\log_{0,3} 0{,}8$; 4) $\log_{0,7} 7$; 6) $\ln 2$.

5.8. Порівняйте з нулем число:

1) $\log_2 6$; 3) $\log_{1,2} 0{,}3$; 5) $\ln 1{,}01$;

2) $\log_{0,7} 0{,}6$; 4) $\lg 2{,}7$; 6) $\log_{\frac{\pi}{4}} 3$.

5.9. Укажіть, між якими двома послідовними цілими числами міститься на числовій прямій число:

1) $\log_2 10$; 3) $\log_{20} 13$; 5) $\ln 2$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} 6$; 4) $\lg 23$; 6) $\log_{\frac{1}{4}} 17$.

5.10. Враховуючи зростання чи спадання функції, знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку:

1) $y=\log_3 x$, $\left[\frac{1}{9};27\right]$;
2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$, $\left[\frac{1}{9};27\right]$;
3) $y=\lg x$, $[1;10\,000]$;
4) $y=\log_{\frac{2}{5}} x$, $\left[\frac{4}{25};1\right]$;
5) $y=\log_{\pi} x$, $\left[\frac{1}{\pi};1\right]$;
6) $y=\log_{0,4} x$, $[2,5;6,25]$.

5.11. Знайдіть найменше значення функції:

1) $y=\lg\left(x^2+10\right)$;
2) $y=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^2+9}$;
3) $y=\log_{0,7}\sin x$.

5.12. Знайдіть найбільше значення функції:

1) $y=\lg\left(1000-x^2\right)$;
2) $y=\log_5\frac{1}{x^2+25}$;
3) $y=\log_3\cos x$.

5.13*. Знайдіть множину значень функції:

1) $y=\log_{0,1}\left(\frac{300}{1+\lg\left(100+x^2\right)}\right)$;
2) $y=\log_{0,5}\left(\frac{24}{11+\sqrt{1+|\ln x|}}\right)$.

5.14. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\log_{|x|}\left(x^2+1\right)$;
2) $y=\frac{x}{\lg x}$;
3) $y=\log_{0,3}\cos x$;
4) $y=\frac{2x-1}{\lg(x+3)}$.

5.15*. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\sqrt{2\cdot 3^{1-x}+1-3^x}$;
2) $f(x)=\lg\left(1,25^{1-x^2}-0,4096^{1+x}\right)$;
3) $f(x)=\sqrt{27^x-9^{x^2+0,5}}$;
4) $f(x)=\sqrt{(4-x)\left(3^x-9\right)}$.

5.16*. Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{\log_{0,3} x}{\left|\log_{0,3} x\right|}$;
2) $y=\frac{\lg x}{\sqrt{\lg^2 x}}$;
3) $y=\left|\log_2 x\right|+\log_2 x$.

5.17*. Дослідіть на парність і непарність функцію:

1) $y=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$;
2) $y=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Виявіть свою компетентність

5.18. Багато явищ природи можна описати логарифмічною залежністю, тобто їх математичною моделлю є логарифмічна функція. Одним із найбільш наочних прикладів такого моделювання є логарифмічна спіраль. Підготуйте повідомлення про приклади спіральних структур у біології, фізиці, техніці.

§ 6 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

6.1. Розв'язування логарифмічних рівнянь

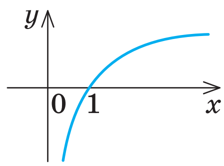
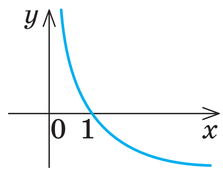
Таблиця 8

1. Основні означення та співвідношення

Означення. ***Логарифмом додатного числа b за основою a*** **($a>0,\ a\neq 1$) називається показник степеня, до якого треба піднести *a*, щоб одержати *b*.**

$$\log_a b = c \iff b = a^c$$

Графік функції $y=\log_a x$ ($a>0,\ a\neq 1$)

$a>1$	$0<a<1$
	
зростає	спадає

2. Розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь

Орієнтир	Приклад
Якщо a — число ($a>0$ і $a\neq 1$), то $\log_a f(x)=c \iff f(x)=a^c$ *(використовуємо означення логарифма)*	$\log_3(x-1)=2$. ▶ $x-1=3^2$; $x=10$. *Відповідь*: 10. ◁

3. Використання рівнянь-наслідків

Орієнтир	Приклад
Якщо з припущення, що перша рівність правильна, випливає правильність кожної наступної, то гарантовано одержуємо рівняння-наслідки. *При використанні наслідків не відбувається втрата коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів.* Тому перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування.	$\log_x(x+2)=2$. ▶ За означенням логарифма одержуємо: $x+2=x^2$; $x^2-x-2=0$; $x_1=-1$, $x_2=2$. *Перевірка*. $x=-1$ — сторонній корінь (в основі логарифма одержуємо від'ємне число); $x=2$ — корінь ($\log_2(2+2)=2$; $\log_2 4=2$; $2=2$). *Відповідь*: 2. ◁

4. Рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь

Заміна змінних

Орієнтир	Приклад
Якщо у рівняння (нерівність або тотожність) змінна входить в одному й тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз зі змінною позначити однією буквою (новою змінною).	$\lg^2 x-2\lg x-3=0$. ▶ Виконаємо заміну $\lg x=t$, тоді $t^2-2t-3=0$; $t_1=-1$, $t_2=3$. Отже, $\lg x=-1$ або $\lg x=3$. Тоді $x=10^{-1}=0{,}1$ або $x=10^3=1000$. *Відповідь*: 0,1; 1000. ◁

Рівняння виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ ($a>0$ і $a\neq 1$)

Орієнтир	Приклад
$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0 \end{cases}$ ОДЗ (*ураховуємо ОДЗ і прирівнюємо вирази, які стоять під знаками логарифмів*).	$\log_3(x^2-2)=\log_3(4x-5)$. ▶ ОДЗ: $\begin{cases} x^2-2>0, \\ 4x-5>0. \end{cases}$ На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням $x^2-2=4x-5$; $x^2-4x+3=0$; $x_1=1$, $x_2=3$. $x=1$ — сторонній корінь (не задовольняє умови ОДЗ); $x=3$ — корінь (задовольняє умови ОДЗ). *Відповідь*: 3. ◁

Рівносильні перетворення рівнянь в інших випадках

Орієнтир	Приклад
1. **Ураховуємо ОДЗ** заданого рівняння (*й уникаємо перетворень, які призводять до звуження ОДЗ*). 2. Стежимо за тим, щоб **на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильності рівності**.	$\log_2(x+1)=3-\log_2(x+3)$. ▶ ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0. \end{cases}$ На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням $\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3$; $\log_2((x+1)(x+3))=3$; $(x+1)(x+3)=2^3$; $x^2+4x-5=0$; $x_1=1$, $x_2=-5$. $x=1$ — корінь (задовольняє умови ОДЗ); $x=-5$ — сторонній корінь (не задовольняє умови ОДЗ). *Відповідь*: 1. ◁

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь

Найпростішим логарифмічним рівнянням зазвичай вважають рівняння

$$\log_a x = c \ (a>0 \text{ і } a\neq 1).$$

Логарифмічна функція зростає (або спадає) на всій області визначення, тобто при $x>0$ (див. графіки в п. 1 табл. 8), і тому кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргумента. Ураховуючи, що логарифмічна функція набуває всіх дійсних значень, рівняння

$$\log_a x = c \qquad (1)$$

завжди має єдиний корінь, який можна визначити, скориставшись означенням логарифма:

$$x=a^c.$$

Якщо розглянемо рівняння

$$\log_a f(x)=c \qquad (2)$$

і виконаємо заміну змінної $f(x)=t$, то одержимо найпростіше логарифмічне рівняння $\log_a t=c$, яке має єдиний корінь $t=a^c$. Виконуючи обернену заміну, одержуємо, що розв'язки рівняння (2) збігаються з розв'язками рівняння

$$f(x)=a^c. \qquad (3)$$

Отже, рівняння (2) і (3) є рівносильними. У такий спосіб ми обґрунтували, що *для рівносильного перетворення найпростішого логарифмічного рівняння* (1) або рівняння (2) (яке ми теж будемо відносити до найпростіших за умови, що основа a є числом) *достатньо використати означення логарифма*.

Коротко це можна записати так:

$$\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c.$$

Нагадаємо, що всі рівносильні перетворення рівняння виконуються на його ОДЗ. Для рівняння (2) ОДЗ задається умовою $f(x) > 0$. Для всіх коренів рівняння (3) ця умова виконується автоматично (через те, що $a > 0$). Тому *для найпростіших логарифмічних рівнянь ОДЗ можна не записувати* (оскільки вона враховується автоматично при переході від рівняння (2) до рівняння (3)).

Наприклад, рівняння $\log_5 (2x-3) = 2$ рівносильне рівнянню $2x-3=5^2$, корінь якого $x = 14$ і є коренем заданого рівняння. Аналогічно записано й розв'язання найпростішого рівняння $\log_3 (x-1) = 2$ у табл. 8.

2 Використання рівнянь-наслідків під час розв'язування логарифмічних рівнянь

У процесі розв'язування рівняння головне — не загубити його корені, тому важливо стежити за тим, щоб кожен корінь першого рівняння залишався коренем наступного — у цьому випадку одержуємо рівняння-наслідки.

Нагадаємо, що кожний корінь заданого рівняння перетворює його на правильну числову рівність. Використовуючи означення кореня рівняння, можна обґрунтувати такий **орієнтир**:

> *якщо з припущення про правильність першої рівності випливає правильність кожної наступної, ми одержуємо рівняння-наслідки* (оскільки кожний корінь першого рівняння буде коренем наступного рівняння).

Нагадаємо, що при використанні наслідків не відбувається втрати коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів. Тому *перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування при використанні рівнянь-наслідків*.

Приклад розв'язування логарифмічного рівняння за допомогою рівнянь-наслідків та оформлення такого розв'язання наведено в п. 3 табл. 8.

3 Рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь

Одним із часто використовуваних рівносильних перетворень рівнянь є заміна змінної.

Нагадаємо загальний **орієнтир**, якого ми дотримувалися під час розв'язування рівнянь у 10 класі:

> якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному й тому ж вигляді, то зручно відповідний вираз зі змінною позначити однією буквою (новою змінною).

Наприклад, до рівняння $\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$ змінна входить тільки у вигляді $\lg x$, тому для розв'язування цього рівняння доцільно використати заміну $\lg x = t$, одержати квадратне рівняння $t^2 - 2t - 3 = 0$, яке має корені $t_1 = -1$ і $t_2 = 3$, а потім виконати обернену заміну й одержати найпростіші логарифмічні рівняння $\lg x = -1$ і $\lg x = 3$. Тоді за означенням логарифма визначимо корені заданого рівняння: $x = 10^{-1} = 0{,}1$ і $x = 10^3 = 1000$.

Ураховуючи, що заміна змінної (разом з оберненою заміною) є рівносильним перетворенням рівняння на будь-якій множині, для виконання заміни не обов'язково знаходити ОДЗ заданого рівняння. А після виконання оберненої заміни ми одержали найпростіші логарифмічні рівняння, для яких (як було показано вище) ОДЗ ураховується автоматично. Отже, у наведеному розв'язанні ОДЗ заданого рівняння врахована автоматично, і тому ОДЗ можна не записувати до розв'язання. Саме так й оформлено розв'язання цього рівняння в п. 4 табл. 8.

Розглянемо тепер **рівносильні перетворення логарифмічного рівняння виду**

$$\log_a f(x)=\log_a g(x)\ (a>0 \text{ і } a\neq 1). \quad (4)$$

Як уже зазначалося, усі рівносильні перетворення рівняння виконуються на його ОДЗ. Для рівняння (4) ОДЗ задається системою нерівностей $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{cases}$ Оскільки логарифмічна функція $y=\log_a t$ зростає (при $a>1$) або спадає (при $0<a<1$) на всій своїй області визначення і кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргумента, то рівність (4) може виконуватися (на ОДЗ) тоді й тільки тоді, коли $f(x)=g(x)$. Ураховуючи ОДЗ, одержуємо, що рівняння (4) рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x)=g(x), & (5)\\ f(x)>0, & (6)\\ g(x)>0. & (7) \end{cases}$$

Символічно одержаний результат подано в п. 4 табл. 8, а **орієнтир** коротко можна сформулювати так.

Щоб розв'язати рівняння $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ за допомогою рівносильних перетворень, ураховуємо ОДЗ цього рівняння й прирівнюємо вирази, які стоять під знаками логарифмів.

Приклад використання цього орієнтира наведено в табл. 8.

Зауваження 1. Систему (5)–(7) можна спростити. Якщо в цій системі виконується рівність (5), то значення $f(x)$ і $g(x)$ дорівнюють одне одному, тому коли одне з цих значень буде додатним, то друге теж буде додатним. Отже, рівняння (4) рівносильне системі, яка складається з рівняння (5) і однієї з нерівностей (6) або (7) — зазвичай вибирають простішу.

Наприклад, рівняння $\log_3(x^2-2)=\log_3(4x-5)$, розглянуте в табл. 8, рівносильне системі $\begin{cases} x^2-2=4x-5, \\ 4x-5>0. \end{cases}$ Але враховуючи, що обмеження ОДЗ цього рівняння $\begin{cases} x^2-2>0, \\ 4x-5>0 \end{cases}$ ми не розв'язували, а тільки перевіряли, чи задовольняють знайдені корені ці обмеження, наведене спрощення не дає суттєвого виграшу під час розв'язування цього рівняння.

Зауваження 2. Як було обґрунтовано вище, коли виконується рівність (4), то обов'язково виконується і рівність (5). Отже, рівняння (5) є наслідком рівняння (4), і тому для знаходження коренів рівняння (4) $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ достатньо знайти корені рівняння-наслідку (5) $f(x)=g(x)$ і виконати перевірку знайдених коренів підстановкою в задане рівняння. (Під час розв'язування рівняння у такий спосіб ОДЗ рівняння (4) буде враховано опосередковано, у момент перевірки одержаних коренів, тому її не доведеться записувати.)

Виконуючи **рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь у більш складних випадках**, можна дотримуватися **орієнтира**, який було обґрунтовано в § 3 підручника для 10 класу:

1. Ураховуємо ОДЗ заданого рівняння.
2. Стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильності рівності.

Наприклад, розв'яжемо рівняння

$$\log_2(x+1)=3-\log_2(x+3) \quad (8)$$

за допомогою рівносильних перетворень.

Для цього достатньо врахувати ОДЗ заданого рівняння $\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0, \end{cases}$ а потім, виконуючи кожне перетворення рівняння, стежити за тим, чи можна на ОДЗ виконати це перетворення й у зворотному напрямку. Коли відповідь ствердна, то виконані перетворення рівносильні. Якщо ж якесь перетворення для всіх значень змінної з ОДЗ можна виконати тільки в одному напрямку (від початкового рівняння до наступного), а для його виконання у зворотному напрямку потрібні якісь додаткові обмеження, то ми одержимо тільки рівняння-наслідок, і отримані корені доведеться перевіряти підстановкою в задане рівняння.

Застосуємо зазначений орієнтир до розв'язування рівняння (8).

Щоб звести це рівняння до найпростішого, перенесемо всі члени рівняння, які містять логарифми, у його ліву частину. Одержимо рівносильне рівняння

$$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3. \qquad (9)$$

(Рівносильність рівнянь (8) і (9) випливає з відомої теореми: якщо з однієї частини рівняння перенести в іншу доданки з протилежним знаком, то одержимо рівняння, рівносильне заданому на будь-якій множині.

Рівносильність цих рівнянь випливає також із того, що ми можемо перейти не тільки від рівності (8) до рівності (9), а й виконати зворотне перетворення, користуючись властивостями числових рівностей.)

Ураховуючи, що сума логарифмів додатних (на ОДЗ) чисел дорівнює логарифму добутку, одержуємо рівняння

$$\log_2((x+1)(x+3))=3. \qquad (10)$$

На ОДЗ заданого рівняння можна виконати і зворотне перетворення: оскільки $x+1>0$ і $x+3>0$, то логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників. Отже, від рівності (10) можна повернутися до рівності (9), тобто цей перехід теж приводить до рівносильного рівняння. Рівняння (10) — це найпростіше логарифмічне рівняння. Воно рівносильне рівнянню, яке отримуємо за означенням логарифма: $(x+1)(x+3)=2^3$. Виконуючи рівносильні перетворення одержаного рівняння, маємо: $x^2+4x-5=0$; $x_1=1$, $x_2=-5$.

Оскільки всі рівносильні перетворення виконувалися на ОДЗ заданого рівняння, урахуємо її, підставляючи одержані корені в обмеження ОДЗ:

- $x=1$ — корінь, оскільки задовольняє умови ОДЗ;
- $x=-5$ не є коренем (сторонній корінь), тому що не задовольняє умови ОДЗ.

Отже, задане рівняння має тільки один корінь $x=1$.

Зауваження. Звичайно, розглянуте рівняння можна було розв'язати з використанням рівнянь-наслідків, без явного врахування ОДЗ, але з перевіркою одержаних розв'язків підстановкою в початкове рівняння. Тобто можна самостійно обирати шлях розв'язування рівняння: або це буде використання рівнянь-наслідків, або рівносильні перетворення заданого рівняння. Але для багатьох рівнянь перевірку одержаних коренів виконати досить непросто, а для нерівностей взагалі не можна користуватися наслідками. Це пов'язано з тим, що не вдається перевірити всю множину розв'язків нерівностей, оскільки вона, як правило, нескінченна. Отже, для нерівностей доводиться виконувати тільки рівносильні перетворення (для цього можна використовувати орієнтири, повністю аналогічні наведеним вище).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння

$$\lg(x-2)-\frac{1}{2}\lg(3x-6)=\lg 2. \qquad (1)$$

Розв'язання	Коментар
▶ $2\lg(x-2)-\lg(3x-6)=2\lg 2;$ (2) $\lg(x-2)^2-\lg(3x-6)=\lg 2^2;$ (3) $\lg\frac{(x-2)^2}{3x-6}=\lg 4;$ (4) $\frac{(x-2)^2}{3x-6}=4;$ (5) $(x-2)^2=4(3x-6);$ (6) $x^2-16x+28=0;$ (7) $x_1=2,\ x_2=14.$ *Перевірка*. $x=2$ — сторонній корінь (під знаком логарифма отримуємо 0), $x=14$ — корінь, оскільки маємо: $\lg(14-2)-\frac{1}{2}\lg(3\cdot 14-6)=\lg 2;$ $\lg 12-\frac{1}{2}\lg 36=\lg 2;\ \lg 12-\lg\sqrt{36}=\lg 2;$ $\lg\frac{12}{6}=\lg 2;\ \lg 2=\lg 2.$ *Відповідь*: 14. ◁	Розв'яжемо задане рівняння за допомогою наслідків. Нагадаємо, що *під час використання наслідків головне — гарантувати, що у випадку, коли перша рівність буде правильною, усі наступні теж будуть правильними*. Щоб позбутися дробового коефіцієнта, помножимо обидві частини рівняння (1) на 2 (якщо рівність (1) правильна, то й рівність (2) теж правильна). Якщо рівності (1) або (2) правильні (при тих значеннях x, що є коренями цих рівнянь), то при таких значеннях x існують усі записані логарифми, тоді вирази $x-2$ і $3x-6$ додатні. Але для додатних a, b, c можна скористатися формулами $2\lg a=\lg a^2$, $\lg b-\lg c=\lg\frac{b}{c}$, отже, рівності (3) і (4) теж будуть правильними. Ураховуючи, що функція $y=\lg t$ зростаюча, тобто кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргумента, з рівності логарифмів (4) одержуємо рівність відповідних аргументів (5). Якщо рівність (5) правильна, то знаменник дробу не дорівнює нулю, і після множення обох її частин на $3x-6\neq 0$ одержуємо правильну рівність (6) (отже, і правильну рівність (7)). Оскільки ми користувалися рівняннями-наслідками, необхідно виконати перевірку знайдених коренів.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння

$$\log_2(x-5)^2-2=2\log_2(2x). \qquad (1)$$

Розв'язання	Коментар
▶ ОДЗ: $\begin{cases}(x-5)^2>0,\\ 2x>0.\end{cases}$ Тоді $\begin{cases}x\neq 5,\\ x>0.\end{cases}$ На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням $\log_2(x-5)^2-\log_2 2^2=2\log_2(2x);$ $\log_2\frac{(x-5)^2}{2^2}=\log_2(2x)^2;$ (2) $\frac{(x-5)^2}{2^2}=(2x)^2;$ (3)	Розв'яжемо задане рівняння за допомогою рівносильних перетворень. Нагадаємо, що для цього достатньо *урахувати ОДЗ заданого рівняння і стежити за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильності рівності*. Зауважимо, що на ОДЗ вираз $x-5$ може бути як додатним, так і від'ємним, і тому ми не маємо права застосовувати до виразу $\log_2(x-5)^2$ формулу $\log_2(x-5)^2=2\log_2(x-5)$ (це приведе до втрати

$$(x-5)^2 = 4\cdot 4x^2;$$
$$15x^2 + 10x - 25 = 0;$$
$$3x^2 + 2x - 5 = 0;$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{5}{3}.$$

Ураховуючи ОДЗ, одержуємо, що значення $x = 1$ входить до ОДЗ, отже, є коренем; значення $x = -\frac{5}{3}$ не входить до ОДЗ, отже, не є коренем заданого рівняння.

Відповідь: 1. ◁

кореня). Застосувавши узагальнену формулу логарифмування, одержимо рівняння, що містить модуль. Тому використаємо інший спосіб перетворень, урахувавши, що $2 = \log_2 2^2$. Оскільки на ОДЗ усі вирази, що стоять під знаками логарифмів, додатні, то всі перетворення від рівняння (1) до рівняння (2) будуть рівносильними. Виконувати рівносильні перетворення рівняння (2) можна з використанням орієнтира, наведеного на с. 58. Також рівносильність рівнянь (2) і (3) може бути обґрунтована через зростання функції $y = \log_2 t$, яка кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргумента.

Приклад 3* Розв'яжіть рівняння $\log_4 x + 6\log_x 4 = 5$.

Розв'язання	Коментар

▶ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ На ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянню

$$\log_4 x + 6\frac{1}{\log_4 x} = 5.$$

Виконаємо заміну $\log_4 x = t$.

Одержимо: $$t + \frac{6}{t} = 5; \qquad (1)$$
$$t^2 - 5t + 6 = 0; \qquad (2)$$
$$t_1 = 2,\ t_2 = 3.$$

Виконавши обернену заміну, отримаємо:

$$\log_4 x = 2 \text{ або } \log_4 x = 3;$$
$$x = 4^2 = 16 \text{ або } x = 4^3 = 64$$

(обидва корені входять до ОДЗ).

Відповідь: 16; 64. ◁

Виконаємо рівносильні перетворення заданого рівняння. Для цього знайдемо його ОДЗ ($x > 0$, $x \neq 1$). Оскільки до рівняння входять логарифми з різними основами, зведемо їх до однієї основи (бажано числової, інакше можна загубити корені рівняння), у даному випадку до основи 4, за формулою $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Після зведення логарифмів до однієї основи помічаємо, що в отриманому рівнянні виразом зі змінною є тільки вираз $\log_4 x$, присутній кілька разів. Виконаємо заміну $\log_4 x = t$. Оскільки за обмеженнями ОДЗ $x \neq 1$, то $t \neq 0$. Тоді одержане дробове рівняння (1) рівносильне квадратному рівнянню (2).

Оскільки заміна й обернена заміна змінних є рівносильними перетвореннями на ОДЗ, то для одержаних розв'язків достатньо перевірити, чи входять вони до ОДЗ.

Приклад 4* Розв'яжіть рівняння

$$x^{\lg x - 2} = 1000. \qquad (1)$$

Розв'язання	Коментар

▶ ОДЗ: $x > 0$.

На ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням

$$\lg\left(x^{\lg x - 2}\right) = \lg 1000, \qquad (2)$$
$$(\lg x - 2)\lg x = 3. \qquad (3)$$

Виконаємо рівносильні перетворення заданого рівняння. Для цього знайдемо його ОДЗ і використаємо орієнтир: *якщо змінна входить і до основи, і до показника степеня, то для розв'язування такого рівняння можна спробувати прологарифмувати обидві частини рівняння* (звичайно, тільки якщо вони додатні). До запису рівняння вже входить десятковий логарифм, тому прологарифмуємо

Виконаємо заміну $\lg x = t$. Одержимо:

$$(t-2)t = 3;\ t^2 - 2t - 3 = 0;$$

$$t_1 = -1,\ t_2 = 3.$$

Виконавши обернену заміну, отримаємо:

$$\lg x = -1 \text{ або } \lg x = 3.$$

Звідси

$$x = 10^{-1} = 0{,}1 \text{ або } x = 10^3 = 1000.$$

Відповідь: 0,1; 1000. ◁

обидві частини за основою 10 (на ОДЗ обидві частини заданого рівняння додатні).

Оскільки функція $y = \lg t$ зростаюча, то кожного свого значення вона набуває тільки при одному значенні аргумента. Тоді якщо виконується рівність (1), то виконується й рівність (2), і навпаки: якщо виконується рівність (2), то виконується й рівність (1). Отже, рівняння (1) і (2) рівносильні на ОДЗ. При $x > 0$ застосування формули $\lg x^\alpha = \alpha \lg x$ є рівносильним перетворенням, отже, рівняння (2) і (3) теж рівносильні.

Обґрунтування рівносильності подальших перетворень повністю збігається з аналогічним обґрунтуванням у попередньому прикладі.

Приклад 5 Розв'яжіть рівняння $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$.

Розв'язання

▶ $$3^x - 8 = 3^{2-x}; \qquad (1)$$

$$3^x - 8 = \frac{3^2}{3^x}.$$

Виконаємо заміну $3^x = t$.

Одержимо: $$t - 8 = \frac{9}{t}; \qquad (2)$$

$$t^2 - 8t - 9 = 0; \qquad (3)$$

$$t_1 = 9,\ t_2 = -1.$$

Виконавши обернену заміну, отримаємо: $3^x = 9$, тоді $x = 2$, або $3^x = -1$ — коренів немає.

Відповідь: 2. ◁

Коментар

Якщо розглянути задане рівняння як найпростіше логарифмічне, то можна стверджувати, що за означенням логарифма воно рівносильне рівнянню $3^x - 8 = 3^{2-x}$. Як уже було зазначено раніше, ОДЗ заданого рівняння $3^x - 8 > 0$ для всіх коренів рівняння (1) ураховується автоматично, оскільки $3^{2-x} > 0$ завжди. Далі розв'язуємо рівняння (1) за схемою, наведеною в табл. 4 для показникових рівнянь. Оскільки $t = 3^x > 0$, то $t \ne 0$, і тому рівняння (2) рівносильне рівнянню (3).

Приклад 6 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2, \\ \log_3(y - x) = 1. \end{cases}$

Розв'язання

▶ $$\begin{cases} \log_2(xy) = 2, \\ \log_3(y - x) = 1. \end{cases}$$

За означенням логарифма маємо:

$$\begin{cases} xy = 2^2, \\ y - x = 3. \end{cases}$$

Із другого рівняння останньої системи одержуємо $y = x + 3$ і підставляємо його в перше рівняння:

$$x(x+3) = 4;\ x^2 + 3x - 4 = 0;$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = -4.$$

Тоді $y_1 = 4$, $y_2 = -1$.

Коментар

Як і логарифмічні рівняння, системи логарифмічних рівнянь можна розв'язувати і за допомогою *систем-наслідків* (*кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої*), і за допомогою *рівносильних перетворень систем* (*усі розв'язки кожної з них є розв'язками іншої*).

Крім того, для розв'язування систем логарифмічних рівнянь можна використовувати ті самі методи, що й для розв'язування інших видів систем (метод алгебраїчного додавання, підстановка деякого виразу з одного рівняння в інші, заміна змінних).

Перевірка.

$\begin{cases} \log_2 1 + \log_2 4 = 2, \\ \log_3 (4-1) = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 2 = 2, \\ 1 = 1, \end{cases}$ отже,

$\begin{cases} x = 1, \\ y = 4 \end{cases}$ — розв'язок заданої системи рівнянь;

$\begin{cases} x = -4, \\ y = -1 \end{cases}$ — сторонній розв'язок (оскільки під знаком логарифма одержуємо від'ємні числа).

Відповідь: $(1; 4)$. ◁

Наприклад, розв'яжемо задану систему за допомогою систем-наслідків. Для цього достатньо гарантувати, що у випадку, коли задана система складається з правильних рівностей, кожна наступна система також буде містити правильні рівності. Для систем рівнянь, як і для рівнянь, *при використанні систем-наслідків обов'язково необхідно виконати перевірку одержаних розв'язків підстановкою в початкову систему*.

Зауваження. Задану систему рівнянь можна було розв'язувати і за допомогою рівносильних перетворень систем. Тоді довелося б урахувати ОДЗ заданої системи рівнянь, склавши систему нерівностей $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y - x > 0, \end{cases}$ стежити за рівносильністю виконаних перетворень (у нашому випадку всі записані перетворення є рівносильними на ОДЗ), а в кінці перевіряти, чи задовольняють одержані розв'язки умови ОДЗ (пара чисел $\begin{cases} x = 1, \\ y = 4 \end{cases}$ задовольняє умови ОДЗ, а пара чисел $\begin{cases} x = -4, \\ y = -1 \end{cases}$ не задовольняє умови ОДЗ).

Приклад 7

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$

Розв'язання	Коментар
▶ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$ Тоді з першого рівняння маємо: $\frac{1}{\log_x y} + \log_x y = 2.$ Виконаємо заміну $t = \log_x y$. Одержимо: $\frac{1}{t} + t = 2$; $t^2 - 2t + 1 = 0$; $t = 1$. Виконавши обернену заміну, отримаємо: $\log_x y = 1$, тобто $y = x$. Тоді з другого рівняння системи маємо: $x^2 - x - 20 = 0$; $x_1 = -4$ (не входить до ОДЗ), $x_2 = 5$ (входить до ОДЗ). Отже, розв'язок заданої системи: $\begin{cases} x = 5, \\ y = 5. \end{cases}$ *Відповідь*: $(5; 5)$. ◁	Розв'яжемо задану систему за допомогою рівносильних перетворень. Для цього достатньо урахувати її ОДЗ і гарантувати, що на кожному кроці було виконано саме рівносильні перетворення рівняння або всієї системи. У першому рівнянні системи всі логарифми зведемо до однієї основи x (на ОДЗ $x > 0$, $x \neq 1$): $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$. На ОДЗ $y \neq 1$, отже, $\log_x y \neq 0$. Тоді після заміни $t = \log_x y$ маємо $t \neq 0$, і тому перехід у розв'язанні від дробового рівняння до квадратного є рівносильним. Оскільки заміна (разом з оберненою заміною) є рівносильним перетворенням, то, замінюючи перше рівняння системи рівносильним йому (на ОДЗ) рівнянням $y = x$, одержуємо систему, рівносильну заданій (на її ОДЗ).

Запитання

1. Поясніть на прикладах, як можна розв'язувати найпростіші логарифмічні рівняння, користуючись означенням логарифма.

2*. Обґрунтуйте справедливість рівносильного переходу
$\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c \quad (a > 0,\ a \neq 1)$.

3. Поясніть, як можна розв'язати рівняння $\log_5(x-2) = \log_5(x^2-2)$:
а) за допомогою рівнянь-наслідків;
б)* за допомогою рівносильних перетворень.

4. Поясніть на прикладі використання заміни змінних під час розв'язування логарифмічних рівнянь. У яких випадках доцільно використовувати заміну змінних?

Вправи

У завданнях 6.1.1–6.1.5 розв'яжіть рівняння.

6.1.1°. 1) $\log_2 x = 4$; 3) $\log_4 x = \frac{1}{2}$;
2) $\log_{0,2} x = -1$; 4) $\lg x = 2$.

6.1.2. 1°) $\log_3(2x-1) = 2$; 3) $\log_\pi(x^2+2x-2) = 0$;
2°) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-21) = -2$; 4) $\lg(3-x) = -1$.

6.1.3. 1°) $\lg(x+9) + \lg(2x+8) = 2$; 3) $2\log_2 x - \log_2(3x-4) = 1$;
2°) $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$; 4) $\frac{1}{2}\log_5(x-4) + \frac{1}{2}\log_5(2x-1) = \log_5 3$.

6.1.4. 1°) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$; 3) $\log_3^2 x + \log_3 x^2 = 8$;
2°) $\frac{1}{3-\lg x} + \frac{1}{1+\lg x} = 1$; 4) $\lg^3 x^2 = 8\lg x$.

6.1.5. 1) $\log_2(10-2^x) = x+2$;
2) $\lg 2 + \lg(4^{x-2}+9) = 1 + \lg(2^{x-2}+1)$;
3) $\log_7(6+7^{-x}) = 1+x$;
4) $\log_2 2(4\cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$.

6.1.6. Розв'яжіть графічно задане рівняння і перевірте підстановкою, що знайдене значення x дійсно є коренем рівняння:
1) $\log_2 x = 3 - x$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 1$;
2) $\log_3 x = \log_{\frac{1}{2}} x$; 4) $\lg x = 11 - x$.

6.1.7*. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 6.1.6, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

6.1.8. Розв'яжіть систему рівнянь:
1) $\begin{cases} \lg(xy) = 3, \\ \lg x \lg y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2, \\ \log_2(x+y-3) = 1; \end{cases}$
2) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2(y-1) = 3, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}, \\ xy = 16. \end{cases}$

У завданнях 6.1.9–6.1.18 розв'яжіть рівняння.

6.1.9. 1) $\log_3^2 x-3\log_3 x+2=0$; 3) $15-\lg x=2\sqrt{\lg x}$;

2) $\log_3 x(5-2\log_3 x)=3$; 4) $\dfrac{\lg^2(10x)}{5-\lg x}=1$.

6.1.10. 1) $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\dfrac{1}{x}$; 3) $\dfrac{2}{\log_2 x}+\dfrac{5}{\log_2 x+3}=2$;

2) $\log_3^2(3x)+\log_3 x=3^{\log_3 5}$; 4) $\dfrac{1}{5-\log_{\frac{1}{3}} x}+\dfrac{2}{1+\log_{\frac{1}{3}} x}=1$.

6.1.11. 1) $\log_3\log_2(x-4)=0$; 3) $\log_4\log_3\log_2 x=\dfrac{1}{2}$;

2) $\log_2\log_5 x=1$; 4) $\log_4\log_3\log_2(x^2-1)=0$.

6.1.12. 1) $2\log_4 x+5\log_x 4=11$; 3) $\log_2 x+\log_x 2=2{,}5$;

2) $1+2\log_{x+2}5=\log_5(x+2)$; 4) $\log_x 2-\log_4 x+\dfrac{7}{6}=0$.

6.1.13. 1) $\log_{0,5}(2^x-1)=x-1$; 3) $x+\log_2(2^x-31)=5$;

2) $\log_7(6+7^{-x})=1-x$; 4) $\log_3(3^{2x}-3^x-63)=x$.

6.1.14. 1) $\log_2(2^x+3)+\log_2(5-2^x)=4$;

2) $\log_2(4\cdot 3^x-6)-\log_2(9^x-6)=1$;

3) $\log_2(3^x-2)+\log_2(3^x-4)-\log_2(4\cdot 3^x-1)=0$;

4) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$.

6.1.15. 1) $\log_2 x+\log_3 x=1$;

2) $\log_{3x-5}2=\log_{x-1}\sqrt{2}$;

3) $\log_3(-x^2-8x-14)\cdot\log_{x^2+4x+4}9=1$;

4) $2\log_{3x}3=\log_x^2 3$.

6.1.16. 1) $\log_4\left(\log_2\dfrac{x}{2}\right)=-\log_4(\log_4 x)$;

2) $\log_3 x\log_9 x\log_{27} x\log_{81} x=\dfrac{2}{3}$;

3) $(2x^2-5x+2)(\log_{2x}(18x)+1)=0$;

4) $(x^2-7x+6)\left(\log_{\frac{x}{6}}\left(\dfrac{4}{9}x^2\right)+2\right)=0$.

6.1.17. 1) $|\lg|x||=\lg(-x)$; 2) $\left|2+\log_{\frac{1}{5}} x\right|+3=|1+\log_5 x|$.

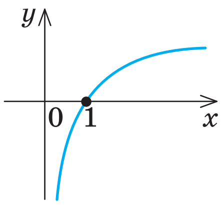
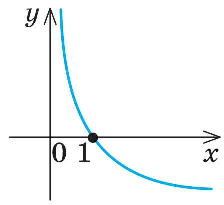
6.1.18. 1) $3\log_2^2\sin x+\log_2(1-\cos 2x)=2$;

2) $\log_2(\sqrt{3}\cos x)=\log_2(1+\sin x)$.

6.2. Розв'язування логарифмічних нерівностей

Таблиця 9

1. Графік функції $y=\log_a x$ $(a>0;\ a\neq 1)$

$a>1$	$0<a<1$
 зростає	 спадає

2. Рівносильні перетворення найпростіших логарифмічних нерівностей

$a>1$	$0<a<1$
$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)>g(x),\\ f(x)>0,\\ g(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)>g(x),\\ g(x)>0.\end{cases}$	$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)<g(x),\\ f(x)>0,\\ g(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)<g(x),\\ f(x)>0.\end{cases}$
Знак нерівності не змінюється, і враховується ОДЗ.	*Знак нерівності змінюється, і враховується ОДЗ.*

Приклади

$$\log_2(x-5)>3.$$

▶ ОДЗ: $x-5>0$, тобто $x>5$.

$$\log_2(x-5)>\log_2 2^3.$$

Функція $y=\log_2 t$ є зростаючою, отже,

$$x-5>2^3;\quad x>13.$$

Ураховуючи ОДЗ, маємо $x>13$.

Відповідь: $(13;+\infty)$. ◁

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-5)>3.$$

▶ ОДЗ: $x-5>0$, тобто $x>5$.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-5)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Функція $y=\log_{\frac{1}{2}} t$ є спадною, отже,

$$x-5<\left(\frac{1}{2}\right)^3;\quad x<5\frac{1}{8}.$$

Ураховуючи ОДЗ, маємо $5<x<5\frac{1}{8}$.

Відповідь: $\left(5;5\frac{1}{8}\right)$. ◁

3. Розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей

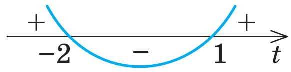
Орієнтир	Приклад
I. За допомогою рівносильних перетворень задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду.	$\lg^2(10x)-\lg x\geqslant 3.$ ▶ ОДЗ: $x>0$. На цій ОДЗ задана нерівність рівносильна нерівностям $(\lg 10+\lg x)^2-\lg x\geqslant 3;$ $(1+\lg x)^2-\lg x\geqslant 3.$

Схема рівносильних перетворень нерівності

1. **Ураховуємо ОДЗ** заданої нерівності (і уникаємо перетворень, які приводять до звуження ОДЗ).
2. Стежимо за тим, щоб **на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильності нерівності.**

Виконаємо заміну $\lg x = t$.

Одержимо нерівність $(1+t)^2 - t \geqslant 3$, тобто $t^2 + t - 2 \geqslant 0$, множина розв’язків якої $t \leqslant -2$ або $t \geqslant 1$ (див. рисунок).



Виконавши обернену заміну, отримаємо:

$$\lg x \leqslant -2 \quad \text{або} \quad \lg x \geqslant 1.$$

Тоді $\lg x \leqslant \lg 10^{-2}$ або $\lg x \geqslant \lg 10$.

Ураховуючи, що функція $y = \lg x$ є зростаючою, одержуємо: $x \leqslant 10^{-2}$ або $x \geqslant 10$.

Після врахування ОДЗ маємо: $0 < x \leqslant 0{,}01$ або $x \geqslant 10$.

Відповідь: $(0; 0{,}01] \cup [10; +\infty)$. ◁

II. Застосовуємо метод інтервалів (задана нерівність зводиться до нерівності виду $f(x) \gtrless 0$)

Схема методу інтервалів

1. **Знайти ОДЗ нерівності.**
2. **Знайти нулі функції** $f(x)$.
3. **Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак** $f(x)$ **у кожному з проміжків, на які ОДЗ розбивається нулями.**
4. **Записати відповідь, ураховуючи знак нерівності.**

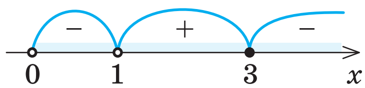
$$\log_x (2x+3) < 2.$$

▶ Розв’яжемо нерівність методом інтервалів. Вона рівносильна нерівність

$$\log_x (2x+3) - 2 < 0.$$

Позначимо $f(x) = \log_x (2x+3) - 2$.

1. ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$
2. Нулі функції: $f(x) = 0$; $\log_x (2x+3) - 2 = 0$; $\log_x (2x+3) = 2$.
   На ОДЗ це рівняння рівносильне рівнянню $2x + 3 = x^2$ (яке одержуємо за означенням логарифма). Тоді $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.
   До ОДЗ входить тільки $x = 3$, отже, $f(x)$ має єдиний нуль $x = 3$.
3. Позначаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (див. рисунок), і записуємо множину розв’язків нерівності $f(x) < 0$.



Відповідь: $(0; 1) \cup (3; +\infty)$. ◁

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Розв’язування найпростіших логарифмічних нерівностей

Найпростішими логарифмічними нерівностями зазвичай вважають нерівності виду

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \text{ (де } a > 0 \text{ і } a \neq 1). \quad (1)$$

Для розв’язування такої нерівності можна використати рівносильні перетворення.

Розв’язуючи нерівність у такий спосіб, необхідно врахувати її ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ і розглянути два випадки — основа логарифма більша за 1 або основа менша від 1 (але більша за 0).

I. Якщо $a>1$, логарифмічна функція $y=\log_a t$ зростає на всій області визначення (тобто при $t>0$), і тому більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента. Отже, переходячи в нерівності (1) від значень функції до значень аргумента (у даному випадку переходячи до виразів, які стоять під знаком логарифма), ми повинні залишити знак нерівності, тобто

$$f(x)>g(x). \qquad (2)$$

Ураховуючи, що на ОДЗ указаний перехід можна виконати й у зворотному напрямку (більшому додатному значенню аргумента відповідає більше значення функції), одержуємо, що на ОДЗ нерівність (1) рівносильна нерівності (2). Коротко це можна записати так:
якщо $a>1$, то

$$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), & (2) \\ f(x)>0, & (3) \\ g(x)>0. & (4) \end{cases}$$

II. Якщо $0<a<1$, логарифмічна функція $y=\log_a t$ спадає на всій області визначення (тобто при $t>0$), і тому більшому значенню функції відповідає менше значення аргумента. Отже, переходячи в нерівності (1) від значень функції до значень аргумента, ми повинні змінити знак нерівності на протилежний, тобто

$$f(x)<g(x). \qquad (5)$$

Ураховуючи, що на ОДЗ указаний перехід можна виконати й у зворотному напрямку (меншому додатному значенню аргумента відповідає більше значення функції), одержуємо, що при $0<a<1$ нерівність (1) на її ОДЗ рівносильна нерівності (5). Коротко це записуємо так:
якщо $0<a<1$, то

$$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), & (5) \\ f(x)>0, & (3) \\ g(x)>0. & (4) \end{cases}$$

Підсумовуючи одержані результати, зазначимо, що для розв'язування нерівності $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ за допомогою рівносильних перетворень необхідно врахувати її ОДЗ, а при переході від значень функції до значень аргумента (тобто до виразів, які стоять під знаком логарифма) урахувати значення a:

- *якщо $a>1$, знак нерівності не змінюється;*
- *якщо $0<a<1$, знак нерівності змінюється на протилежний.*

Приклади використання цих орієнтирів наведено в табл. 9.

Зауваження. Системи нерівностей, які одержано для випадків (I) і (II), можна дещо спростити. Наприклад, якщо в системі, отриманій для випадку (I), виконуються нерівність (2) $f(x)>g(x)$ і нерівність (4) $g(x)>0$, то з цих нерівностей випливає, що $f(x)>0$. Отже, нерівність (3) цієї системи автоматично виконується, коли виконуються нерівності (2) і (4), тому її можна не записувати до цієї системи (див. п. 2 табл. 9).

Аналогічно обґрунтовують, що в системі, отриманій для випадку II, нерівність (4) є наслідком нерівностей (3) і (5), її теж можна не записувати до системи.

Розв'яжемо нерівність

$$\log_5(x^2-2x)>\log_5 3.$$

▷ $\log_5(x^2-2x)>\log_5 3 \Leftrightarrow x^2-2x>3.$

(ОДЗ заданої нерівності $x^2-2x>0$ враховано автоматично, оскільки якщо виконується нерівність $x^2-2x>3$, то виконується і нерівність $x^2-2x>0$.)

Розв'язуємо нерівність $x^2-2x>3$. Тоді $x^2-2x-3>0$, отже (рис. 6.2.1), $x<-1$ або $x>3$ — множина розв'язків заданої нерівності. Звичайно, її можна записати і так: $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. ◁

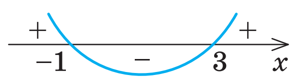


Рис. 6.2.1

2 Розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей

Складніші логарифмічні нерівності розв'язуються за допомогою або рівносильних перетворень заданої нерівності (і зведення її до відомого виду нерівностей), або методу інтервалів.

Схема рівносильних перетворень логарифмічних нерівностей повністю аналогічна схемі рівносильних перетворень логарифмічних рівнянь:

1) ***ураховуємо ОДЗ заданої нерівності;***
2) ***стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильності нерівності.***

У цьому випадку на ОДЗ кожен розв'язок заданої нерівності буде розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності буде розв'язком першої, тобто ці нерівності будуть рівносильними (на ОДЗ).

Приклади розв'язування логарифмічних нерівностей за допомогою рівносильних перетворень і методу інтервалів та оформлення такого розв'язування наведено в табл. 9. Розглянемо ще кілька прикладів.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Розв'яжіть нерівність $\log_{0,2}(x-1)+\log_{0,2}(x+3)\geqslant -1$.

Коментар

Розв'яжемо задану нерівність за допомогою рівносильних перетворень. Як і під час розв'язування рівнянь, для цього достатньо *урахувати ОДЗ заданої нерівності й стежити за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильності нерівності*. Оскільки на ОДЗ вирази, що стоять під знаком логарифмів, є додатними, то формулу $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$ для додатних b і c можна використовувати як у прямому, так і у зворотному напрямках. Отже, виконуючи перетворення нерівності за цією формулою, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на її ОДЗ).

Щоб скористатися властивостями логарифмічної функції, запишемо число -1 як значення логарифмічної функції: $-1=\log_{0,2}(0,2)^{-1}$ (зрозуміло, що і цю формулу можна використовувати як у прямому, так і у зворотному напрямках) і врахуємо, що $0,2^{-1}=\left(\frac{2}{10}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=5$.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $\begin{cases}x-1>0,\\ x+3>0.\end{cases}$ Тоді $x>1$.

На цій ОДЗ задана нерівність рівносильна нерівності

$$\log_{0,2}((x-1)(x+3))\geqslant \log_{0,2}(0,2)^{-1}.$$

Функція $y=\log_{0,2}t$ є спадною, отже, $(x-1)(x+3)\leqslant(0,2)^{-1}$.

Одержуємо: $x^2+2x-3\leqslant 5$; $x^2+2x-8\leqslant 0$.

Множина розв'язків останньої нерівності така (рис. 6.2.2): $-4\leqslant x\leqslant 2$.

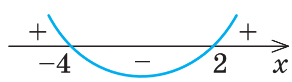


Рис. 6.2.2

Ураховуючи ОДЗ, одержуємо: $1<x\leqslant 2$.

Відповідь: $(1;2]$. ◁

Приклад 2* Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{x-1}{2-x} > -1$.

Розв'язання

▶ $$\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{x-1}{2-x} > \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}. \qquad (1)$$

Ураховуючи ОДЗ заданої нерівності й те, що функція $y = \log_{\frac{1}{3}} t$ є спадною, одержуємо

$$0 < \log_2 \frac{x-1}{2-x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, \qquad (2)$$

тобто $0 < \log_2 \frac{x-1}{2-x} < 3$,

або $\log_2 1 < \log_2 \frac{x-1}{2-x} < \log_2 2^3$.

Ураховуючи, що функція $y = \log_2 t$ є зростаючою, одержуємо

$$1 < \frac{x-1}{2-x} < 2^3. \qquad (3)$$

Ця нерівність рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} \frac{x-1}{2-x} > 1, \\ \frac{x-1}{2-x} < 8, \end{cases}$ яка, у свою чергу, рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{2-x} > 0, & (4) \\ \frac{9x-17}{2-x} < 0. & (5) \end{cases}$$

Розв'язуємо нерівності (4) і (5) методом інтервалів і знаходимо їх спільні розв'язки (рис. 6.2.3):

- для нерівності (4) ОДЗ: $x \neq 2$;
  $x = \frac{3}{2}$ — нуль функції $f(x) = \frac{2x-3}{2-x}$;
- для нерівності (5) ОДЗ: $x \neq 2$;
  $x = \frac{17}{9}$ — нуль функції $g(x) = \frac{9x-17}{2-x}$.

Відповідь: $\left(\frac{3}{2}; \frac{17}{9}\right)$. ◁

Коментар

ОДЗ заданої нерівності запишемо у вигляді системи нерівностей

$$\begin{cases} \log_2 \frac{x-1}{2-x} > 0, & (6) \\ \frac{x-1}{2-x} > 0. & (7) \end{cases}$$

Виконуючи рівносильні перетворення, пам'ятаємо, що головне — не записати ОДЗ, а врахувати її в процесі розв'язування. При переході від нерівності (1) до нерівності (2) у записі залишається лише один логарифмічний вираз $\log_2 \frac{x-1}{2-x}$, для якого ОДЗ: $\frac{x-1}{2-x} > 0$. Отже, при такому переході обмеження (7) буде неявно враховане, і тому достатньо врахувати тільки обмеження (6) (що й зроблено в лівій частині нерівності (2)).

Щоб використати властивості відповідних логарифмічних функцій, записуємо необхідні числа як значення логарифмічної функції: спочатку $-1 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ (і враховуємо, що $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$), а потім $0 = \log_2 1$ і $3 = \log_2 2^3$.

При переході від нерівності (2) до нерівності (3) одержуємо, що $\frac{x-1}{2-x} > 1$, отже, і в цьому випадку нерівність (7) урахована автоматично. Для знаходження спільних розв'язків нерівностей (4) і (5) зручно їх розв'язання методом інтервалів розмістити одне над одним так, щоб однаково позначені точки були розташовані одна над одною. Тоді за рис. 6.2.3 відразу визначимо спільні розв'язки системи нерівностей.

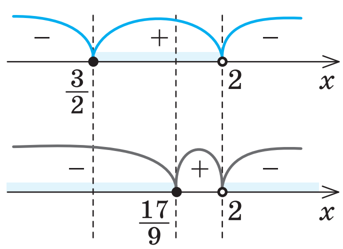


Рис. 6.2.3

Запитання

1. Поясніть на прикладах, як можна розв'язувати найпростіші логарифмічні нерівності, користуючись властивостями логарифмічної функції.

2*. Обґрунтуйте справедливість рівносильних переходів:

1) якщо $a>1$, то $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0; \end{cases}$

2) якщо $0<a<1$, то $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{cases}$

3. Поясніть на прикладі використання методу інтервалів для розв'язування логарифмічних нерівностей.

Вправи

У завданнях 6.2.1–6.2.6 розв'яжіть нерівність.

6.2.1°. 1) $\log_3 x>2$; 3) $\log_{0,5} x<1$; 2) $\log_{0,2} x>-1$; 4) $\lg x<2$.

6.2.2. 1) $\log_2(3x-2)>2$; 3) $\log_5(3x-2)<2$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1)>-2$; 4) $\log_{\frac{1}{4}}(2x+1)>-1$.

6.2.3°. 1) $\lg(2x-1)>\lg(x+2)$; 3) $\log_{0,2} x<\log_{0,2}(3x-6)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(3x+1)>\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$; 4) $\log_4(2x-1)\leqslant\log_4(x+3)$.

6.2.4. 1) $\log_3^2 x-3\log_3 x+2>0$; 3) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-4\leqslant 0$; 2) $\dfrac{1}{3-\lg x}+\dfrac{1}{1+\lg x}>1$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x+\log_{\frac{1}{2}} x-2\geqslant 0$.

6.2.5. 1) $\lg x+\lg(x-9)>1$; 3) $\log_2\left(x^2-x-12\right)<3$; 2) $\log_{0,1}(x+4)+\log_{0,1}(x-5)\leqslant -1$; 4) $\log_\pi(x+1)+\log_\pi x\geqslant\log_\pi 2$.

6.2.6*. 1) $\log_3\log_2\log_{0,5} x\geqslant 0$; 3) $\log_2 x+\log_x 2\leqslant 2,5$; 2) $\log_x\sqrt{x+12}>1$; 4) $\log_{\frac{2x-1}{x-3}} 3<0$.

6.2.7*. У прямокутній системі координат на площині побудуйте графік рівняння або нерівності:

1) $\log_{y-2x}\left(3-x^2\right)=1$; 3) $\log_{1-x}(1+y)>1$; 2) $\log_{2y}\left(3x^2+y^2\right)=2$; 4) $\log_{0,3}\left(x+x^2\right)\geqslant\log_{0,3}(x+y)$.

У завданнях 6.2.8–6.2.13 розв'яжіть нерівність.

6.2.8. 1) $\log_x 2+\log_2 x\leqslant 2{,}5$; 3) $\log_{2x-1} 2>\log_4(2x-1)-\frac{1}{2}$;

2) $\log_2(x+1)>\log_{x+1} 16$; 4) $\log_5\frac{x}{5}+\log_{\frac{1}{25}} x<1$.

6.2.9. 1) $\log_{x-3}\left(x^2-4x+3\right)<0$; 3) $\log_{x-2}\left(1-5x^3+x^5\right)<0$;

2) $\log_x\frac{3x-11}{2x-1}<0$; 4) $\log_x\sqrt{x+12}>1$.

6.2.10. 1) $\log_{\frac{2x-1}{x-3}} 3<0$; 3) $\log_{4x^2+1} 65>1$;

2) $\log_{9x^2+1} 37>1$; 4) $\log_{\log_4 x} 3\geqslant 1$.

6.2.11*. 1) $\log_{0,5}(x+1)>\log_2(2-x)$; 3) $\frac{1}{\log_3(5-2x)^2}\leqslant\frac{1}{3+\log_{\frac{1}{3}}(5-2x)}$;

2) $\log_{49}(x+3)-\log_7(x+2)<0$; 4) $\frac{\lg^2 x+2\lg x-6}{\lg x}<1$.

6.2.12*. 1) $\log_3\left(3^x-8\right)\leqslant 2-x$; 3) $\log_3\left(2^{2x-1}-3\cdot 2^{x-1}+1\right)<1$;

2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1}-36^x\right)\geqslant -2$; 4) $\lg 6+x\lg 5\geqslant x+\lg\left(2^x+1\right)$.

6.2.13. 1) $\frac{4^{\frac{1}{x}}-4}{x-2}>0$; 3) $\frac{\sqrt{x-1}}{\log_3 x^2-1}\geqslant 0$;

2) $\frac{\log_2^2 x}{x^2-2}\geqslant 0$; 4) $\frac{\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2+2\right)}{x^2+6x+5}\leqslant 0$.

6.2.14*. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=1-\sqrt{\log_4\left(x^2-3x\right)}$; 3) $y=\sqrt{\log_{3x+1}\left(\frac{x-2}{x-4}\right)}$;

2) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-5x+7\right)}$; 4) $y=\sqrt{\frac{\log_2(x+1)}{x-1}}$.

У завданнях 6.2.15, 6.2.16 розв'яжіть нерівність.

6.2.15*. 1) $\log_{x+1}\frac{2x-1}{x-1}\leqslant 1$; 3) $\log_{\frac{x}{2}}\frac{8x-8}{8x-5}>-1$;

2) $\log_{x+3}\frac{2x+5}{4(x-1)}\geqslant 0$; 4) $\log_{\frac{x-1}{5}}\left(x^2-10x+25\right)\geqslant 0$.

6.2.16*. 1) $\log_{\frac{1}{3}-2x}\left(1-16x^2\right)>0$; 3) $\log_{x+1}\left(\frac{x^2-x-1}{x+2}\right)>0$;

2) $\log_{\frac{1}{4}-3x}\left(1-25x^2\right)>0$; 4) $\log_{\sqrt{x}}\frac{4x-14}{2x-15}>-2$.

§ 7 ПОХІДНІ ПОКАЗНИКОВОЇ ТА ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЙ

Таблиця 10

$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$ ($a>0$, a — стала)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ($x>0$)	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ ($x>0$, $a>0$, $a\neq 1$, a — стала)	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ (на ОДЗ правої частини формули)

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Щоб обґрунтувати *формули похідних показникової та логарифмічної функцій*, використаємо без доведення властивість функції $y=e^x$ (вона доводиться в курсі вищої математики*): **похідна функції** $y=e^x$ **дорівнює цій самій функції** $y=e^x$, тобто

$$(e^x)' = e^x.$$

Якщо $a>0$, за основною логарифмічною тотожністю маємо

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x\ln a}.$$

Тоді за правилом знаходження похідної складеної функції одержуємо:

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = a^x \ln a,$$

тобто $(a^x)' = a^x \ln a$. ○

За одержаною формулою ми можемо знайти значення похідної показникової функції для будь-якого значення x. Отже, *показникова функція диференційовна в кожній точці області визначення*, а відповідно, *і неперервна в кожній точці своєї області визначення* (тобто при всіх дійсних значеннях x).

Для логарифмічної функції спочатку знайдемо похідну функції $y=\ln x$, приймаючи без доведення існування похідної. Область визначення цієї функції $x>0$, тобто $(0;+\infty)$. Якщо $x>0$, за основною логарифмічною тотожністю маємо $e^{\ln x}=x$. Ця рівність означає, що за умови $x>0$ функції $y=e^{\ln x}$ і $y=x$ збігаються (це одна і та сама функція, задана на множині $\boldsymbol{R}_+$), а отже, збігаються їхні похідні. Використовуючи для лівої частини рівності правило знаходження похідної складеної функції, одержуємо:

$$(e^{\ln x})' = (x)';\quad e^{\ln x}(\ln x)' = 1,$$

тобто $x(\ln x)' = 1$.

Звідси $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (де $x>0$).

Оскільки $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\ln x$,

то $(\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln a}\ln x\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' =$

$$= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}.$$

Отже, $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ (де $x>0$, $a>0$, $a\neq 1$, a — стала). ○

Зауваження. Формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ була обґрунтована в § 32 підручника для 10 класу тільки для цілих значень n. Доведемо, що вона виконується і при будь-яких дійсних значеннях n.

---

* Нагадаємо, що e — ірраціональне число, $e = 2,718\,281\,82\ldots$.

Якщо n — довільне неціле число, то функція $y=x^n$ означена тільки при $x>0$. Тоді за основною логарифмічною тотожністю $x^n=e^{\ln x^n}=e^{n\ln x}$. За правилом обчислення похідної складеної функції одержуємо

$$\left(x^n\right)'=\left(e^{n\ln x}\right)'=e^{n\ln x}(n\ln x)'=$$
$$=x^n n(\ln x)'=x^n n\frac{1}{x}=nx^{n-1}.$$

Отже, надалі формулою $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$ можна користуватися при будь-яких дійсних значеннях n (нагадаємо, що в цьому випадку *її можна використовувати тільки при тих значеннях x, при яких визначена її права частина*).

Спираючись на одержаний результат, обґрунтуємо також формулу

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\quad (n\in N), \qquad (1)$$

яку можна використовувати при тих значеннях x, при яких визначена її права частина.

Якщо n — парне число, то ОДЗ правої частини формули (1): $x>0$. Але за цієї умови

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}}=$$
$$=\frac{1}{n}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}. \qquad (2)$$

Якщо n — непарне число, то ОДЗ правої частини формули (1): $x\neq 0$. При $x>0$ залишається справедливою рівність (2), при $x<0$ врахуємо, що $\sqrt[n]{x}=-\sqrt[n]{-x}$ і $-x>0$, а також те, що при непарному n число $1-n$ буде парним (тому $(-1)^{1-n}=1$).

Тоді

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\left(-\sqrt[n]{-x}\right)'=\left(-(-x)^{\frac{1}{n}}\right)'=$$
$$=-\frac{1}{n}(-x)^{\frac{1}{n}-1}(-x)'=\frac{1}{n}(-x)^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(-x)^{1-n}}=$$
$$=\frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Отже, для непарного n при всіх $x\neq 0$ формула (1) теж виконується.

В останньому випадку такі громіздкі перетворення довелося виконувати через те, що при $x<0$ вираз $x^{\frac{1}{n}}$ не означений, а вираз $(-x)^{\frac{1}{n}}$ існує, оскільки $-x>0$ при $x<0$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Знайдіть похідну функції:

1) $f(x)=\sin^2 x+e^{\frac{x}{2}}$;   2) $f(x)=\frac{\ln x}{\cos 3x}$.

Розв'язання	Коментар
1) $f'(x)=\left(\sin^2 x+e^{\frac{x}{2}}\right)'=\left(\sin^2 x\right)'+\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'=$ $=2\sin x(\sin x)'+e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)'=$ $=2\sin x\cos x+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}=\sin 2x+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}.$	Послідовно визначаємо, від якого виразу береться похідна (орієнтуючись на результат останньої дії). У завданні 1 спочатку знаходимо похідну суми: $(u+v)'=u'+v'$. Потім для кожного з доданків використовуємо формулу похідної складеної функції: знаходимо похідні u^2 та e^u і множимо на u'.

2) $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{\cos 3x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cos 3x-(\cos 3x)'\ln x}{(\cos 3x)^2}=$

$=\frac{\frac{1}{x}\cos 3x-(-\sin 3x)(3x)'\ln x}{\cos^2 3x}=$

$=\frac{\cos 3x+3x\sin 3x\ln x}{x\cos^2 3x}$. ◁

Одержаний результат бажано спростити за формулою $2\sin x\cos x=\sin 2x$. У завданні 2 спочатку знаходимо похідну частки: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$, а для похідної знаменника використовуємо формулу похідної складеної функції: знаходимо похідну $\cos u$ і множимо на u').

Приклад 2

Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=xe^x$ у точці $x_0=1$.

Розв'язання	Коментар
▶ Якщо $f(x)=xe^x$, то $f(x_0)=f(1)=e$. $f'(x)=x'e^x+(e^x)'x=e^x+xe^x$, тоді $f'(x_0)=f'(1)=2e$. Підставляючи ці значення в рівняння дотичної $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, одержуємо: $y=e+2e(x-1)$. Отже, $y=2ex-e$ — шукане рівняння дотичної. ◁	Рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0 у загальному вигляді записується так: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Щоб записати це рівняння для заданої функції, потрібно знайти $f(x_0)$, похідну $f'(x)$ і значення $f'(x_0)$. Для виконання відповідних обчислень зручно позначити задану функцію через $f(x)$, а для знаходження її похідної використати формулу похідної добутку $(uv)'=u'v+v'u$.

Приклад 3

Виконайте завдання:

1) побудуйте графік функції $y=\frac{\ln x}{x}$;

2*) знайдіть найбільше значення параметра a, при якому рівняння $\ln x=ax$ має єдиний корінь.

Коментар

Для розв'язування завдання 1 досліджуємо функцію $y=\frac{\ln x}{x}$ за загальною схемою і за результатами дослідження будуємо її графік. Під час дослідження функції на парність і непарність можна скористатися тим, що *в парної або непарної функції* до області визначення входять точки x і $(-x)$. Отже, для таких функцій *область визначення має бути симетричною відносно точки* 0. Якщо ж ця умова не виконується, то функція не може бути ні парною, ні непарною.

Для кращого уявлення про вигляд графіка доцільно уточнити поведінку функції на кінцях області визначення $(D(y)=(0;+\infty))$. При $x\to 0$ (справа, тобто при $x\to +0$) значення $\ln x\to -\infty$. Тоді $y=\frac{\ln x}{x}\to\left(\frac{-\infty}{+0}\right)\to -\infty$. Отже, пряма $x=0$ — вертикальна асимптота, і це потрібно врахувати під час побудови графіка функції. Але при $x\to +\infty$ ми не можемо виконати таку оцінку (одержуємо невизначеність виду $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$). У такому випадку поведінку функції при $x\to +\infty$ можна уточнити за допомогою додаткових контрольних точок.

Під час розв'язування завдання 2 доцільно використати графічну ілюстрацію розв'язування. Це можна зробити двома способами.

I. За допомогою рівносильних перетворень привести задане рівняння до виду $f(x)=a$ (де $f(x)=\frac{\ln x}{x}$) і, використовуючи графік, побудований в результаті виконання завдання 1, з'ясувати, скільки коренів має рівняння $f(x)=a$ при різних значеннях параметра a.

II. Застосувати графічне розв'язування безпосередньо до рівняння $\ln x = ax$ (графіки функцій $y=\ln x$ і $y=ax$ відомі), а для дослідження єдиності кореня використати геометричний зміст похідної.

? Як ви вважаєте, який спосіб доцільно використати у даному випадку?

Розв'язання

1) Дослідимо функцію $y=\frac{\ln x}{x}$.

1. Область визначення: $x>0$, тобто $D(y)=(0;+\infty)$.
2. Функція ні парна, ні непарна, оскільки її область визначення не симетрична відносно точки 0.
3. Точки перетину графіка з осями координат:
   - графік не перетинає вісь Oy $(x \neq 0)$;
   - на осі Ox $y=0$, тобто $\frac{\ln x}{x}=0$, тоді при $x>0$ одержуємо: $\ln x=0$; $x=1$ — абсциса точки перетину графіка з віссю Ox.
4. Похідна і критичні точки: $y'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=$

$$=\frac{(\ln x)'\,x-x'\ln x}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}x-1\cdot\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$ (тобто при $x>0$), отже, функція неперервна на всій області визначення.

Знаходимо критичні точки: $y'=0$, тобто $\frac{1-\ln x}{x^2}=0$. Звідси при $x>0$ одержуємо $\ln x=1$, отже, $x=e$ — критична точка.

5. Позначаємо критичні точки на області визначення функції і знаходимо знак $y'(x)$ у кожному з одержаних проміжків (рис. 7.1).

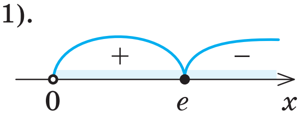


Рис. 7.1

Складаємо таблицю, у якій позначаємо проміжки зростання і спадання та екстремуми функції.

x	$(0;e)$	e	$(e;+\infty)$
$y'(x)$	$+$	0	$-$
$y(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$
		max	

6. Знаходимо ще декілька точок графіка функції.

x	$\frac{1}{e}\approx 0{,}4$	$e^2\approx 7{,}4$	$e^3\approx 20{,}1$
$y(x)$	$-e\approx -2{,}7$	$\frac{2}{e^2}\approx 0{,}3$	$\frac{3}{e^3}\approx 0{,}1$

7. За результатами дослідження будуємо графік функції $y=\frac{\ln x}{x}$ (рис. 7.2). ◁

2) **I спосіб**

Область допустимих значень рівняння $\ln x = ax$ задається нерівністю $x>0$. Але тоді $x\neq 0$ і задане рівняння на його ОДЗ рівносильне рівнянню $\frac{\ln x}{x}=a$.

Розв'яжемо останнє рівняння графічно. Для цього побудуємо графіки функцій $y=\frac{\ln x}{x}$ (див. завдання 1) та $y=a$ (рис. 7.3).

Як бачимо, рівняння $\frac{\ln x}{x}=a$ має єдиний корінь тільки при $a\leqslant 0$ та при $a=\frac{1}{e}$ (при $0<a<\frac{1}{e}$ рівняння має два корені, а при $a>\frac{1}{e}$ рівняння не має коренів).

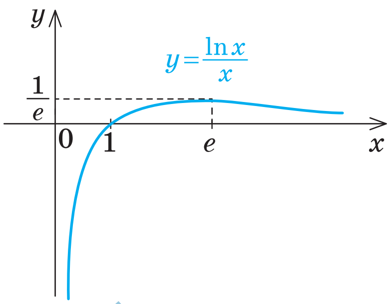


Рис. 7.2

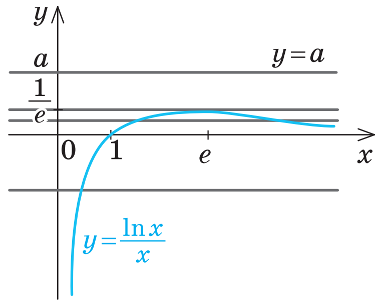


Рис. 7.3

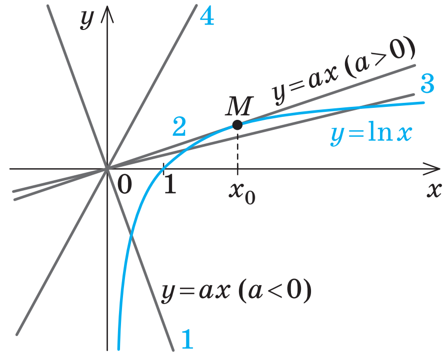


Рис. 7.4

Отже, найбільше значення параметра a, при якому рівняння $\ln x = ax$ має єдиний корінь, — це $a = \frac{1}{e}$.

II спосіб

Розглянемо графічну ілюстрацію (рис. 7.4) розв'язування заданого рівняння

$$\ln x = ax. \qquad (1)$$

Функція $y = \ln x$ зростаюча і набуває всіх значень від $-\infty$ до $+\infty$.

Графіком функції $y = ax$ є пряма, яка проходить через початок координат.

При $a < 0$ пряма $y = ax$ перетинає графік функції $y = \ln x$ тільки в одній точці (пряма 1 на рис. 7.4). Отже, рівняння (1) має єдиний корінь (дійсно, функція $y = \ln x$ зростаюча, а функція $y = ax$ — спадна, і тому рівняння (1) може мати тільки один корінь).

При $a = 0$ рівняння (1) має вигляд $\ln x = 0$ і теж має єдиний корінь $(x = 1)$.

При $a > 0$ пряма $y = ax$ може дотикатися до графіка функції $y = \ln x$ (пряма 2 на рис. 7.4). Тоді рівняння (1) буде мати єдиний корінь. Пряма $y = ax$ може проходити в першій чверті нижче дотичної (пряма 3 на рис. 7.4). Тоді рівняння (1) буде мати два корені. Також пряма $y = ax$ може проходити в першій чверті вище дотичної (пряма 4 на рис. 7.4), тоді рівняння (1) не буде мати коренів.

З'ясуємо, коли пряма $y = ax$ буде дотичною до графіка функції $y = f(x) = \ln x$. Нехай точка дотику M має абсцису x_0. Ураховуючи геометричний зміст похідної, одержуємо, що $f'(x_0) = a$ (значення похідної в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної через точку M). Оскільки $f'(x) = \frac{1}{x}$, то $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$. Тоді з рівності $f'(x_0) = a$ маємо $\frac{1}{x_0} = a$. Звідси $x_0 = \frac{1}{a}$. Тоді $y_0 = \ln\frac{1}{a}$.

До того ж, оскільки точка дотику M лежить і на дотичній $y = ax$, то її координати задовольняють рівняння дотичної. Одержуємо $\ln\frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a}$, звідси $\ln\frac{1}{a} = 1$. Тоді $\frac{1}{a} = e$, $a = \frac{1}{e}$.

Отже, задане рівняння матиме єдиний корінь тільки при $a \leqslant 0$ і при $a = \frac{1}{e}$. Тоді найбільше значення параметра a, при якому рівняння $\ln x = ax$ має єдиний корінь, — це $a = \frac{1}{e}$. ◁

Приклад 4 Доведіть, що при всіх дійсних значеннях x виконується нерівність $e^x \geqslant 1 + x$.

Розв'язання	Коментар
▶ Розглянемо функцію $$f(x) = e^x - 1 - x.$$ Область визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$. Похідна $f(x) = e^x - 1$ існує на всій області визначення.	Використаємо похідну для доведення заданої нерівності. Для цього дослідимо функцію $f(x)$, яка є різницею лівої і правої частин нерівності.

Отже, функція $f(x)$ неперервна на всій числовій прямій; $f'(x)=0$, $e^x-1=0$, $e^x=1$, $x=0$ — критична точка. Позначаємо критичну точку на області визначення функції $f(x)$, знаходимо знаки похідної та визначаємо поведінку функції в кожному з одержаних проміжків (рис. 7.5).

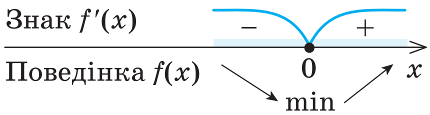


Рис. 7.5

Як бачимо, неперервна функція $f(x)$ має на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ тільки одну критичну точку, і це точка мінімуму. Отже, у цій точці функція набуває свого найменшого значення на цьому інтервалі. Тоді при всіх дійсних значеннях x значення $f(x)\geqslant f(0)=0$, тобто $e^x-1-x\geqslant 0$. Отже, $e^x\geqslant 1+x$ при всіх дійсних значеннях x. ◁

Спробуємо в результаті дослідження знайти найбільше чи найменше значення функції $f(x)$ на всій числовій прямій. Для цього можна використати таку властивість: *якщо неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка мінімуму, то на заданому інтервалі функція набуває свого найменшого значення в точці x_0.* Далі користуємося тим, що коли в точці x_0 функція набуває найменшого значення на заданому інтервалі, то для всіх значень x із цього інтервалу $f(x)\geqslant f(x_0)$ (якщо необхідно, то можна уточнити, що знак рівності досягається тільки в точці x_0).

У процесі доведення числових нерівностей або порівняння двох чисел часто буває зручним перейти до більш загальної функціональної нерівності.

Приклад 5* Порівняйте числа π^e і e^π.

Коментар

Щоб визначити план розв'язування, можна міркувати так. Ми не знаємо, яке із заданих чисел більше: π^e або e^π, тому для аналізу поставимо між ними «$\vee$» — знак нерівності, напрямлений гострим кінцем униз. Це свідчить про те, що ми не знаємо, у який бік його треба направити. Будемо виконувати перетворення нерівності доти, поки не з'ясуємо, яке число більше. Потім знак «$\vee$» замінимо відповідним знаком нерівності («>» або «<»), який і запишемо в розв'язанні. (У процесі аналізу, якщо на якомусь кроці перетворень потрібно поміняти знак нерівності, знак «$\vee$» змінюють на знак «$\wedge$», а в записі розв'язання у відповідному місці змінюють знак нерівності.) Під час аналізу запис типу $\pi^e\vee e^\pi$ теж будемо називати нерівністю (але, звичайно, не в розв'язанні).

Розглянемо нерівність $\pi^e\vee e^\pi$. Це нерівність із додатними членами ($\pi>0$ і $e>0$), отже, обидві її частини можна прологарифмувати.

Функція $y=\ln t$ зростаюча, тому після логарифмування обох частин за основою e знак нерівності не зміниться і ми одержимо нерівність $\ln(\pi^e)\vee\ln(e^\pi)$, тобто нерівність $e\ln\pi\vee\pi\ln e$. Оскільки $e\pi>0$, то після ділення обох частин останньої нерівності на $e\pi$ знак нерівності не зміниться і ми одержимо нерівність $\frac{\ln\pi}{\pi}\vee\frac{\ln e}{e}$. Помічаємо, що в лівій і правій частинах останньої нерівності стоять значення однієї й тієї самої функції $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Дослідимо цю функцію за допомогою похідної на зростання і спадання. Далі, ураховуючи, що $\pi>e$, порівняємо одержані вирази, а потім і задані вирази (виконуючи всі ті самі перетворення, що й у процесі аналізу, тільки у зворотному порядку).

Розв'язання

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Її область визначення $x>0$. Похідна $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ існує на всій області визначення. З'ясуємо, коли $f'(x)=0$: $\frac{1-\ln x}{x^2}=0$, на області визначення одержуємо рівносильне рівняння $\ln x=1$, отже, $x=e$ — критична точка. Позначаємо критичну точку на області визначення функції $f(x)$, знаходимо знаки похідної і визначаємо поведінку функції в кожному з одержаних проміжків (рис. 7.6).

Отже, в інтервалі $(e;+\infty)$ функція $f(x)$ спадає, а її неперервність на всій області визначення свідчить про те, що вона спадає на проміжку $[e;+\infty)$.

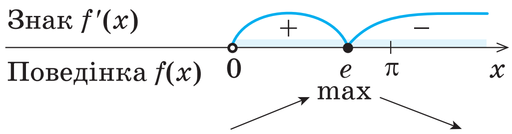


Рис. 7.6

Оскільки $\pi>e$, то $f(\pi)<f(e)$, тобто $\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{\ln e}{e}$. Домноживши обидві частини цієї нерівності на додатне число πe (знак нерівності не змінюється), одержуємо нерівність $e\ln\pi<\pi\ln e$. Тоді $\ln(\pi^e)<\ln(e^\pi)$. Оскільки функція $y=\ln t$ зростаюча $(e>1)$, то $\pi^e<e^\pi$.

Відповідь: $\pi^e<e^\pi$. ◁

Приклад 6* Розв'яжіть рівняння $2^{x+3}+2^{2x+1}=7\cdot3^x+3$.

Коментар

Якщо спробувати застосувати до заданого рівняння схему розв'язування показникових рівнянь (див. табл. 4), то зможемо реалізувати тільки перший її пункт — позбутися числових доданків у показниках степенів. А от звести всі степені до однієї основи (зі зручними показниками) або до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння, або перенести всі члени в один бік і розкласти одержаний вираз на множники — не зможемо. Спробуємо застосувати властивості відповідних функцій. Але і при такому підході (див., наприклад, § 4 підручника для 10 класу або § 8 цього підручника) ми не зможемо використати скінченність ОДЗ (вона нескінченна) та оцінку лівої і правої частин рівняння (вони обидві лежать у межах від 0 до $+\infty$). Якщо сподіватися на можливість використання монотонності функції, то й тут ми не можемо застосувати теореми про корені (в обох частинах заданого рівняння стоять зростаючі функції).

Тоді *спробуємо підібрати корені цього рівняння й довести, що інших коренів рівняння не має* (зручно попередньо звести рівняння до виду $f(x)=0$).

Послідовно підставляючи значення $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, з'ясовуємо, що $f(0)=0$, $f(1)=0$, $f(3)=0$, тобто рівняння $f(x)=0$ має три корені. Щоб довести, що інших коренів немає, достатньо довести, що функція $f(x)$ має не більше трьох проміжків зростання або спадання. Ураховуючи ж неперервність $f(x)$ на всій числовій прямій, достатньо довести, що в неї не більше двох критичних точок, тобто рівняння $f'(x)=0$ має не більше двох коренів. Розглядаючи тепер рівняння $f'(x)=0$, після його перетворення можемо провести аналогічні міркування, але вже для двох коренів (як це було зроблено в прикладі 2 до п. 36.1 в інтернет-підтримці до підручника 10 класу.) Виконуючи перетворення рівняння $f'(x)=0$, урахуємо, що всі його члени мають однаковий степінь — x (тобто воно є однорідним відносно трьох функцій від змінної x), а саме: 2^x, 3^x, 4^x. Поділивши обидві частини рівняння $f'(x)=0$ на степінь з основою 2, 3 або 4, зменшимо кількість виразів зі змінною на один.

Розв'язання

Задане рівняння рівносильне рівнянню $2^x \cdot 2^3 + 2^{2x} \cdot 2^1 - 7 \cdot 3^x - 3 = 0$, тобто

$$8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3 = 0. \qquad (1)$$

Позначимо $f(x) = 8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3$.

Оскільки $f(0) = 8 + 2 - 7 - 3 = 0$,
$f(1) = 16 + 8 - 21 - 3 = 0$,
$f(3) = 64 + 128 - 189 - 3 = 0$,

то рівняння $f(x) = 0$ має три корені: 0, 1, 3. Доведемо, що інших коренів рівняння (1) не має. Для цього достатньо довести, що функція $f(x)$ має не більше трьох проміжків зростання або спадання. Оскільки ж функція $f(x)$ на всій числовій прямій неперервна, достатньо довести, що функція має не більше двох критичних точок.

Область визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Похідна $f'(x) = 8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3$ існує при всіх значеннях x. Отже, критичними точками можуть бути тільки ті значення x, при яких $f'(x) = 0$. Одержуємо рівняння $8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3 = 0$.

Оскільки $3^x \neq 0$, то в результаті ділення обох частин останнього рівняння на 3^x одержуємо рівносильне рівняння

$$8\left(\frac{2}{3}\right)^x \ln 2 + 2\left(\frac{4}{3}\right)^x \ln 4 - 7\ln 3 = 0. \qquad (2)$$

Щоб довести, що рівняння (2) має не більше двох коренів, достатньо довести, що функція $\varphi(x) = 8\left(\frac{2}{3}\right)^x \ln 2 + 2\left(\frac{4}{3}\right)^x \ln 4 - 7\ln 3$ у лівій частині рівняння має не більше двох проміжків зростання або спадання. Ураховуючи неперервність цієї функції на всій числовій прямій, достатньо довести, що вона має тільки одну критичну точку. Дійсно,

$$\varphi'(x) = (8\ln 2)\left(\frac{2}{3}\right)^x \ln\frac{2}{3} + (2\ln 4)\left(\frac{4}{3}\right)^x \ln\frac{4}{3}$$

існує при всіх значеннях x. Отже, критичними точками можуть бути тільки ті значення x, при яких $\varphi'(x) = 0$. Одержуємо однорідне рівняння*

$$(8\ln 2)\left(\frac{2}{3}\right)^x \ln\frac{2}{3} + (4\ln 2)\left(\frac{4}{3}\right)^x \ln\frac{4}{3} = 0.$$

Оскільки $(4\ln 2)\left(\frac{2}{3}\right)^x \neq 0$, то після ділення обох частин рівняння на цей вираз одержуємо рівносильне рівняння $2\ln\frac{2}{3} + 2^x \ln\frac{4}{3} = 0$.

Звідси $2^x = \dfrac{-2\ln\frac{2}{3}}{\ln\frac{4}{3}}$. Ураховуючи, що $\ln\frac{2}{3} < 0$, а $\ln\frac{4}{3} > 0$, одержуємо $\dfrac{-2\ln\frac{2}{3}}{\ln\frac{4}{3}} > 0$.

Отже, останнє рівняння має єдиний корінь. Тоді функція $\varphi(x)$ має єдину критичну точку і рівняння (2) має не більше двох коренів. Це означає, що функція $f(x)$ має не більше двох критичних точок. Тоді рівняння (1) (і задане рівняння) має не більше трьох коренів. Але три корені заданого рівняння ми вже знаємо: 0, 1, 3. Отже, інших коренів задане рівняння не має.

Відповідь: 0, 1, 3. ◁

Запитання

1. Запишіть формули знаходження похідних:

а) показникової і логарифмічної функцій;

б) функції $\sqrt[n]{x}$.

2*. Обґрунтуйте формули знаходження похідних, про які йдеться у запитанні 1.

* $2\ln 4 = \ln 4^2 = \ln 2^4 = 4\ln 2$.

Вправи

У завданнях 7.1, 7.2 знайдіть похідну функції.

7.1°. 1) $y=3e^x+4$; 3) $y=e^{-x}+x^5$;

2) $y=e^x-\ln x$; 4) $y=\ln(2x-1)$.

7.2. 1) $y=e^{5x}\cos x$; 3) $y=\sqrt{x}\lg x$;

2) $y=\frac{\ln x}{x}$; 4) $y=x^3\log_2 x$.

7.3. Розв'яжіть нерівність $f'(x)>0$, якщо:

1°) $f(x)=e^{2x}-x$; 3) $f(x)=x\ln x$;

2°) $f(x)=2x-\ln x$; 4) $f(x)=(1-x)e^{-2x}$.

7.4. Дано функцію $f(x)$:

1) $f(x)=x^2\ln x$; 3) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$;

2) $f(x)=x^3-3\ln x$; 4) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$.

Знайдіть значення x, при яких значення похідної функції $f(x)$:

а) дорівнює нулю; б) додатне; в) від'ємне.

7.5. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x)=\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$; 3) $f(x)=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$, $x_0=0$;

2) $f(x)=\mathrm{tg}\,2x$, $x_0=\frac{\pi}{8}$; 4) $f(x)=\ln x-x$, $x_0=1$.

7.6. Знайдіть абсциси x_0 точок графіка функції $y=f(x)$, у яких дотична до нього утворює кут φ з додатним напрямком осі Ox, якщо:

1) $f(x)=\sin 2x$, $\varphi=0°$; 3) $f(x)=e^{-x}$, $\varphi=135°$.

2) $f(x)=\ln 2x$, $\varphi=45°$;

7.7*. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=e^{5x+1}$, якщо дотична паралельна прямій $y=5x-8$.

7.8*. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=e^{3x-2}$, якщо дотична паралельна прямій $y=3x+17$.

7.9. Знайдіть найбільше і найменше значення заданої функції на вказаному відрізку:

1) $f(x)=x+e^{-x}$, $[-1;2]$; 3) $f(x)=|x^2-x-2|+\ln x$, $[1;3]$.

2) $f(x)=\ln(2x)-6x^2+11x$, $\left[\frac{1}{2};2\right]$;

7.10. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x)=e^x-x$; 3) $f(x)=xe^{2x}$; 5) $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$;

2) $f(x)=\ln x-x$; 4) $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$; 6) $f(x)=\dfrac{x}{e^{2x}}$.

7.11. Дослідіть функцію та побудуйте її графік.

1) $f(x)=\ln\left(e^2-x^2\right)$; 3) $f(x)=xe^x$; 5) $f(x)=x-\ln x$;

2) $f(x)=2\ln x-x^2$; 4) $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$; 6) $f(x)=e^{-x^2}$.

Перевірте правильність побудови графіка за допомогою комп'ютерної програми.

7.12. Дано функцію:

1) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$; 2) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

а) Дослідіть функцію $f(x)$ і побудуйте її графік.

б) Знайдіть область значень функції $f(x)$.

в*) З'ясуйте кількість коренів рівняння $f(x)=a$ залежно від значення параметра a.

7.13*. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $ax^6=e^x$ має єдиний додатний корінь.

7.14*. Доведіть, що задане рівняння має єдиний корінь, і знайдіть цей корінь.

1) $e^x+2x-1=0$; 2) $\dfrac{1}{x}-\ln x=1$.

У завданнях 7.15–7.17 розв'яжіть рівняння.

7.15*. 1) $2^x+2^{-x}=2\cos\dfrac{x}{3}$; 3) $4^{\frac{1}{x}}-1=3^{2x-1}$.

2) $4^x+4^{1-x}=1+3\sin\pi x$;

7.16*. 1) $2^{x+1}-4x=0$; 3) $5^{x+2}-12x=25$.

2) $3^{x-1}-4x=-3$;

7.17*. 1) $3\cdot2^{x+2}+5^x=8\cdot3^x+5$; 3) $3\cdot2^{x+4}+6\cdot7^{x+1}=3\cdot5^{x+2}+15$;

2) $3\cdot2^x-3^{x+1}+4^x=1$; 4) $3^x+3^{2-x}=3(1+\cos2\pi x)$.

7.18*. Доведіть нерівність:

1) $e^{-x}>1-x$ при $x<0$; 4) $\ln(1+x)\geqslant\dfrac{x}{x+1}$ при $x>-1$;

2) $e^x>ex$ при $x>1$; 5) $2x\ln x\leqslant x^2-1$ при $x\geqslant1$.

3) $e^x\geqslant1+x+\dfrac{x^2}{2}$ при $x\geqslant0$;

7.19*. Порівняйте числа:

1) 1000^{1001} і 1001^{1000}; 3) $(\lg 5)^3$ і $3^{\lg 5}$.

2) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$ і $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$;

7.20. З'ясуйте кількість коренів рівняння $e^x = x + a$ залежно від значення параметра a.

7.21. Знайдіть усі значення a, при яких рівняння $\ln x = ax^2$ має єдиний корінь.

7.22. Знайдіть усі значення a, при яких функція $y = 2e^x + 3ax - 4$ є зростаючою на всій області визначення.

7.23. Знайдіть усі значення a, при яких функція $y = 5 - \ln x + 2ax$ є спадною на всій області визначення.

7.24*. Знайдіть усі значення a, при яких функція $y = 2e^x - ae^{-x} + (1 + 2a)x - 5$ є зростаючою на всій області визначення.

7.25*. Знайдіть усі значення a, при яких функція $y = 3 - 2e^x + (1 - a)e^{-x} - e^{2x} + (a - 1)x$ є спадною на всій області визначення.

7.26. Знайдіть усі значення a, при яких функція $f(x) = e^{2x} + 2(x - a - 2)e^x - ax^2 + 2ax - 7$ має точно два екстремуми.

7.27. Знайдіть усі значення a, при яких функція $f(x) = e^{2x} + (x - 3 - 4a)e^x - ax^2 + 4ax + 3$ має єдиний екстремум.

7.28*. Знайдіть усі значення a, при яких функція $f(x) = a8^x - (3a - 2)4^x + 3(3a - 2)2^x$ не має екстремумів.

7.29*. Знайдіть найбільше значення площі прямокутника зі сторонами, паралельними осям координат, і діагоналлю OP, де точка O — початок координат, а точка P належить графіку функції $y = 49xe^{2-7x} + \frac{9}{x}$, $0{,}2 \leqslant x \leqslant 1$.

7.30*. Знайдіть найбільше значення площі трикутника OPK, де точка O — початок координат, точка P належить графіку функції $y = \frac{5}{x} + 64x^5e^{6-4x}$, $0{,}7 \leqslant x \leqslant 2$, точка K належить осі Ox, причому абсциси точок P і K рівні.

Виявіть свою компетентність

7.31. В ідеальних умовах процес розмноження кроликів можна описати рядом Фібоначчі, а зростання їх кількості відбувається за законом $N = e^{0{,}5t}$ (t вимірюється у місяцях). Знайдіть швидкість приросту кроликів у момент $t = 10$ місяців.

§ 8 ПОКАЗНИКОВІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ Й НЕРІВНОСТІ

Деякі показникові та логарифмічні рівняння можна розв'язати, застосовуючи властивості відповідних функцій. Нагадаємо основні прийоми, які використовують під час розв'язування рівнянь за допомогою властивостей функцій, та наведемо приклади розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять показникові, логарифмічні та інші функції.

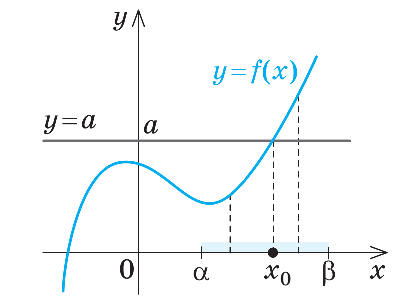
Таблиця 11

Орієнтир	Приклад
1. Скінченна ОДЗ	
Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається зі скінченного числа значень, то для розв'язування достатньо перевірити всі ці значення.	$$2^{\sqrt{x-1}}+3^x=4^{1-\sqrt{2-2x}}.$$ ▶ ОДЗ: $\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ 2-2x\geqslant 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x\geqslant 1, \\ x\leqslant 1. \end{cases}$ Отже, ОДЗ: $x=1$. *Перевірка*: $x=1$ — корінь ($2^{\sqrt{1-1}}+3^1=4^{1-\sqrt{2-2}}$; $4=4$). Інших коренів немає, оскільки до ОДЗ входить тільки одне число. *Відповідь*: 1. ◁
2. Оцінка лівої і правої частин рівняння	
$\boxed{f(x)=g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a. \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} f(x)\geqslant a \\ g(x)\leqslant a \end{matrix}}$ Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x)=g(x)$, і $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то рівність між лівою і правою частинами можлива тоді й тільки тоді, коли $f(x)$ і $g(x)$ одночасно дорівнюють a.	$$2^{x^2}=\cos\frac{x}{2}.$$ ▶ Оцінимо значення лівої і правої частин заданого рівняння: • якщо $f(x)=2^{x^2}$, то $f(x)\geqslant 1$ (оскільки $x^2\geqslant 0$); • якщо $g(x)=\cos\frac{x}{2}$, то $-1\leqslant g(x)\leqslant 1$. Отже, $f(x)\geqslant 1$, $g(x)\leqslant 1$. Тоді задане рівняння рівносильне системі рівнянь $$\begin{cases} 2^{x^2}=1, \\ \cos\frac{x}{2}=1. \end{cases}$$ Із першого рівняння одержуємо $x^2=0$, тобто $x=0$, що задовольняє друге рівняння. *Відповідь*: 0. ◁
3. Використання монотонності функцій	

Схема розв'язування рівняння

1. *Підбираємо один або кілька коренів рівняння.*
2. *Доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку значень лівої та правої частин рівняння).*

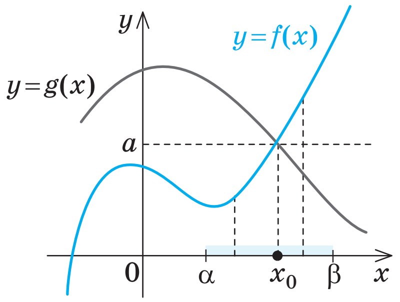
Теореми про корені рівняння



1. Якщо в рівнянні $f(x)=a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку.

Приклад

Рівняння $2^x+3^x=5$ має єдиний корінь $x=1$ ($2^1+3^1=5$, тобто $5=5$), оскільки функція $f(x)=2^x+3^x$ зростає на всій області визначення ($x\in \boldsymbol{R}$) як сума двох зростаючих функцій.



2. Якщо в рівнянні $f(x)=g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку.

Приклад

Рівняння $5^x=27-x$ має єдиний корінь $x=2$ ($5^2=27-2$, тобто $25=25$), оскільки функція $f(x)=5^x$ зростає, а функція $g(x)=27-x$ спадає (при всіх $x\in \boldsymbol{R}$).

4. «Шукайте квадратний тричлен»

Орієнтир

Спробуйте розглянути задане рівняння як квадратне відносно якоїсь змінної (чи відносно якоїсь функції).

Приклад

$$4^x-(7-x)\cdot 2^x+12-4x=0.$$

▶ Запишемо: $4^x=2^{2x}$ і виконаємо заміну $2^x=t$. Одержуємо:

$$t^2-(7-x)\cdot t+12-4x=0.$$

Розглянемо це рівняння як квадратне відносно t. Його дискримінант

$$D=(7-x)^2-4(12-4x)=x^2+2x+1=(x+1)^2.$$

Тоді $t_{1,2}=\dfrac{7-x\pm(x+1)}{2}$, тобто

$$t_1=4,\ t_2=3-x.$$

Виконавши обернену заміну, отримаємо: $2^x=4$ (звідси $x=2$) або $2^x=3-x$. Останнє рівняння має єдиний корінь $x=1$, оскільки функція $f(x)=2^x$ зростає, а функція $g(x)=3-x$ спадає (при всіх $x\in \boldsymbol{R}$).

Відповідь: 1; 2. ◁

5. Основні способи розв'язування рівняння $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$

Орієнтир*	Приклад
I. $f(x)>0$	
Якщо можливо, використовуємо основну логарифмічну тотожність у вигляді $a^{\log_a N} = N$ $(a>0,\ a\neq 1,\ N>0)$	**1.** $x^{\log_x(x+1)} = x^2-1$. ▶ $x^{\log_x(x+1)} = x^2-1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ x+1=x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ x_1=-1 \text{ або } x_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=2$. *Відповідь*: 2. ◁
Якщо можливо, логарифмуємо обидві частини рівняння за числовою основою або подаємо всі степені як степені з однією й тією самою числовою основою за формулою $U(x) = a^{\log_a U(x)}$ $(a>0,\ a\neq 1,\ U(x)>0)$	**2.** $x^{2\lg x+1} = 100x$. ▶ На ОДЗ $(x>0)$ обидві частини рівняння додатні, тому після логарифмування за основою 10 одержуємо рівняння, рівносильне заданому: $\lg\left(x^{2\lg x+1}\right) = \lg(100x)$. Звідси $(2\lg x+1)\lg x = \lg 100 + \lg x$. Виконаємо заміну: $\lg x = t$. Одержимо: $(2t+1)t = 2+t$; $t^2=1$; $t_1=1$, $t_2=-1$. Виконавши обернену заміну, отримаємо: $\lg x = 1$ або $\lg x = -1$, тобто $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$ (обидва корені входять до ОДЗ). *Відповідь*: 10; 0,1. ◁
II. $f(x)$ **— довільний вираз**	
Два степені з однаковими основами $(f(x))^{g(x)}$ і $(f(x))^{\varphi(x)}$ можуть дорівнювати один одному в одному з чотирьох випадків: 1) $f(x)=-1$, і для коренів цього рівняння $g(x)$ і $\varphi(x)$ — цілі числа однакової парності;	**3.** $x^{2x+4} = x^{20}$. ▶ Якщо вважати основу x числом, то *спочатку розглянемо три особливі випадки* (основа степеня дорівнює −1; 0; 1), *а потім прирівняємо показники степенів*: 1) якщо $x=-1$, то $(-1)^2 = (-1)^{20}$ — правильна рівність; 2) якщо $x=0$, то $0^4 = 0^{20}$ — правильна рівність; 3) якщо $x=1$, то $1^6 = 1^{20}$ — правильна рівність; 4) якщо $2x+4=20$, тобто $x=8$, то $8^{20}=8^{20}$ — правильна рівність. *Відповідь*: −1; 0; 1; 8.

* Рівняння виду $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ називають *показниково-степеневими рівняннями*.

2) $f(x)=0$, і для коренів цього рівняння $g(x)>0$ і $\varphi(x)>0$;
3) $f(x)=1$, і для коренів цього рівняння $g(x)$ і $\varphi(x)$ існують;
4) $g(x)=\varphi(x)$, і для коренів цього рівняння існують $(f(x))^{g(x)}$ і $(f(x))^{\varphi(x)}$.

Зауваження. Якщо вважати основу x змінною, то функція $h(x)=x^{2x+4}$ вважається визначеною лише при $x>0$. З цього погляду задане рівняння має тільки корені 1 і 8.

Відповідь: 1; 8. ◁

Отже, відповідь такого рівняння не можна записати однозначно.

Ознайомитись з розв'язуванням показниково-степеневих рівнянь та нерівностей ви можете, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$.

Розв'язання

▶ Якщо $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=t$, то $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=\frac{1}{t}$. Одержуємо $t+\frac{1}{t}=4$.

Отже, $t^2-4t+1=0$. Тоді

$$t_1=2-\sqrt{3},\ t_2=2+\sqrt{3}.$$

Виконавши обернену заміну, отримаємо:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3} \quad (\text{звідси } x=2)$$

або $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3}$ (звідси $x=-2$).

Відповідь: -2; 2. ◁

Коментар

Помічаємо, що

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1.$$

Отже, якщо $\sqrt{2-\sqrt{3}}=a$, то $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{a}$.

Тобто задане рівняння має вигляд $a^x+\frac{1}{a^x}=4$ і його можна розв'язати за допомогою заміни $a^x=t$. Але тепер змінну t можна безпосередньо використати для заданого рівняння, не вводячи проміжні позначення. Виконавши обернену заміну, враховуємо, що

$$2+\sqrt{3}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{-2}.$$

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $4^x+\frac{1}{4^x}+2^x-\frac{1}{2^x}=4$.

Коментар

Якщо звести всі степені до однієї основи 2 і позначити $2^x=t$, то одержимо рівняння (1) (див. **розв'язання**), у якому можна виконати заміну $t-\frac{1}{t}=u$ (тоді $u^2=t^2-2+\frac{1}{t^2}$, отже, $t^2+\frac{1}{t^2}=u^2+2$). На ОДЗ заданого рівняння $(x\in \boldsymbol{R})$ виконання усіх замін і обернених замін є рівносильними перетвореннями цього рівняння. Отже, розв'язавши рівняння, одержані в результаті замін, і виконавши обернені заміни, ми отримаємо корені заданого рівняння.

Розв'язання

▶ $2^{2x}+\frac{1}{2^{2x}}+2^x-\frac{1}{2^x}=4.$

Виконаємо заміну $2^x=t$, одержимо:

$$t^2+\frac{1}{t^2}+t-\frac{1}{t}=4. \quad (1)$$

Позначимо $t-\frac{1}{t}=u$, тоді $t^2+\frac{1}{t^2}=u^2+2$, отже, з рівняння (1) одержуємо рівняння $u^2+u-2=0$, яке має корені: $u_1=1$, $u_2=-2$. Виконавши обернену заміну, отримаємо:

$$t-\frac{1}{t}=1 \text{ або } t-\frac{1}{t}=-2.$$

Тоді $t^2-t-1=0$ або $t^2+2t-1=0$.

Одержуємо: $t_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $t_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ або $t_3=-1+\sqrt{2}$, $t_4=-1-\sqrt{2}$.

Тоді $2^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (звідси $x=\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}$), або $2^x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (коренів немає, оскільки $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$), або $2^x=-1+\sqrt{2}$ (звідси $x=\log_2\left(\sqrt{2}-1\right)$), або $2^x=-1-\sqrt{2}$ (коренів немає, оскільки $-1-\sqrt{2}<0$).

Відповідь: $\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\log_2\left(\sqrt{2}-1\right)$. ◁

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $4^x+\frac{1}{4^x}=2\cos 2x$.

I спосіб

Коментар

Ураховуючи, що $4^x>0$, одержуємо, що в лівій частині рівняння стоїть *сума двох взаємно обернених додатних чисел, яка завжди більша або дорівнює* 2. (Дійсно, якщо $a>0$, то $a+\frac{1}{2}-2=\frac{a^2-2a+1}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}\geqslant 0$, отже, при всіх $a>0$ маємо: $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$.)

Для оцінки значень правої частини достатньо згадати, що областю значень функції $y=\cos 2x$ є проміжок $[-1;1]$, отже, $-2\leqslant 2\cos 2x\leqslant 2$.

Розв'язання

▶ Оцінимо значення лівої і правої частин рівняння. Якщо $f(x)=4^x+\frac{1}{4^x}$, то $f(x)\geqslant 2$ як сума двох взаємно обернених додатних чисел. Якщо $g(x)=2\cos 2x$, то $-2\leqslant g(x)\leqslant 2$. Отже, $f(x)\geqslant 2$, $g(x)\leqslant 2$, тоді задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}4^x+\frac{1}{4^x}=2,\\ 2\cos 2x=2.\end{cases}$

З першого рівняння, використовуючи заміну $4^x=t$, одержуємо $t+\frac{1}{t}=2$, тобто $t^2-2t+1=0$. Звідси $t=1$.

Тоді $4^x=1$, отже, $x=0$, що задовольняє й друге рівняння.

Відповідь: 0. ◁

II спосіб

Коментар

Якщо позначити $4^x=t$, то задане рівняння зводиться до рівняння (2) (див. **розв'язання**), яке можна розглядати як квадратне відносно змінної t.

Зауважимо, що $t=4^x\neq 0$, отже, при таких значеннях t рівняння (1) і (2) є рівносильними. Далі використовуємо умову існування коренів квадратного рівняння.

Розв'язання

▶ Виконавши заміну $4^x = t$ $(t > 0)$, із заданого рівняння одержуємо рівносильне рівняння

$$t + \frac{1}{t} = 2\cos 2x, \qquad (1)$$

яке, у свою чергу, рівносильне рівнянню

$$t^2 - (2\cos 2x)t + 1 = 0. \qquad (2)$$

Розглянемо рівняння (2) як квадратне відносно змінної t. Тоді його дискримінант $D = 4\cos^2 2x - 4$.
Рівняння (2) може мати корені тільки тоді, коли $D \geqslant 0$, тобто коли $4\cos^2 2x - 4 \geqslant 0$, тоді

$$\cos^2 2x \geqslant 1. \qquad (3)$$

У цій нерівності знак «більше» не може виконуватися ($\cos^2 2x \leqslant 1$ завжди), отже, нерівність (3) рівносильна рівнянню $\cos^2 2x = 1$. Тоді $\cos 2x = 1$ або $\cos 2x = -1$. Підставляючи ці значення в рівняння (2), одержуємо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ t^2 - 2t + 1 = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \cos 2x = -1, \\ t^2 + 2t + 1 = 0. \end{cases}$$

З другої системи маємо $t = -1$, що не задовольняє умову $t > 0$. Отже, задане рівняння рівносильне тільки першій системі рівнянь. З другого рівняння першої системи маємо $t = 1$, тоді $4^x = 1$, тобто $x = 0$, що задовольняє й перше рівняння цієї системи.

Відповідь: 0. ◁

Які, на вашу думку, переваги кожного з наведених способів розв'язування прикладу 3?

Приклад 4

Розв'яжіть рівняння $2^{|x|} - \left|2^{x+1} - 2\right| = 2^{x+1}$.

Коментар

Для розв'язування рівняння, що містить кілька модулів, можемо використати загальну схему, розглянуту в § 8 підручника для 10 класу (див. також табл. 24 у розділі 4 цього підручника):

1) знайти ОДЗ;
2) знайти нулі всіх підмодульних функцій;
3) позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки;
4) знайти розв'язки рівняння в кожному з проміжків.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$.
Нулі підмодульних функцій: $x = 0$ і $2^{x+1} - 2 = 0$; $2^{x+1} = 2$; $x + 1 = 1$; $x = 0$.
Цей нуль $(x = 0)$ розбиває ОДЗ на два проміжки, у кожному з яких кожна підмодульна функція має сталий знак (рис. 8.1).

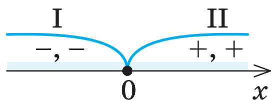


Рис. 8.1

Проміжок I. Якщо $x \in (-\infty; 0]$, маємо рівняння $2^{-x} + 2^{x+1} - 2 = 2^{x+1}$. Тоді $2^{-x} = 2$, отже, $x = -1$, $-1 \in (-\infty; 0]$.

Проміжок II. Якщо $x \in [0; +\infty)$, маємо рівняння $2^x - (2^{x+1} - 2) = 2^{x+1}$. Тоді $2^x = \frac{2}{3}$, звідси $x = \log_2 \frac{2}{3}$. Але $\log_2 \frac{2}{3} < 0$, отже, у *проміжку II* задане рівняння коренів не має.

Відповідь: −1. ◁

Приклад 5

Розв'яжіть рівняння $\lg^2(x+1)=\lg(x+1)\lg(x-1)+2\lg^2(x-1)$.

Розв'язання	Коментар
▶ ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0, \\ x-1>0. \end{cases}$ Тобто $x>1$. Оскільки $x=2$ не є коренем заданого рівняння, то, якщо розділити обидві частини рівняння на $\lg^2(x-1)\neq 0$, одержимо рівносильне рівняння (на ОДЗ): $$\frac{\lg^2(x+1)}{\lg^2(x-1)}=\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}+2.$$ Виконавши заміну $t=\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}$, отримаємо рівняння $t^2-t-2=0$, корені якого: $$t_1=-1,\ t_2=2.$$ Виконавши обернену заміну, одержуємо: $$\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=-1 \text{ або } \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=2.$$ Тоді на ОДЗ маємо рівносильні рівняння: $\lg(x+1)=-\lg(x-1)$ або $\lg(x+1)=2\lg(x-1)$; $\lg(x+1)=\lg(x-1)^{-1}$ або $\lg(x+1)=\lg(x-1)^2$; $x+1=\frac{1}{x-1}$ або $x+1=(x-1)^2$; $x^2-1=1$ або $x+1=x^2-2x+1$; $x^2=2$ або $x^2-3x=0$; $x=\pm\sqrt{2}$, або $x=0$, або $x=3$. Ураховуючи ОДЗ, одержуємо: $$x=\sqrt{2} \text{ або } x=3.$$ *Відповідь*: $\sqrt{2}$; 3. ◁	Якщо виконати заміну $\lg(x+1)=u$, $\lg(x-1)=v$, то одержимо *рівняння* $u^2=uv+2v^2$, *усі члени якого мають однаковий сумарний степінь* — 2. Нагадаємо, що таке рівняння *називають однорідним і розв'язують діленням обох частин на найвищий степінь однієї зі змінних*. Розділимо, наприклад, обидві частини на v^2 (тобто на $\lg^2(x-1)$). *Щоб не загубити корені рівняння під час ділення на вираз зі змінною, потрібно ті значення змінної, для яких цей вираз дорівнює нулю, розглянути окремо*. Значення x, при якому $\lg(x-1)=0$ (тоді $x-1=1$), тобто $x=2$, підставляємо в задане рівняння. Для реалізації одержаного плану розв'язування не обов'язково вводити змінні u і v, достатньо помітити, що задане рівняння однорідне, розділити обидві частини на $\lg^2(x-1)$, а вже потім увести нову змінну t. У кінці враховуємо, що всі перетворення були рівносильними на ОДЗ, отже, необхідно вибрати тільки ті зі знайдених розв'язків, які входять до ОДЗ.

Приклад 6

Розв'яжіть рівняння $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)=0$.

Коментар

Логарифмічні функції, які містяться у лівій частині заданого рівняння, набувають тільки невід'ємних значень.
Справді, на всій області визначення $1+\sqrt{x-2}\geqslant 1$, отже, $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)\geqslant 0$. Аналогічно, оскільки $1-\left|x^2-4\right|\leqslant 1$, то на своїй області визначення $\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)\geqslant 0$.
У цьому випадку сума двох невід'ємних функцій може дорівнювати нулю тоді й тільки тоді, коли кожна з цих функцій дорівнює нулю.
Зауважимо, що в процесі виконання переходу від заданого рівняння до системи рівнянь ОДЗ не змінюється, отже, її можна не записувати в явному вигляді. Під час розв'язування одержаних найпростіших логарифмічних рівнянь ОДЗ теж ураховується автоматично, тому її можна взагалі не записувати до розв'язання.

Розв'язання

▶ Оскільки на всій області визначення $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)\geqslant 0$ і $\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)\geqslant 0$, то задане рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases}\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)=0,\\ \log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)=0.\end{cases}$$

З першого рівняння системи одержуємо $1+\sqrt{x-2}=2^0$. Тоді $\sqrt{x-2}=0$, тобто $x=2$, що задовольняє й друге рівняння системи.

Відповідь: 2 ◁

Приклад 7

При яких значеннях параметра a нерівність

$$\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x+a-5}{5}\right)>0$$

виконується для будь-яких значень x?

Коментар

Спочатку скористаємося формулою

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, де

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}:$$

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

Потім запишемо праву частину нерівності як значення логарифмічної функції і, переходячи до аргументів, урахуємо, що у випадку, коли основа цієї функції більша за 1, функція зростає, а коли менша від 1 (але більша за 0) — спадає. Також урахуємо ОДЗ заданої нерівності.

Аналізуючи далі одержані нерівності, ураховуємо, що нерівність $\sin t>b$ виконується для будь-яких значень t тоді й тільки тоді, коли $b<-1$, а нерівність $\sin t<c$ — коли $c>1$.

Розв'язання

▶ Задана нерівність рівносильна нерівності

$$\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}\right)>\log_{\frac{2a-15}{5}}1.$$

Ця нерівність рівносильна сукупності систем нерівностей:

$$\begin{cases}\dfrac{2a-15}{5}>1,\\ \dfrac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}>1\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}0<\dfrac{2a-15}{5}<1,\\ 0<\dfrac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}<1.\end{cases}$$

Тоді $\begin{cases}a>10,\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>5-\frac{a}{2}\end{cases}$

або $\begin{cases}7{,}5<a<10,\\ \frac{5-a}{2}<\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<5-\frac{a}{2}.\end{cases}$

Нерівності зі змінною x в останній сукупності систем виконуватимуться для будь-яких значень x за умов:

$$\begin{cases}a>10,\\ 5-\frac{a}{2}<-1\end{cases}\quad\text{або}\quad\begin{cases}7{,}5<a<10,\\ \frac{5-a}{2}<-1,\\ 5-\frac{a}{2}>1.\end{cases}$$

Тобто $\begin{cases}a>10,\\ a>12\end{cases}$ або $\begin{cases}7{,}5<a<10,\\ a>7,\\ a<8.\end{cases}$

Тоді $a>12$ або $7{,}5<a<8$.

Відповідь: $a\in(7{,}5;8)\cup(12;\infty)$. ◁

Приклад 8 При яких значеннях параметра a рівняння $\log_2(4^x - a) = x$ має єдиний корінь?

Коментар

Виконуючи рівносильні перетворення заданого рівняння, як завжди, ураховуємо, що в процесі використання означення логарифма для розв'язування цього найпростішого логарифмічного рівняння його ОДЗ ураховується автоматично.

Виконуючи заміну змінної в завданні з параметром, ураховуємо, що при цьому вимога задачі може змінитися.

Досліджуючи розміщення коренів квадратного тричлена $f(t) = t^2 - t - a$ відносно заданих чисел, застосовуємо умови, наведені в інтернет-підтримці до п. 9.3 підручника для 10 класу (для запису відповідних умов використаємо позначення: D — дискримінант, t_0 — абсциса вершини параболи). Як відомо, для того щоб корені квадратного тричлена $f(t)$ (з додатним коефіцієнтом при t^2) були розміщені по різні боки від числа A, необхідно й достатньо виконання умови $f(A) < 0$.

Розв'язання

▶ Задане рівняння рівносильне рівнянню

$$4^x - a = 2^x. \qquad (1)$$

Тобто $2^{2x} - a = 2^x$. Виконаємо заміну $2^x = t$ $(t > 0)$, одержимо:

$$t^2 - t - a = 0. \qquad (2)$$

Вимога задачі буде виконуватися тоді й тільки тоді, коли рівняння (2) матиме єдиний додатний корінь. Це можливо в одному з двох випадків:

1) рівняння (2) має єдиний корінь, і він додатний;
2) рівняння (2) має два корені, з яких тільки один додатний, а другий — від'ємний або нуль.

Для першого випадку одержуємо $\begin{cases} D = 0, \\ t_0 > 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} 1 + 4a = 0, \\ t_0 = \frac{1}{2} > 0. \end{cases}$ Отже, $a = -\frac{1}{4}$.

Для другого випадку значення $t = 0$ дослідимо окремо.

Якщо $t = 0$, з рівняння (2) одержуємо $a = 0$. Якщо $a = 0$, рівняння (2) має корені $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Отже, умова задачі при $a = 0$ виконується.

Залишається ще один випадок — корені рівняння (2) мають різні знаки (розміщені по різні боки від нуля). Це буде тоді й тільки тоді, коли виконуватиметься умова $f(0) < 0$ (де $f(t) = t^2 - t - a$), тобто $-a < 0$, отже, $a > 0$.

Об'єднуючи всі одержані результати, записуємо відповідь.

Відповідь: якщо $a = -\frac{1}{4}$ або $a \geqslant 0$, задане рівняння має єдиний корінь. ◁

Приклад 9 Розв'яжіть рівняння $|x - 3|^{3x^2 - 10x + 3} = 1$.

Розв'язання	Коментар
▶ Зазначимо, що $x = 3$ не є коренем заданого рівняння (0^0 не існує). При $x \neq 3$ обидві частини рівняння додатні. Після логарифмування (за основою 10) обох частин заданого рівняння одержуємо рівносильні йому рівняння:	Оскільки $\lvert x - 3\rvert \geqslant 0$, то з особливих випадків можна розглянути тільки один — основа дорівнює 0 ($\lvert x - 3\rvert = 0$, тобто $x = 3$). Щоб не розглядати випадок, коли основа дорівнює 1, достатньо при $x \neq 3$ прологарифмувати обидві частини

$\lg|x-3|^{3x^2-10x+3}=\lg 1;$

$(3x^2-10x+3)\lg|x-3|=0;$

$3x^2-10x+3=0$ або $\lg|x-3|=0.$

З першого одержаного рівняння маємо $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=3$ (не є коренем), а з другого $|x-3|=1$, тоді $x-3=1$ або $x-3=-1$. Тобто $x=4$ або $x=2$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$; 2; 4. ◁

рівняння за числовою основою (наприклад, за основою 10).
Якщо $x\neq 3$, обидві частини заданого рівняння додатні, тому після логарифмування одержуємо рівняння, рівносильне заданому. Оскільки всі подальші перетворення є рівносильними (за умови $x\neq 3$), то всі одержані розв'язки (які не дорівнюють 3) є коренями заданого рівняння.

Приклад 10 Розв'яжіть рівняння $5^{\log_2 x}+x^{\log_2 5}=10.$

Коментар

Прологарифмувати обидві частини заданого рівняння не можна (у лівій частині стоїть сума), тому спробуємо всі степені подати як степені з однією й тією самою числовою основою. Ураховуючи, що в заданому рівнянні є логарифм за основою 2, подамо всі задані степені як степені з основою 2 за формулою $u=a^{\log_a u}$, де $u>0$, $a>0$, $a\neq 1$. Тоді

$$5^{\log_2 x}=2^{\log_2\left(5^{\log_2 x}\right)}=2^{\log_2 x\log_2 5}; \qquad (1)$$

$$x^{\log_2 5}=2^{\log_2\left(x^{\log_2 5}\right)}=2^{\log_2 5\log_2 x}$$

(тобто доданки, які стоять у лівій частині заданого рівняння, однакові). Після одержання рівняння (2) (див. **розв'язання**) можна використати рівність (1) справа наліво. Можна також записати праву частину рівняння (2) як степінь числа 2 або прологарифмувати обидві його частини за основою 2.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $x>0$. На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням

$2^{\log_2 x\log_2 5}+2^{\log_2 5\log_2 x}=10;$

$2\cdot 2^{\log_2 x\log_2 5}=10;$

$$2^{\log_2 x\log_2 5}=5; \qquad (2)$$

$5^{\log_2 x}=5;$ $\log_2 x=1;$ $x=2$ (входить до ОДЗ).

Відповідь: 2. ◁

Приклад 11 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x^{\log_3 y}+y^{\log_3 x}=18,\\ \log_3 x+\log_3 y=3.\end{cases}$

Коментар

Використаємо рівносильні перетворення системи рівнянь. Для цього врахуємо ОДЗ і простежимо за тим, щоб на цій ОДЗ всі перетворення рівнянь як у прямому, так і у зворотному напрямках зберігали правильність рівностей.
У першому рівнянні заданої системи запишемо всі степені як степені з основою 3 (див. коментар до прикладу 10). Після рівносильних (на ОДЗ) перетворень першого рівняння одержуємо систему (1) (див. **розв'язання**), до якої змінні входять тільки у вигляді $\log_3 x$ і $\log_3 y$, тому зручно використати заміну змінних. Виконавши обернену заміну, застосовуємо означення логарифма.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ y>0. \end{cases}$ На цій ОДЗ перше рівняння заданої системи рівносильне рівнянням

$$3^{\log_3\left(x^{\log_3 y}\right)}+3^{\log_3\left(y^{\log_3 x}\right)}=18;$$

$$3^{\log_3 y\,\log_3 x}+3^{\log_3 x\,\log_3 y}=18;$$

$$2\cdot 3^{\log_3 x\,\log_3 y}=18;$$

$$3^{\log_3 x\,\log_3 y}=9;$$

$$3^{\log_3 x\,\log_3 y}=3^2;$$

$$\log_3 x\log_3 y=2.$$

Тоді задана система рівнянь рівносильна системі

$$\begin{cases} \log_3 x\log_3 y=2, \\ \log_3 x+\log_3 y=3. \end{cases} \qquad (1)$$

Виконаємо заміну $\log_3 x=u$, $\log_3 y=v$.

Одержимо систему рівнянь $\begin{cases} uv=2, \\ u+v=3. \end{cases}$

З другого рівняння останньої системи $v=3-u$, тоді з першого рівняння $u(3-u)=2$, тобто $u^2-3u+2=0$. Звідси $u_1=1$, $u_2=2$. Тоді $v_1=2$, $v_2=1$.

Виконавши обернену заміну, отримаємо

$\begin{cases} \log_3 x=1, \\ \log_3 y=2 \end{cases}$ або $\begin{cases} \log_3 x=2, \\ \log_3 y=1. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x=3, \\ y=9 \end{cases}$ або $\begin{cases} x=9, \\ y=3 \end{cases}$ (знайдені розв'язки входять до ОДЗ).

Відповідь: $(3;9)$, $(9;3)$. ◁

Запитання

1. Поясніть на прикладах, як можна використати властивості функцій до розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь.

Вправи

У завданнях 8.1–8.6 розв'яжіть рівняння.

8.1. 1) $2^{2x}=5-x$;

2) $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1$;

3) $3^x+4^x=5^x$;

4) $2^x+2^{-x}=2\cos\frac{x}{3}$;

5) $\log_3(x+5)=\log_{\frac{1}{2}} x+4$;

6) $\log_2\left(3^x+4\right)=2-5^x$;

7) $\log_2|x|=5-x^2$;

8) $\log_2\left(1+x^2\right)=\log_2 x+2x-x^2$;

9) $\log_5 x=\sqrt{1-x^2}$.

8.2. 1) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$;

2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x=6$;

3) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2^x$.

8.3. 1) $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$;

2) $x^2+(x-3)\log_2 x=4x-3$;

3) $2\lg^3(2x-1)=\lg^2(2x+1)-\lg(2x-1)\lg(2x+1)$.

8.4. 1) $2^{|x+2|}-\left|2^{x+1}-1\right|=2^{x+1}+1$;

2) $\left|2+\log_{\frac{1}{5}} x\right|+3=\left|1+\log_5 x\right|$.

8.5. 1) $25^x-(a-1)\cdot 5^x+2a+3=0$;

2) $\sqrt{4^x-6\cdot 2^x+1}=2^x-a$.

8.6*. 1) $x^{\lg x}=x^3$;

2) $x^{2\lg x}-10x=0$;

3) $x^{2\log_{16}x}=\dfrac{16}{\sqrt{x}}$;

4) $x^{\log_x\left(x^2-3\right)}=2x$;

5) $\left|x-1\right|^{x^2-1}=1$;

6) $x^{x+2}=x^6$:

а) якщо $x>0$; б) якщо $x\in\boldsymbol{R}$;

7) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_3\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\log_3\left(x^2-1\right)}=\sqrt{2(x-1)}$;

8) $4^{\log_4^2 x}+x^{\log_4 x}=8$;

9) $2x^{2\lg(x-1)}=1+(x-1)^{\lg x}$.

У завданнях 8.7, 8.8 розв'яжіть систему рівнянь.

8.7. 1) $\begin{cases}x+2^x=y+2^y,\\ x^2+3y=10;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_2 x-\log_2 y=y-x,\\ x^3+y^3=54.\end{cases}$

8.8*. 1) $\begin{cases}x^{\log_5 y}+y^{\log_5 x}=50,\\ \log_{25}x+\log_{25}y=1{,}5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^{\log_2 y}+y^{\log_2 x}=16,\\ \log_2 x-\log_2 y=2.\end{cases}$

8.9. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $4^x+a\cdot 2^{x+1}-a=0$ не має коренів.

8.10. Знайдіть усі значення параметра a, при яких нерівність $a\cdot 9^x+4(a-1)\cdot 3^x+a>1$ виконується при всіх x.

8.11. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $3^x+3^{-x}=2\cos x+a+4$ має єдиний корінь.

8.12. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $\log_3\left(9^x+a\right)=x$ має єдиний корінь.

8.13. Для кожного значення параметра a визначте число коренів рівняння $\left|\lg x\right|=-(x-1)^2+a$.

8.14. Скільки розв'язків має рівняння $\left(\log_2(x+1)-3\right)\sqrt{x-a}=0$ залежно від значення параметра a?

8.15. Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases}\lg(4+y)=\lg x,\\ a-y=\dfrac{1}{2}(x+a)^2\end{cases}$ має розв'язки.

У завданнях 8.16, 8.17 розв'яжіть рівняння.

8.16. 1) $2^{5x-1}\cdot 3^{4x+1}\cdot 7^{3x+3}=504^{x-2}$;

2) $2^{9x+9}\cdot 3^{7x+3}\cdot 5^{6x}=750^{x+3}$;

3) $2^{13-x}\cdot 3^{11-2x}\cdot 5^{9-3x}=360^{x+2}$;

4) $32^{x+3}\cdot 3^{3x+1}\cdot 625^{x+2}=600^{x+7}$.

8.17. 1) $3\log_6\left(3-\dfrac{3}{2x+3}\right)=4\log_6\left(2+\dfrac{1}{x+1}\right)+3$;

2) $\sqrt{33+\dfrac{8}{\log_x 4}}=3\log_4\left(4\sqrt[3]{x^2}\right)$;

3) $\sqrt{7-\dfrac{1}{\log_x 4}}=2\log_4\left(0{,}5\sqrt{x}\right)$.

8.18. При яких значеннях a вираз $(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ більший за вираз $0{,}2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)}$ при всіх допустимих значеннях x?

8.19. При яких значеннях a сума $\log_a(\sin x+2)$ і $\log_a(\sin x+3)$ дорівнюватиме одиниці хоча б при одному значенні x?

8.20. При яких значеннях a сума $\log_a(\cos^2 x+1)$ і $\log_a(\cos^2 x+5)$ дорівнюватиме одиниці хоча б при одному значенні x?

8.21. При яких значеннях a вираз $(\sin x)^{\lg(\sin x)-a^2}$ більший за вираз $10^{\log_{100}(1-\cos^2 x)+\log_7 a}$ при всіх допустимих значеннях x?

8.22. При яких значеннях a вираз $(1-2^x)^{\log_2(1-2^x)-2^a}$ більший за вираз $0{,}5^{3-\sqrt{a}-\log_4(1+4^x-2^{x+1})}$ при всіх допустимих значеннях x?

8.23. Знайдіть усі значення a, при яких область визначення функції $y=\lg\left(a^{x+2}\cdot x^{3\log_x a}+a^4\cdot x^5-(\sqrt{x})^{10+2x\log_x a}-(\sqrt{a})^{18}\right)$ містить тільки одне ціле число.

8.24. З області визначення функції $y=\log_3\left(a^a-a^{\frac{5x+2}{x+2}}\right)$ взяли всі цілі додатні числа і знайшли їх суму. Визначте усі додатні значення a, при яких така сума буде більшою за 9, але меншою від 13.

Теми навчальних проектів

1. Показникова функція в науці, природі й техніці.
2. Логарифмічна функція в науці й природі.
3. Застосування показникової і логарифмічної функцій в економіці.
4. Прогнозування будівництва нових об'єктів соціального призначення з урахуванням зростання населення міста.

Для виконання проекту створюється кілька груп, кожна має знайти певну інформацію.

Результати роботи над проектом кожна група оформлює у вигляді комп'ютерної презентації, захист проектів доцільно провести у формі дебатів.

З етапами роботи над проектом можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 1

1. Знайдіть область значень функції $y=-5^x+2$.

А $(-\infty;+\infty)$ **Б** $(-\infty;-2)$ **В** $(-\infty;2)$ **Г** $(-2;+\infty)$ **Д** $(2;+\infty)$

2. Розв'яжіть рівняння $2^{1-3x}=\frac{1}{32}$ і вкажіть проміжок, до якого входять всі його корені.

А $(-\infty;-5)$ **Б** $[-5;-2)$ **В** $[-2;0)$ **Г** $[0;2)$ **Д** $[2;+\infty)$

3. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5}(x-3)\geqslant -1$.

А $(-\infty;3)$ **Б** $(3;5]$ **В** $(3;5)$ **Г** $[3;5)$ **Д** $[5;+\infty)$

4. Установіть відповідність між виразами (1–3) та значеннями (А–Г) цих виразів.

1 $\ln\log_2\log_5 25$
2 $\lg 25+\lg 4$
3 $5^{2\log_5 3}$

А 9
Б 2
В 1
Г 0

5. Установіть відповідність між функціями (1–3) та похідними (А–Г) цих функцій.

1 $2x+\ln x$
2 $x^2\ln x$
3 $\ln(x^2)$

А $2x\ln x+x$
Б $2+\frac{1}{x}$
В $2x\ln x$
Г $\frac{2}{x}$

6. Розв'яжіть рівняння $\log_5(x-1)-\log_5(x+2)=1-\log_5(2x-4)$. Якщо воно має декілька коренів, знайдіть їх добуток.

А 0,5 **Б** 3 **В** –3 **Г** –0,5 **Д** 6

7. Розв'яжіть рівняння $25^x-6\cdot 10^x+8\cdot 4^x=0$. Якщо воно має декілька коренів, знайдіть їх суму.

А $\log_{\frac{5}{2}} 2$ **Б** $\log_{\frac{5}{2}} 4$ **В** $\log_{\frac{5}{2}} 8$ **Г** 4 **Д** 6

8. Розв'яжіть нерівність $\lg^2(10x)-3\lg x-1\geqslant 0$.

9. Дослідіть функцію $y=\ln x-x$ та побудуйте її графік.

Пройдіть онлайн-тестування на сайті *interactive.ranok.com.ua*

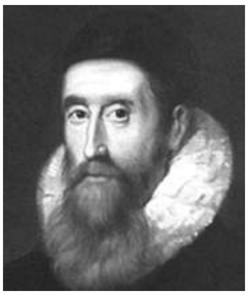
ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Н. Орем
(бл. 1323–1382)

Поняття показникової функції було введено на основі степеневої функції з раціональним показником, яка має давню історію. Зокрема дробовими показниками степеня й найпростішими правилами дій над степенями з дробовими показниками оперував у XIV ст. французький математик **Н. Орем** (бл. 1323–1382). Відомо, що **Н. Шюке** (бл. 1445 — бл. 1500) розглядав степені з від'ємними і нульовим показниками. **С. Стевін** запропонував розуміти під $a^{\frac{1}{n}}$ корінь $\sqrt[n]{a}$. Але систематично дробові й від'ємні показники став застосовувати **І. Ньютон**.

М. Штіфель
(1487–1567)

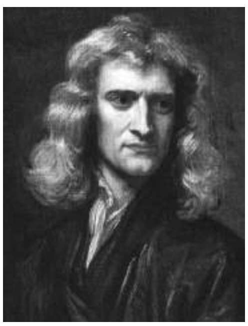
Німецький математик **М. Штіфель** (1487–1567) запропонував позначення $a^0=1$, якщо $a\neq 0$, і ввів назву *показник* (це переклад із німецької *exponent*). Німецьке *potenzieren* означає *піднести до степеня*. (Звідси походить і слово «потенціювати», яке було застосоване для позначення переходів від логарифмів (log) виразів $f(x)$ і $g(x)$ до відповідних степенів, тобто від рівності $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ до рівності $a^{\log_a f(x)}=a^{\log_a g(x)}$.) У свою чергу, термін *exponenten* виник унаслідок не зовсім точного перекладу з грецької слова, яким **Діофант Александрійський** (бл. III ст.) позначав квадрат невідомої величини.



Дж. Непер
(1550–1617)

Термін *логарифм* походить від сполучення грецьких слів «логос» (у значенні «відношення») і «аритмос» (число) і перекладається як *відношення чисел*. Вибір винахідником логарифмів **Дж. Непером** (1550–1617) такої назви у 1594 р. пояснюється тим, що логарифми виникли внаслідок зіставлення двох чисел, одне з яких є членом арифметичної прогресії, а друге — геометричної. Логарифми з основою *e* увів **Дж. Спейдел** (1600–1634), який склав перші таблиці для функції $y=\ln x$. Назву *натуральний* (природний) для цього логарифма запропонував **Н. Меркатор** (1620–1687), який виявив, що $\ln x$ — це площа фігури під *гіперболою* $\frac{1}{x}$.

Близьке до сучасного розуміння логарифмування як операції, оберненої до піднесення до степеня, уперше з'явилося в роботах **Дж. Волліса** (1616–1703) і **Й. Бернуллі** (1667–1748), а остаточно було уточнено у XVIII ст. **Л. Ейлером** (1707–1783). У книзі «Вступ до аналізу нескінченних» у 1748 р. Ейлер сформулював сучасне означення як показникової, так і логарифмічної функцій і навів їх розкладання у степеневі ряди, зазначив особливу роль натурального логарифма.



І. Ньютон
(1642–1727)

Дж. Волліс
(1616–1703)

Й. Бернуллі
(1667–1748)

LOGARITHMOTECHNIA:
SIVE
Methodus construendi
LOGARITHMOS
Nova, accurata, & facilis;
Antehàc Communicata, Anno Sc. 1667.
Nonis Augusti: Cui nunc accedit.
Vera Quadratura Hyperbolæ,
&
Inventio summæ Logarithmorum.
Auctore NICOLAO MERCATORE
Holsato, è Societate Regia.
HUIC ETIAM JUNGITUR
MICHAELIS ANGELI RICCII Exercitatio
Geometrica de Maximis & Minimis;
LONDINI,
Anno M.DC.LXVIII.

Титульний аркуш
видання 1667 р.
Н. Меркатора

Розділ 2

ІНТЕГРАЛ
ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ознайомитеся з поняттями первісної, невизначеного і визначеного інтегралів, криволінійної трапеції;
- навчитеся знаходити первісні та інтеграли і застосовувати інтеграли до визначення площ криволінійних трапецій та об'ємів тіл обертання

§ 9 ПЕРВІСНА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Таблиця 12

1. Первісна

Означення

Функція $F(x)$ називається *первісною для функції* $f(x)$ на даному проміжку, якщо для будь-якого x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Приклад

Для функції $f(x) = x^3$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ первісною є функція $F(x) = \frac{x^4}{4}$, оскільки

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3.$$

2. Основна властивість первісної

Властивість

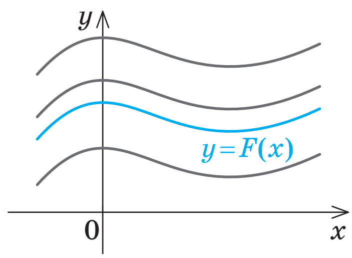
Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, а C — довільна стала, то функція $F(x)+C$ також є первісною для функції $f(x)$, при цьому будь-яку первісну для функції $f(x)$ на даному проміжку можна записати у вигляді $F(x)+C$, де C — довільна стала.

Приклад

Оскільки функція $F(x) = \frac{x^4}{4}$ є первісною для функції $f(x) = x^3$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ (див. вище), то *загальний вигляд усіх первісних для функції* $f(x) = x^3$ можна записати так: $\frac{x^4}{4} + C$, де C — довільна стала.

Геометричний зміст

Графіки будь-яких первісних для заданої функції одержують один з одного паралельним перенесенням уздовж осі Oy.



3. Невизначений інтеграл

Означення

Сукупність усіх первісних для даної функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом*.
Невизначений інтеграл позначають символом $\int f(x)dx$, тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $F(x)$ — одна з первісних для функції $f(x)$, а C — довільна стала.

Приклад

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C,$$

оскільки для функції $f(x) = x^3$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ усі первісні можна записати так: $\frac{x^4}{4} + C$ (див. п. 2 табл. 12).

4. Правила знаходження первісних (правила інтегрування)

1. Якщо F — первісна для f, а G — первісна для g, то $F+G$ — первісна для функції $f+g$.

Первісна для суми дорівнює сумі первісних для доданків.

1. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів від доданків.

2. Якщо F — первісна для f, а c — стала, то cF — первісна для функції cf.

2. $\int c \cdot f(x)dx = c\int f(x)dx$, де c — стала.

Сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

3. Якщо F — первісна для f, а k і b — сталі (причому $k\neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$.	3. $\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$.

5. Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x)+C$, де C — довільна стала	Запис за допомогою невизначеного інтеграла
0	C	$\int 0\cdot dx=C$
1	$x+C$	$\int dx=x+C$
x^α $(\alpha\neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ $(\alpha\neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	$\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$	$\int\sin x dx=-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$	$\int\cos x dx=\sin x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$	$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$	$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$
e^x	e^x+C	$\int e^x dx=e^x+C$
a^x $(a>0,\ a\neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття первісної. Основна властивість первісної

У 10 класі ми знаходили за заданою функцією її похідну й застосовували цю операцію — *диференціювання* — до розв'язування різноманітних задач. Однією з таких задач було знаходження швидкості й прискорення прямолінійного руху за відомою залежністю від часу координати $x(t)$ матеріальної точки:

$$v(t)=x'(t),\ a(t)=v'(t)=x''(t).$$

Наприклад, якщо в початковий момент часу $t=0$ швидкість тіла дорівнює нулю, тобто $v(0)=0$, то в процесі вільного падіння тіло за проміжок часу t (тобто на момент часу t) пройде шлях $s(t)=\frac{gt^2}{2}$.

Швидкість і прискорення знаходять за допомогою диференціювання:

$$v(t)=s'(t)=\left(\frac{gt^2}{2}\right)'=\frac{g}{2}\cdot 2t=gt,$$

$$a(t)=v'(t)=(gt)'=g.$$

Але важливо вміти не тільки знаходити похідну заданої функції, а й розв'язувати обернену задачу: знаходити функцію $f(x)$ за її заданою похідною $f'(x)$. Наприклад, у механіці часто доводиться визначати координату $x(t)$, знаючи залежність від часу швидкості $v(t)$, а також знаходити швидкість $v(t)$, знаючи залежність від часу прискорення $a(t)$. Знаходження функції $f(x)$ за її заданою похідною $f'(x)$ називають операцією *інтегрування*.

Отже, *операція інтегрування є оберненою до операції диференціювання*. Операція інтегрування дозволяє за заданою похідною $f'(x)$ знайти (відновити) функцію $f(x)$.

Інтеграл — від. латин. *integratio* — відновлення.

Наведемо означення понять, пов'язаних з операцією інтегрування.

Означення. **Функція $F(x)$ називається *первісною для функції* $f(x)$ на даному проміжку, якщо для будь-якого *x* із цього проміжку $F'(x)=f(x)$.**

Наприклад, для функції $f(x)=3x^2$ на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ первісною є функція $F(x)=x^3$, оскільки $F'(x)=(x^3)'=3x^2$.

Зазначимо, що функція x^3+5 має таку саму похідну $(x^3+5)'=3x^2$. Отже, функція x^3+5 також є первісною для функції $3x^2$ на множині $\boldsymbol{R}$. Зрозуміло, що замість числа 5 можна підставити будь-яке інше число. Тому задача знаходження первісної має безліч розв'язків. Знайти всі ці розв'язки дозволяє **основна властивість первісної.**

Властивість. ***Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, а C — довільна стала, то функція $F(x)+C$ також є первісною для функції $f(x)$. При цьому будь-яка первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку може бути записана у вигляді $F(x)+C$, де C — довільна стала.***

Вираз $F(x)+C$ називають *загальним виглядом первісних* для функції $f(x)$.

1) За умовою функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку I. Отже, $F'(x)=f(x)$ для будь-якого x із цього проміжку I. Тоді

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x),$$

тобто $F(x)+C$ теж є первісною для функції $f(x)$.

2) Нехай функція $F_1(x)$ — інша первісна для функції $f(x)$ на тому самому проміжку I, тобто $F_1'(x)=f(x)$ для всіх $x\in I$. Тоді

$$(F_1(x)-F(x))'=F_1'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

За умовою сталості функції (п. 34.1 підручника для 10 класу), *якщо похідна функції $F_1(x)-F(x)$ дорівнює нулю на проміжку I, то ця функція набуває деякого сталого значення C на цьому проміжку*. Отже, для всіх $x\in I$ функція $F_1(x)-F(x)=C$. Звідси $F_1(x)=F(x)+C$. Маємо: будь-яка первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку може бути записана у вигляді $F(x)+C$, де C — довільна стала. ○

Наприклад, оскільки для функції $f(x)=2x$ на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ однією з первісних є функція $F(x)=x^2$ (справді, $F'(x)=(x^2)'=2x$), то загальний вигляд усіх первісних функції для функції $f(x)=2x$ можна записати так: x^2+C, де C — довільна стала.

Зауваження. Зазвичай при знаходженні первісної для функції $f(x)$ проміжок, на якому задано функцію $f(x)$, не вказують. При цьому мають на увазі проміжки найбільшої довжини.

Геометричний зміст основної властивості первісної: *графіки будь-яких первісних для даної функції $f(x)$ одержують один з одного паралельним перенесенням уздовж* *осі Oy* (рис. 9.1). Справді, графік довільної первісної $F(x)+C$ можна одержати з графіка первісної $F(x)$ паралельним перенесенням уздовж осі Oy на C одиниць.

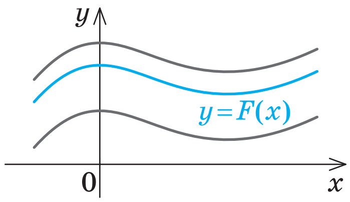


Рис. 9.1

2 Невизначений інтеграл

Нехай функція $f(x)$ має на деякому проміжку первісну $F(x)$. Тоді за основною властивістю первісної сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ на заданому проміжку задається формулою $F(x)+C$, де C — довільна стала.

Означення. **Сукупність усіх первісних даної функції *f*(*x*) називається *невизначеним інтегралом*.**

Невизначений інтеграл позначають символом $\int f(x)dx$*, тоді*

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

де $F(x)$ *— одна з первісних для функції* $f(x)$*, а* C *— довільна стала.*

У наведеній рівності знак $\int$ називають *знаком інтеграла*, функцію $f(x)$ — *підінтегральною функцією*, вираз $f(x)dx$ — *підінтегральним виразом*, змінну x — *змінною інтегрування* і доданок C — *сталою інтегрування*.

Наприклад, як зазначалося вище, загальний вигляд первісних для функції $f(x)=2x$ записують так: x^2+C, отже, $\int 2xdx = x^2+C$.

Символ dx, який входить до запису невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$, називається *диференціалом*.

Докладніше ознайомитися з поняттям диференціала функції ви можете, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

3 Правила знаходження первісних (правила інтегрування)

Ці правила подібні до відповідних правил диференціювання.

Правило 1. *Якщо F — первісна для f, а G — первісна для g, то $F+G$ — первісна для $f+g$. Первісна для суми дорівнює сумі первісних для доданків.*

● Справді, якщо F — первісна для f (у цьому короткому формулюванні мається на увазі, що функція $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$), то $F'=f$. Аналогічно, якщо G — первісна для g то $G'=g$. Тоді за правилом обчислення похідної суми маємо:

$$(F+G)' = F'+G' = f+g,$$

а це й означає, що $F+G$ — первісна для $f+g$. ○

За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

тобто *інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів від доданків*.

Правило 1 можна поширити на будь-яку кількість доданків (оскільки похідна від будь-якої кількості доданків дорівнює сумі похідних доданків).

Правило 2. *Якщо F — первісна для f, c — стала, то cF — первісна для функції cf.*

● Справді, якщо F — первісна для f, то $F'=f$. Ураховуючи, що сталий множник можна виносити за знак похідної, маємо $(cF)' = cF' = cf$, а це й означає, що cF — первісна для cf. ○

За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:

$$\int c\cdot f(x)dx = c\int f(x)dx, \text{ де } c \text{ — стала,}$$

тобто *сталий множник можна виносити за знак інтеграла*.

Правило 3. *Якщо F — первісна для f, а k і b — сталі (причому $k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$.*

Справді, якщо F — первісна для f, то $F'=f$. Ураховуючи правило обчислення похідної складеної функції, маємо:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)'=\frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k=f(kx+b),$$

а це й означає, що $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$. ○

За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:

$$\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

4 Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

Для обчислення первісних (чи невизначених інтегралів), крім правил знаходження первісних, корисно пам'ятати табличні значення первісних для деяких функцій. Їх наведено в п. 5 табл. 12. Щоб обґрунтувати правильність цього пункту таблиці, достатньо перевірити, що похідна від указаної первісної (без сталого доданка C) дорівнює заданій функції. Це буде означати, що розглянута функція дійсно є первісною для заданої функції. Оскільки в записі всіх первісних у другій колонці присутній сталий доданок C, то за основною властивістю первісних можна зробити висновок, що це загальний вигляд усіх первісних заданої функції.

Наведемо обґрунтування формул, за якими знаходять первісні для функцій x^α і $\frac{1}{x}$.

Для інших функцій пропонуємо провести аналогічну перевірку самостійно.

Для всіх x із області визначення функції x^α при $\alpha\neq-1$ похідна $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'=$ $=\frac{1}{\alpha+1}\cdot(\alpha+1)x^\alpha=x^\alpha$. Отже, функція $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ при $\alpha\neq-1$ є первісною для функції x^α. Тоді за основною властивістю первісних **загальний вигляд усіх первісних для функції x^α при $\alpha\neq-1$ буде таким:**

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C.$$

За допомогою невизначеного інтеграла це твердження записують так:

$$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1).\ ○$$

Область визначення функції $f(x)=\frac{1}{x}$ така: $x\neq0$. Розглянемо функцію $F(x)=$ $=\ln|x|$ окремо при $x>0$ і при $x<0$.

Якщо $x>0$, то $F(x)=\ln x$. Тоді $F'(x)=$ $=(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

Якщо $x<0$, то $F(x)=\ln(-x)$. Тоді $F'(x)=$ $=(\ln(-x))'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$.

Отже, на кожному з проміжків $(-\infty;0)$ та $(0;+\infty)$ функція $F(x)=\ln|x|$ є первісною для функції $f(x)=\frac{1}{x}$. Тоді **загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)=\frac{1}{x}$ буде таким:**

$$\ln|x|+C.$$

За допомогою невизначеного інтеграла це твердження записують так:

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.\ ○$$

Уявіть, що вам треба визначити залежність від часу координати тіла $x(t)$, знаючи залежність від часу швидкості тіла $v(t)$. Ви знайшли $x(t)$ у вигляді $x(t)=f(t)+C$. Який фізичний зміст сталої C у цьому випадку?

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Перевірте, чи є функція $F(x)=2\sqrt{x}$ первісною для функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на проміжку $(0;+\infty)$.

Розв'язання	Коментар
▶ $F'(x)=\left(2\sqrt{x}\right)'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, це й означає, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. ◁	За означенням функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, якщо $F'(x)=f(x)$.

Приклад 2

Знайдіть:
1) одну з первісних для функції $f(x)=x^4$ на $\boldsymbol{R}$;
2) усі первісні для функції $f(x)=x^4$;
3) $\int x^4dx$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ Однією з первісних для функції $f(x)=x^4$ на множині $\boldsymbol{R}$ є функція $F(x)=\frac{x^5}{5}$, оскільки $F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}\right)'=\frac{1}{5}\cdot 5x^4=x^4$. ◁	1) Первісну для функції $f(x)=x^4$ спробуємо знайти підбором. В процесі можна міркувати так: щоб після знаходження похідної одержати x^4, потрібно брати похідну від x^5, але $\left(x^5\right)'=5x^4$. Щоб похідна дорівнювала x^4, достатньо поставити перед функцією x^5 коефіцієнт $\frac{1}{5}$. Простіше використати формулу з п. 5 табл. 12: *однією з первісних для функції* x^α *є функція* $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
2) ▶ За основною властивістю первісних усі первісні для функції $f(x)=x^4$ можна записати у вигляді $\frac{x^5}{5}+C$, де C — довільна стала. ◁	2) *Якщо ми знаємо одну первісну* $F(x)$ *для функції* $f(x)$, *то* за основною властивістю первісних *будь-яку первісну для функції* $f(x)$ *можна записати у вигляді* $F(x)+C$, де C — довільна стала.
3) ▶ $\int x^4dx=\frac{x^5}{5}+C$, де C — довільна стала. ◁	3) За означенням $\int f(x)dx=F(x)+C$, тобто невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ — це спеціальне позначення загального виду всіх первісних для даної функції $f(x)$ (який ми вже знайшли в п. 2 розв'язання).

Приклад 3

Для функції $f(x)=\sqrt{x}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M(9;10)$.

Розв'язання	Коментар
▶ $D(f)=[0;+\infty)$. Тоді $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$. Загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)$ такий:	Спочатку запишемо загальний вигляд первісних для заданої функції: $F(x)+C$. Потім використаємо те, що графік одержаної функції

$$\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$$

За умовою графік первісної проходить через точку $M(9;10)$, отже, при $x=9$ одержуємо

$$\frac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9}+C=10.$$

Звідси $C=-8$. Тоді шукана первісна:

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8.\ ◁$$

проходить через точку $M(9;10)$, отже, при $x=9$ значення функції $F(x)+C$ дорівнює 10. Щоб знайти первісну для функції $f(x)=\sqrt{x}$, ураховуємо, що її область визначення $x\geqslant 0$. Тоді цю функцію можна записати так: $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ і використати формулу знаходження первісної для функції x^{α}, а саме:

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C.$$

Приклад 4* Знайдіть загальний вигляд первісних для функції

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 2x}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}-2\cos 3x.$$

Розв'язання	Коментар
▶ Запишемо одну з первісних для кожного з доданків. Для функції $\frac{1}{\sin^2 2x}$ первісною є функція $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2x$. Другий доданок запишемо так: $\frac{1}{\sqrt{2-x}}=(2-x)^{-\frac{1}{2}}$. Тоді первісною цієї функції буде функція: $\frac{1}{-1}\cdot\frac{(2-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=-2(2-x)^{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2-x}$. Первісною для функції $2\cos 3x$ є функція $2\cdot\frac{1}{3}\sin 3x=\frac{2}{3}\sin 3x$. Тоді загальний вигляд первісних для заданої функції: $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2x-2\sqrt{2-x}-\frac{2}{3}\sin 3x+C$. ◁	Використаємо правила знаходження первісних. Оскільки задана функція є алгебраїчною сумою трьох доданків, то її первісна дорівнює алгебраїчній сумі первісних для доданків (правило 1). Потім ураховуємо, що всі функції-доданки є складеними функціями від аргументів виду $kx+b$. Отже, за правилом 3 ми повинні перед кожною функцією-первісною (від аргумента $kx+b$), яку ми отримаємо за таблицею первісних, поставити множник $\frac{1}{k}$. Для кожного з доданків зручно спочатку записати одну з первісних (без сталого доданка C), а потім — загальний вигляд первісних для заданої функції (додати до одержаної функції сталий доданок C). Для третього доданка постійний множник 2 можна поставити перед відповідною первісною (правило 2). Ураховуємо (див. табл. 12), що первісною для першого доданка виду $\frac{1}{\sin^2 t}$ є функція $-\operatorname{ctg}t$. Для другого доданка, записаного у вигляді x^{α}, визначаємо первісну за формулою $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Щоб знайти первісну для третього доданка, ураховуємо, що первісною для функції $\cos x$ є функція $\sin x$ (звичайно, перетворення другого доданка виконуються на області визначення цієї функції, тобто при $2-x>0$).

Запитання

1. Поясніть, у якому випадку функцію $F(x)$ називають первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку. Наведіть приклади.
2. Сформулюйте основну властивість первісних і проілюструйте її на прикладах.
3. Сформулюйте означення невизначеного інтеграла. Наведіть приклади його обчислення.
4. Сформулюйте правила знаходження первісних. Поясніть їх на прикладах.

5*. Доведіть правила знаходження первісних.

6. Запишіть і сформулюйте правила знаходження первісних за допомогою невизначених інтегралів.

7*. Запишіть і доведіть загальний вигляд первісних для функцій: x^{α} $(\alpha \neq -1)$, $\frac{1}{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{1}{\sin^2 x}$, e^x, a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$. Запишіть відповідні формули за допомогою невизначеного інтеграла.

Вправи

У завданнях 9.1, 9.2 доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на зазначеному проміжку.

9.1°. 1) $F(x) = x^5$, $f(x) = 5x^4$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

2) $F(x) = x^{-3}$, $f(x) = -3x^{-4}$, $x \in (0; +\infty)$;

3) $F(x) = \frac{1}{7}x^7$, $f(x) = x^6$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

4) $F(x) = -\frac{1}{6}x^{-6}$, $f(x) = x^{-7}$, $x \in (0; +\infty)$.

9.2. 1) $F(x) = \sin^2 x$, $f(x) = \sin 2x$, $x \in \boldsymbol{R}$;

2) $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$, $f(x) = -\sin 2x$, $x \in \boldsymbol{R}$;

3) $F(x) = \sin 3x$, $f(x) = 3\cos 3x$, $x \in \boldsymbol{R}$;

4) $F(x) = 3 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $f(x) = \dfrac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$, $x \in (-\pi; \pi)$.

9.3. Перевірте, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції $f(x)$, якщо:

1) $F(x) = \sin x - x\cos x$, $f(x) = x\sin x$;

2) $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$;

3) $F(x) = \cos x + x\sin x$, $f(x) = x\cos x$;

4) $F(x) = x - \frac{1}{x}$, $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{x^2}$.

У завданнях 9.4, 9.5 визначте, чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на зазначеному проміжку.

9.4°. 1) $F(x)=3-\sin x$, $f(x)=\cos x$, $x\in(-\infty;+\infty)$;

2) $F(x)=5-x^4$, $f(x)=-4x^3$, $x\in(-\infty;+\infty)$;

3) $F(x)=\cos x-4$, $f(x)=-\sin x$, $x\in(-\infty;+\infty)$;

4) $F(x)=x^{-2}+2$, $f(x)=\frac{1}{2x^3}$, $x\in(0;+\infty)$.

9.5. 1) $F(x)=2x+\cos\frac{x}{2}$, $f(x)=2-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$, $x\in\boldsymbol{R}$;

2) $F(x)=\sqrt{4-x^2}$, $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $x\in(-2;2)$;

3) $F(x)=\frac{1}{x^2}$, $f(x)=14-\frac{1}{x^2}$, $x\in(0;+\infty)$;

4) $F(x)=4x\sqrt{x}$, $f(x)=6\sqrt{x}$, $x\in(0;+\infty)$.

У завданнях 9.6–9.8 знайдіть загальний вигляд первісних для функції $f(x)$.

9.6°. 1) $f(x)=2-x^4$;

2) $f(x)=x+\cos x$;

3) $f(x)=4x$;

4) $f(x)=-8$;

5) $f(x)=x^6$;

6) $f(x)=\frac{1}{x^3}-2$;

7) $f(x)=1-\frac{1}{x^4}$;

8) $f(x)=x^3$.

9.7*. 1) $f(x)=2-x^3+\frac{1}{x^3}$;

2) $f(x)=x-\frac{2}{x^5}+\cos x$;

3) $f(x)=\frac{1}{x^2}-\sin x$;

4) $f(x)=5x^2-1$;

5) $f(x)=(2x-8)^5$;

6) $f(x)=3\sin 2x$;

7) $f(x)=(4-5x)^7$;

8) $f(x)=-\frac{1}{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

9) $f(x)=\frac{3}{(4-15x)^4}$;

10) $f(x)=\frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$;

11) $f(x)=\frac{4}{(3x-1)^2}$;

12) $f(x)=-\frac{2}{x^5}+\frac{1}{\cos^2(3x-1)}$.

9.8*. 1) $f(x)=1-\cos 3x+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

2) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 4x}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}-3x^2$;

3) $f(x)=\frac{2}{\cos^2(3x+1)}-3\sin(4-x)+2x$;

4) $f(x)=\frac{1}{(3-2x)^3}+\frac{3}{\sqrt{5x-2}}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

9.9. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну $F(x)$, що набуває заданого значення в зазначеній точці:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $F\left(\frac{1}{2}\right)=-12$;
2) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$;
3) $f(x)=x^3$, $F(-1)=2$;
4) $f(x)=\sin x$, $F(-\pi)=-1$.

У завданнях 9.10–9.12 для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку M.

9.10. 1) $f(x)=2x+1$, $M(0;0)$;
2) $f(x)=3x^2-2x$, $M(1;4)$;
3) $f(x)=x+2$, $M(1;3)$;
4) $f(x)=-x^2+3x$, $M(2;-1)$.

9.11°. 1) $f(x)=2\cos x$, $M\left(-\frac{\pi}{2};1\right)$;
2) $f(x)=1-x^2$, $M(-3;9)$;
3) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{2\pi}{3};-1\right)$;
4) $f(x)=\frac{1}{x^4}$, $M\left(\frac{1}{2};3\right)$.

9.12. 1) $f(x)=4x+\frac{1}{x^2}$, $M(-1;4)$;
2) $f(x)=x^3+2$, $M(2;15)$;
3) $f(x)=1-2x$, $M(3;2)$;
4) $f(x)=\frac{1}{x^2}-10x^4+3$, $M(1;5)$.

9.13. Для функції $f(x)=e^{2x}-\cos x$ знайдіть первісну, графік якої проходить через початок координат.

9.14. Для функції $f(x)=\sin x-e^{3x}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через початок координат.

У завданнях 9.15, 9.16 для функції $y=f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через задану точку.

9.15. 1) $f(x)=\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+4\cos 4x$, $A(\pi;3)$;

2) $f(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-5\sin 5x$, $B(\pi;0)$;

3) $f(x)=5x^4+3x^2-4$, $B(-1;12)$;

4) $f(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}-2x$, $N(9;-8)$.

9.16. 1) $f(x)=3x^2-4x+5$, $A(2;6)$;

2) $f(x)=3x^2-6x+4$, $A(1;4)$;

3) $f(x)=\frac{12}{\sqrt{3x-2}}$, $A(9;30)$.

9.17. Для функції $f(x)=8x^3-2x$ знайдіть первісну $F(x)$, один із нулів якої дорівнює 2. Визначте решту нулів функції $F(x)$.

9.18. Для функції $f(x)=3x^2-4x-3$ знайдіть первісну $F(x)$, один із нулів якої дорівнює 3. Визначте решту нулів функції $F(x)$.

9.19*. Для функції $f(x)=x^2-2x$ знайдіть таку первісну, щоб пряма $y=3x+2$ була дотичною до її графіка.

9.20*. Для функції $f(x)=4x-x^2$ знайдіть таку первісну, щоб пряма $y=-5x+1$ була дотичною до її графіка.

9.21*. Задайте формулою функцію $F(x)$, визначену при всіх дійсних значеннях аргумента, якщо графік цієї функції проходить через точку $M(1;7)$, а кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $F(x)$ в точці з абсцисою x, дорівнює $3x^2-4x^3$.

9.22*. Задайте формулою функцію $F(x)$, визначену при всіх дійсних значеннях аргумента, якщо графік цієї функції проходить через точку $K(-2;5)$, а кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $F(x)$ в точці з абсцисою x, дорівнює $4x-5x^4$.

Виявіть свою компетентність

9.23. Швидкість матеріальної точки, що рухається прямолінійно, задана формулою $v(t)=t^2+2t-1$. Запишіть формулу залежності її координати x від часу t, якщо відомо, що в початковий момент часу ($t=0$ с) точка перебувала в початку координат (v вимірюється в м/с).

9.24. Швидкість матеріальної точки, що рухається прямолінійно, задана формулою $v(t)=2\cos\frac{t}{2}$. Запишіть формулу залежності координати точки від часу, якщо відомо, що в момент $t=\frac{\pi}{3}$ с точка перебувала на відстані 4 м від початку координат (v вимірюється в м/с).

9.25*. Матеріальна точка рухається прямолінійно з прискоренням $a(t)=12t^2+4$. Знайдіть закон руху точки, якщо в момент часу $t=1$ с її швидкість дорівнювала 10 м/с, а координата 12 м (a вимірюється у м/с^2).

9.26*. Матеріальна точка масою m рухається по осі Ox під дією сили $F(t)$, напрямленої вздовж цієї осі. Запишіть формулу залежності $x(t)$, якщо відомо, що при $t=t_0$ швидкість точки дорівнює v_0, а координата — x_0 ($F(t)$ вимірюють у ньютонах, t — у секундах, v — у метрах за секунду, m — у кілограмах):

1) $F(t)=6-9t$, $t_0=1$, $v_0=4$, $x_0=-5$, $m=3$;

2) $F(t)=14\sin t$, $t_0=\pi$, $v_0=2$, $x_0=3$, $m=7$;

3) $F(t)=25\cos t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$, $v_0=2$, $x_0=4$, $m=5$;

4) $F(t)=8t+8$, $t_0=2$, $v_0=9$, $x_0=7$, $m=4$.

§10 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

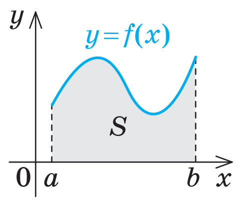
10.1. Геометричний зміст і означення визначеного інтеграла

Таблиця 13

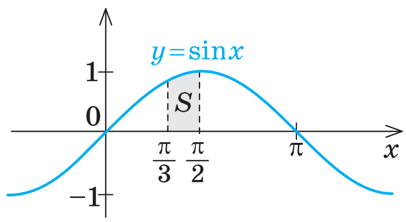
1. Обчислення визначеного інтеграла (формула Ньютона — Лейбніца)

Формула	Приклад
Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$ і $F(x)$ — її довільна первісна на цьому відрізку $\left(F'(x)=f(x)\right)$, то $$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$	Оскільки для функції $f(x)=x^2$ однією з первісних є функція $F(x)=\frac{x^3}{3}$, то $$\int_1^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}.$$

2. Криволінійна трапеція

Означення	Ілюстрація
Нехай на відрізку $[a;b]$ осі Ox задано неперервну функцію $f(x)$, яка набуває на ньому тільки невід'ємних значень. **Фігура, обмежена графіком функції $y=f(x)$, відрізком $[a;b]$ осі Ox і прямими $x=a$ і $x=b$, називається *криволінійною трапецією*.**	

3. Площа криволінійної трапеції

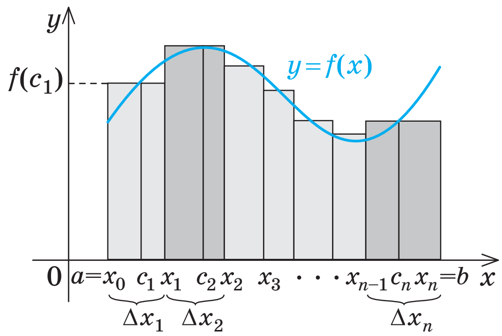
Формула	Приклад
$$S=\int_a^b f(x)dx$$	Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y=\sin x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$. Зобразивши ці лінії, отримаємо криволінійну трапецію.  $$S=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

4. Властивості визначених інтегралів

$\int_a^a f(x)dx=0$	$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$	$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$
$\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$		Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$ і $c\in[a;b]$, то $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

5. Означення визначеного інтеграла через інтегральні суми

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Виконаємо такі операції.



1. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n відрізків точками x_1, x_2, ..., x_{n-1} (вважаємо, що $a=x_0$, $b=x_n$).
2. Позначимо довжину першого відрізка через Δx_1, другого — через Δx_2 і т. д. (тобто $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, ..., $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$).
3. На кожному з одержаних відрізків виберемо довільну точку c_i ($c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, де $i = 1, 2, ..., n$).
4. Складемо **суму** $S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n$.

Ця сума **називається *інтегральною сумою функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$. Якщо $n \to \infty$ і довжини відрізків розбиття прямують до нуля, то інтегральна сума S_n прямує до деякого числа, яке називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.**

Визначений інтеграл позначають $\int_a^b f(x)dx$.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Геометричний зміст і означення визначеного інтеграла

Як було зазначено в § 9, *інтегрування — це дія, обернена до диференціювання*. Вона дозволяє за заданою похідною функції знайти (відновити) цю функцію. Покажемо, що ця операція тісно пов'язана із задачею обчислення площі фігури.

Як було зазначено вище, у механіці часто доводиться визначати координату $x(t)$ матеріальної точки, що рухається прямолінійно, знаючи залежність її швидкості від часу $v(t)$ (нагадаємо, що $v(t) = x'(t)$).

Розглянемо спочатку випадок, коли точка рухається з постійною швидкістю $v = v_0$. Графіком швидкості в системі координат $(t; v)$ є пряма $v = v_0$, паралельна осі часу t (рис. 10.1.1). Якщо вважати, що в початковий момент часу $t = 0$ точка перебувала в початку координат, то шлях s, пройдений нею за час t, обчислюють за формулою $s = v_0 t$. Величина $v_0 t$ дорівнює площі S прямокутника, обмеженого графіком швидкості, віссю абсцис і двома вертикальними прямими, тобто шлях точки можна обчислити як площу фігури, розташованої під графіком швидкості.

Розглянемо випадок нерівномірного руху. Тепер швидкість можна вважати постійною тільки на маленькому відрізку часу Δt. Якщо швидкість v змінюється за законом $v = v(t)$, то шлях, пройдений за відрізок часу $[t; t+\Delta t]$, наближено виражається добутком $v(t)\cdot\Delta t$. На графіку цей добуток дорівнює площі прямокутника зі сторонами Δt і $v(t)$ (рис. 10.1.2). Точне значення шляху, пройденого за відрізок часу $[t; t+\Delta t]$, дорівнює площі *криволінійної трапеції*, виокремленої на цьому

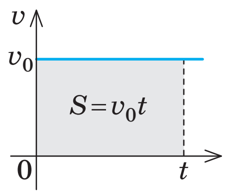


Рис. 10.1.1

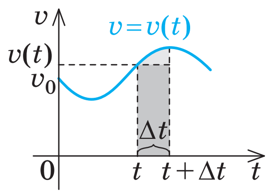


Рис. 10.1.2

рисунку. Тоді весь шлях, пройдений матеріальною точкою за відрізок часу $[0; t]$, можна обчислити додаванням площ таких криволінійних трапецій, тобто шлях дорівнюватиме площі зафарбованої фігури під графіком швидкості (рис. 10.1.3).

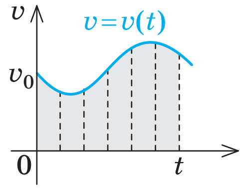


Рис. 10.1.3

Наведемо відповідні означення й обґрунтування, які дозволять зробити ці міркування більш строгими.

Нехай на відрізку $[a; b]$ осі Ox задано неперервну функцію $f(x)$, яка набуває на цьому відрізку тільки невід'ємних значень.

Означення. **Фігура, обмежена графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a; b]$ осі Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, називається *криволінійною трапецією* (рис. 10.1.4).**

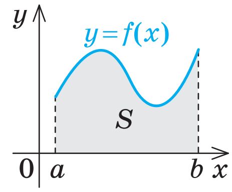


Рис. 10.1.4

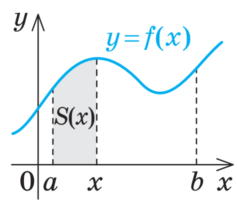
Відрізок $[a; b]$ називають *основою криволінійної трапеції*.

З'ясуємо, як можна обчислити площу криволінійної трапеції за допомогою первісної для функції $f(x)$.

Позначимо через $S(x)$ площу криволінійної трапеції з основою $[a; x]$ (рис. 10.1.5, *а*), де x — будь-яка точка відрізка $[a; b]$. При $x = a$ відрізок $[a; x]$ вироджується в точку, і тому $S(a) = 0$; при $x = b$ маємо $S(b) = S$, де S — площа криволінійної трапеції з основою $[a; b]$ (див. рис. 10.1.4).

Покажемо, що *функція $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$*, тобто що $S'(x) = f(x)$.

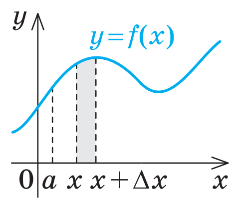
Відповідно до означення похідної потрібно довести, що $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$.



а

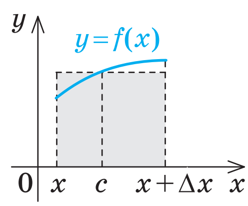
Для спрощення міркувань розглянемо випадок $\Delta x > 0$ (випадок $\Delta x < 0$ розглядається аналогічно).

Оскільки $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$, то з точки зору геометрії ΔS — площа фігури, виокремленої на рис. 10.1.5, *б*.



б

Розглянемо тепер прямокутник із такою самою площею ΔS, однією зі сторін якого є відрізок $[x; x + \Delta x]$ (рис. 10.1.5, *в*). Оскільки функція $f(x)$ неперервна, то верхня сторона цього прямокутника перетинає графік функції в деякій точці з абсцисою $c \in [x; x + \Delta x]$ (інакше розглянутий прямокутник або містить криволінійну трапецію, виокремлену на рис. 10.1.5, *в*, або міститься в ній, і, відповідно, його площа буде більшою або меншою від площі ΔS). Висота прямокутника дорівнює $f(c)$. За формулою площі прямокутника маємо: $\Delta S = f(c)\Delta x$. Тоді $\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = f(c)$. (Ця формула буде правильною і при $\Delta x < 0$.)



в

Рис. 10.1.5

Оскільки точка c лежить між точками x і $x + \Delta x$, то c прямує до x, якщо $\Delta x \to 0$. Ураховуючи неперервність функції $f(x)$, одержуємо також, що $f(c) \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$.

Отже, $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$. Це означає, що $S'(x) = f(x)$, тобто $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$. ○

Оскільки функція $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то за основною властивістю первісних будь-яка інша первісна $F(x)$ для функції $f(x)$ для всіх $x \in [a;b]$ відрізняється від $S(x)$ на постійну C, тобто

$$F(x)=S(x)+C. \qquad (1)$$

Щоб знайти C, підставимо $x=a$. Одержуємо $F(a)=S(a)+C$. Оскільки $S(a)=0$, то $C=F(a)$ і рівність (1) можна записати так:

$$S(x)=F(x)-F(a). \qquad (2)$$

Ураховуючи, що площа криволінійної трапеції дорівнює $S(b)$, підставляємо у формулу (2) $x=b$ і одержуємо $S=S(b)=$ $=F(b)-F(a)$. Тобто **площу криволінійної трапеції** (рис. 10.1.4) **можна обчислити за формулою**

$$S=F(b)-F(a), \qquad (3)$$

де $F(x)$ — довільна первісна для функції $f(x)$.

Отже, обчислення площі криволінійної трапеції зводиться до знаходження первісної $F(x)$ для функції $f(x)$, тобто до інтегрування функції $f(x)$.

Означення. **Різниця $F(b)-F(a)$ називається *визначеним інтегралом функції* $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.**

Визначений інтеграл позначають так:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Запис $\int_a^b f(x)dx$ читають: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс». Числа a і b називають *межами інтегрування*: a — нижньою межею, b — верхньою. Отже, за наведеним означенням

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \qquad (4)$$

Формулу (4) називають **формулою Ньютона — Лейбніца.**

В записі обчислення визначеного інтеграла різницю $F(b)-F(a)$ прийнято позначати так: $F(x)\Big|_a^b$, тобто $F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

Користуючись цим позначенням, формулу Ньютона — Лейбніца можна записати у такому вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Наприклад, оскільки для функції $f(x)=e^x$ однією з первісних є $F(x)=e^x$, то

$$\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e^1-e^0=e-1.$$

У тому випадку, коли для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, функцію $f(x)$ називають *інтегрованою на відрізку* $[a;b]$.

Із формул (3) і (4) випливає, що *площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної і невід'ємної на відрізку $[a;b]$ функції $y=f(x)$, відрізком $[a;b]$ осі Ox і прямими $x=a$ і $x=b$* (рис. 10.1.4), *можна обчислювати за формулою*

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Це співвідношення відображає **геометричний зміст визначеного інтеграла.**

Наприклад, площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=\cos x$, відрізком $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ осі Ox і прямими $x=0$ і $x=\frac{\pi}{6}$ (рис. 10.1.6), можна обчислити за формулою

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}.$$

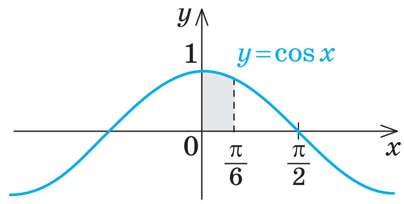


Рис. 10.1.6

(У процесі обчислення визначеного інтеграла враховано, що для функції $f(x)=\cos x$ однією з первісних є функція $F(x)=\sin x$.)

Зауваження. У задачах із курсу алгебри і початків аналізу на обчислення площ як відповідь найчастіше наводять числове значення площі. Оскільки на координатній площині, де зображено фігуру, завжди вказують одиницю виміру по осях, то ми маємо й одиницю виміру площі — квадрат зі стороною 1.

Інколи, щоб підкреслити, що одержане число виражає саме площу, відповідь до останнього прикладу записують так: $S=\frac{1}{2}$ (кв. од.), тобто вказують кількість квадратних одиниць. Зазначимо, що у такий спосіб записують тільки числові відповіді. Якщо в результаті обчислень площі ми одержали, наприклад, $S=2a^2$, то ніяких одиниць площі не записують, оскільки відрізок a був виміряний у якихось лінійних одиницях, і тоді вираз a^2 містить інформацію про квадратні одиниці, у яких вимірюють площу в цьому випадку.

2 Властивості визначених інтегралів

Формулюючи означення визначеного інтеграла, ми вважали, що $a<b$. Доцільно розширити поняття визначеного інтеграла.

Для випадку $a>b$ приймемо за означенням, що

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx. \qquad (5)$$

Для випадку $a=b$ також за означенням вважатимемо, що

$$\int_a^a f(x)dx=0. \qquad (6)$$

Формальне застосування формули Ньютона — Лейбніца до обчислення інтегралів у формулах (5) і (6) дає такий самий результат. Справді, якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то

$$\int_a^a f(x)dx=F(x)\Big|_a^a=F(a)-F(a)=0.$$

Також

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=-(F(a)-F(b))=-\int_b^a f(x)dx.$$

За допомогою формули Ньютона — Лейбніца легко обґрунтувати й інші властивості визначених інтегралів, наведені в п. 4 табл. 13.

- Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то для функції $kf(x)$ первісною буде функція $kF(x)$. Тоді

$$\int_a^b kf(x)dx=kF(x)\Big|_a^b=kF(b)-kF(a)=$$

$$=k(F(b)-F(a))=k\int_a^b f(x)dx.$$

Отже,

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx. \quad \circ \qquad (7)$$

- Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, а $G(x)$ — первісною для функції $g(x)$, то для функції $f(x)+g(x)$ первісною буде функція $F(x)+G(x)$. Тоді

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=(F(x)+G(x))\Big|_a^b=$$

$$=(F(b)+G(b))-(F(a)+G(a))=$$

$$=(F(b)-F(a))+(G(b)-G(a))=$$

$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx.$$

Отже,

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx. \quad \circ \qquad (8)$$

Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ і $c \in [a;b]$, то

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b =$$

$$= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Отже, якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $c \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$ ○

3 Означення визначеного інтеграла через інтегральні суми

Історично виникнення інтеграла було зумовлене необхідністю обчислення площ фігур, обмежених кривими, зокрема обчислення площі криволінійної трапеції.

Розглянемо криволінійну трапецію, зображену на рис. 10.1.7 (функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$). Основу трапеції — відрізок $[a;b]$ — розбито на n відрізків (не обов'язково рівних) точками x_1, x_2, ..., x_{n-1} (для зручності будемо вважати, що $a = x_0$, $b = x_n$). Через ці точки проведено вертикальні прямі. На першому відрізку обрано довільну точку c_1, і на ньому як на основі побудовано прямокутник із висотою $f(c_1)$. Аналогічно на другому відрізку обрано довільну точку c_2, і на ньому як на основі побудовано прямокутник з висотою $f(c_2)$ і так далі.

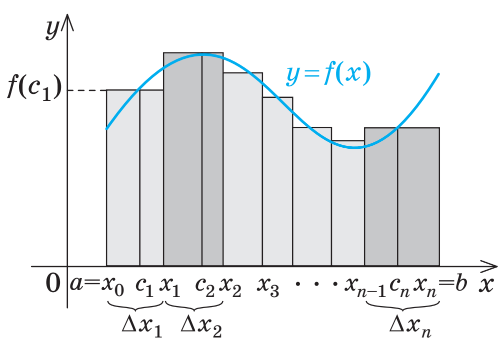


Рис. 10.1.7

Площа S заданої криволінійної трапеції наближено дорівнює сумі площ побудованих прямокутників.

Позначимо цю суму через S_n, довжину першого відрізка — через Δx_1, другого — через Δx_2 і т. д. (тобто $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, ..., $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$). Тоді

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n. \quad (9)$$

Отже, площу S криволінійної трапеції можна наближено обчислювати за формулою (9), тобто $S \approx S_n$.

Суму (9) називають *інтегральною сумою функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$*. При цьому вважають, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і може набувати будь-яких значень: додатних, від'ємних, дорівнювати нулю (а не тільки невід'ємних, як для випадку криволінійної трапеції). Якщо $n \to \infty$ і довжини відрізків розбиття прямують до нуля, то інтегральна сума S_n прямує до деякого числа, яке і називають *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx$. Можна довести, що при цьому також виконується формула Ньютона — Лейбніца і всі розглянуті властивості визначеного інтеграла.

Зауваження. Змінюючи спосіб розбиття відрізка $[a;b]$ на n частин (тобто фіксуючи інші точки x_1, x_2, ..., x_{n-1}) і вибираючи на кожному з одержаних відрізків інші точки c_i (де $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$), ми одержимо для функції $f(x)$ інші інтегральні суми. У курсі математичного аналізу доводиться, що для будь-якої неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ незалежно від способу розбиття цього відрізка і вибору точок c_i, якщо $n \to \infty$ і довжини відрізків розбиття прямують до нуля, то інтегральні суми S_n прямують до одного й того самого числа.

Означення через інтегральні суми дозволяє наближено обчислювати визначені інтеграли за формулою (9). Але такий спосіб потребує громіздких обчислень, і його використовують у тих випадках, коли для функції $f(x)$ не вдається знайти первісну (тоді наближене обчислення визначеного інтеграла зазвичай проводять за допомогою комп'ютера з використанням спеціальних програм). Якщо ж первісна для функції $f(x)$ відома, то інтеграл можна обчислити точно, використовуючи формулу Ньютона — Лейбніца (див. приклад у п. 1 табл. 13 та приклади, наведені нижче).

Зазначимо, що визначений інтеграл широко використовується для опису різноманітних процесів у різних науках, наприклад у фізиці та економіці.

ФІЗИКА

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt$$

q — електричний заряд,
I — сила току

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)\,dt$$

Q — кількість теплоти,
c — теплоємність

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)\,dt$$

A — робота,
F — сила,
N — потужність

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\,dx$$

m — маса тонкого стрижня,
ρ — лінійна густина

$$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

s — переміщення,
v — швидкість,
a — прискорення

ЕКОНОМІКА

$$CS = \int_{0}^{q_0} p(q)\,dq - p_0q_0$$

$$PS = p_0q_0 - \int_{0}^{q_0} p(q)\,dq$$

q — кількість товару,
p — ціна товару (вартість одиниці),
$(p_0; q_0)$ — точка рівноваги попиту і пропозиції,
CS — надлишок для споживача,
PS — надлишок виробника

$$\Pi = \int_{0}^{T} I(t)e^{-pt}\,dt$$

Π — дисконтована вартість грошового потоку,
I — швидкість грошового потоку,
p — річна відсоткова ставка,
t — час

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

f — продуктивність,
t — час,
V — об'єм продукції

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Обчисліть $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Розв'язання	Коментар
▶ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1 - 0 = 1$. *Відповідь*: 1. ◁	Оскільки для функції $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ми знаємо первісну: $F(x) = \operatorname{tg} x$ (див. табл. 12), то заданий інтеграл можна обчислити безпосереднім застосуванням формули Ньютона — Лейбніца $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Приклад 2 Обчисліть $\int\limits_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right)dx$.

Розв'язання	Коментар
I спосіб ▶ Для функції $f(x) = \frac{4}{x} - x$ однією з первісних є функція $F(x) = 4\ln\lvert x\rvert - \frac{x^2}{2}$. Тоді $\int\limits_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right)dx = \left(4\ln\lvert x\rvert - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^3 =$ $= \left(4\ln\lvert 3\rvert - \frac{3^2}{2}\right) - \left(4\ln\lvert 1\rvert - \frac{1^2}{2}\right) = 4\ln 3 - 4$. ◁ **II спосіб** ▶ $\int\limits_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right)dx = \int\limits_1^3 \frac{4dx}{x} - \int\limits_1^3 x dx =$ $= 4\int\limits_1^3 \frac{dx}{x} - \int\limits_1^3 x dx = 4\ln\lvert x\rvert\Big|_1^3 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 =$ $= 4(\ln\lvert 3\rvert - \ln\lvert 1\rvert) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = 4\ln 3 - 4$. ◁	Можливі два шляхи обчислення заданого інтеграла. 1) Спочатку знайти первісну для функції $f(x) = \frac{4}{x} - x$, використовуючи правила обчислення первісних і таблицю первісних, а потім знайти інтеграл за формулою Ньютона — Лейбніца. 2) Використати формулу (8) $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$ і записати заданий інтеграл як алгебраїчну суму двох інтегралів, кожний із яких можна безпосередньо обчислити, як у прикладі 1 (для першого доданка можна також використати формулу (7) і винести сталий множник 4 за знак інтеграла).

Зауваження. Заданий інтеграл розглядають на відрізку $[1; 3]$, де $x > 0$. Але при $x > 0$ однією з первісних для функції $f(x) = \frac{1}{x}$ є функція $F(x) = \ln x$. Тому, враховуючи, що $x > 0$, можна, наприклад, записати, що $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^3$. Хоча, звичайно, наведений вище запис первісної теж є правильним (оскільки при $x > 0$ $\ln\lvert x\rvert = \ln x$).

Приклад 3 Обчисліть площу фігури, обмеженої прямими $x=1$, $x=8$, віссю Ox і графіком функції $y=\sqrt[3]{x}$.

Розв'язання	Коментар
▶ Зображуючи зазначені лінії, бачимо, що задана фігура — криволінійна трапеція (рис. 10.1.8). Тоді її площа $S=\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx=\int_1^8 x^{\frac{1}{3}}dx=\left.\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right\|_1^8=$ $=\frac{3}{4}\left(8^{\frac{4}{3}}-1^{\frac{4}{3}}\right)=\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{8^4}-1\right)=\frac{45}{4}=11\frac{1}{4}$. *Відповідь*: $11\frac{1}{4}$. ◁	Задана фігура є криволінійною трапецією, і тому її площу можна обчислити за формулою $S=\int_a^b f(x)\,dx$, де $a=1$, $b=8$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Також потрібно врахувати, що на заданому відрізку $[1;8]$ значення $x>0$, і з цієї умови можна записати $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$.

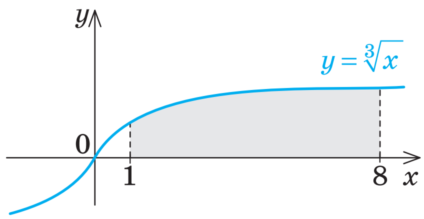


Рис. 10.1.8

Вправи

10.1.1. Обчисліть інтеграл:

1°) $\int_{-1}^{2} x^4 dx$;
4°) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;
7) $\int_{1}^{10} \frac{dx}{x^2}$;
2°) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;
5) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{(2x+1)^2}$;
8) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$.
3°) $\int_{1}^{3} x^3 dx$;
6) $\int_{0}^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}\,dx$;

10.1.2. Обчисліть інтеграл:

1) $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3}\,dx$;
5) $\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)^2 dx$;
2) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$;
6) $\int_{0}^{2} (1+2x)^3\,dx$;
3) $\int_{0}^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}}$;
7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos 2x)\,dx$;
4) $\int_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$;
8) $\int_{1}^{4} \left(x+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx$.

10.1.3. Доведіть правильність рівності:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0^1 dx$;

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$;

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

4) $\int\limits_0^1 (2x+1) dx = \int\limits_0^2 (x^3-1) dx$.

У завданнях 10.1.4–10.1.6 обчисліть (попередньо виконавши рисунок) площу фігури, обмеженої заданими лініями.

10.1.4. 1) $y = x^4$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$; 3*) $y = x^4$, $y = 1$;

2) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$; 4*) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$.

10.1.5. 1) $y = 1 - x^3$, $y = 0$, $x = 0$;

2*) $y = 2 - x^3$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$;

3) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;

4*) $y = -x^2 - 4x$, $y = 1$, $x = -3$, $x = -1$.

10.1.6*. 1) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 1$;

2) $y = 2\cos x$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$;

3) $y = x^2 - 2x + 4$, $y = 3$, $x = -1$;

4) $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = -\frac{5\pi}{6}$.

У завданнях 10.1.7–10.1.8 обчисліть визначений інтеграл, використовуючи його геометричний зміст. *Вказівка*. У кожному завданні необхідно знайти площу криволінійної трапеції. Побудуйте графік відповідної функції, скориставшись, за бажанням, програмою *Desmos* або іншим графічним редактором.

10.1.7*. 1) $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$ 2) $\int\limits_{-5}^{0} \sqrt{25 - x^2}\, dx$; 3) $\int\limits_{0}^{6} \sqrt{6x - x^2}\, dx$; 4) $\int\limits_{-2}^{1} |x|\, dx$,

10.1.8*. 1) $\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}\, dx$; 2) $\int\limits_{-4}^{6} \sqrt{24 + 2x - x^2}\, dx$; 3) $\int\limits_{0}^{4} |x - 3|\, dx$; 4) $\int\limits_{-3}^{2} |x + 2|\, dx$.

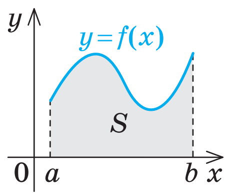
Виявіть свою компетентність

10.1.9. Під дією сили $F = 10$ Н пружина розтягується на 2 см. Яку роботу при цьому виконує сила F, якщо за законом Гука $F = kx$, де x — деформація пружини, k — коефіцієнт.

10.2. Обчислення площ і об'ємів за допомогою визначених інтегралів

Таблиця 14

1. Площа криволінійної трапеції

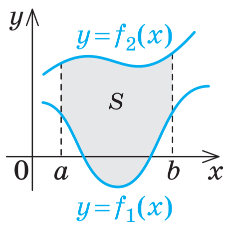


Площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, дорівнює:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

2. Площа фігури, обмеженої графіками двох функцій і прямими $x = a$ та $x = b$

Формула

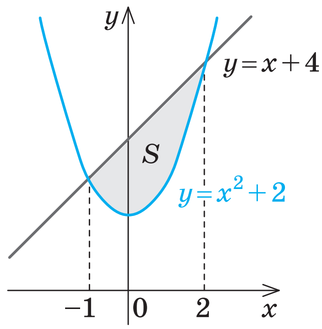


Якщо на заданому відрізку $[a; b]$ неперервні функції $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ мають таку властивість, що $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всіх $x \in [a; b]$,

то $\boxed{S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx}$ (1)

Приклад

Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$.



Зобразимо задані лінії та визначимо абсциси точок їх перетину.

Абсциси точок перетину:

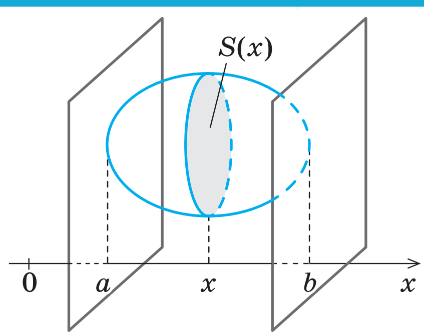
$x^2 + 2 = x + 4$; $x^2 - x - 2 = 0$;

$x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

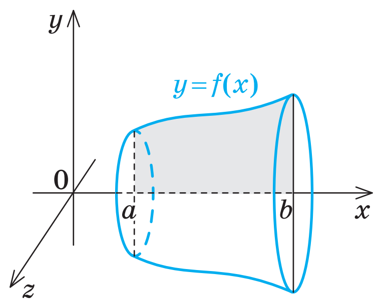
Тоді за формулою (1)

$$S = \int_{-1}^{2} ((x + 4) - (x^2 + 2))dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4\frac{1}{2}.$$

3. Об'єми тіл



Якщо тіло вміщене між двома перпендикулярними до осі Ox площинами, що проходять через точки $x = a$ і $x = b$, то $V = \int_a^b S(x)dx$, де $S(x)$ — площа перерізу тіла площиною, яка проходить через точку $x \in [a; b]$ і перпендикулярна до осі Ox.



Якщо тіло одержали обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, яка обмежена графіком неперервної та невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$ і прямими $x = a$ й $x = b$, то

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

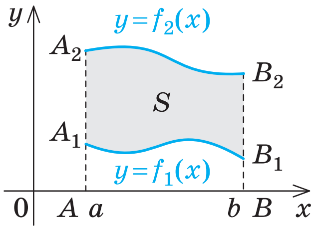


Рис. 10.2.1

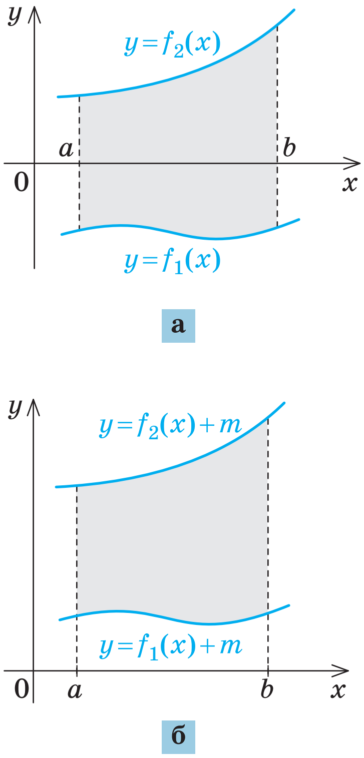


Рис. 10.2.2

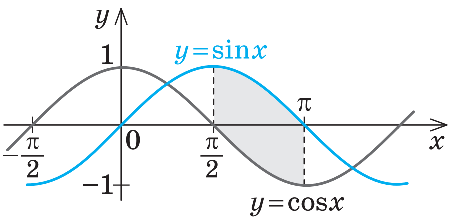


Рис. 10.2.3

1 Обчислення площ плоских фігур

Обґрунтування формули площі криволінійної трапеції та приклади її застосування було наведено в п. 10.1.

З'ясуємо, як можна обчислити площу фігури, зображеної на рис. 10.2.1. Ця *фігура обмежена зверху графіком функції* $y=f_2(x)$, знизу — графіком функції $y=f_1(x)$, *а також вертикальними прямими* $x=a$ і $x=b$ $(a<b)$; функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ *неперервні та невід'ємні на відрізку* $[a;b]$ і $f_2(x)\geqslant f_1(x)$ для всіх $x\in[a;b]$.

Площа S цієї фігури дорівнює різниці площ S_2 і S_1 криволінійних трапецій (S_2 — площа криволінійної трапеції AA_2B_2B, а S_1 — площа криволінійної трапеції AA_1B_1B). За геометричним змістом визначеного інтеграла

$$S_1=\int_a^b f_1(x)dx,\quad S_2=\int_a^b f_2(x)dx.$$

Отже, $S=S_2-S_1=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b\big(f_2(x)-f_1(x)\big)dx.$

Таким чином, площу заданої фігури можна обчислити за формулою

$$S=\int_a^b\big(f_2(x)-f_1(x)\big)dx. \qquad (1)$$

Ця формула буде правильною і в тому випадку, коли задані функції не є невід'ємними на відрізку $[a;b]$ — достатньо виконання умов, що *функції* $f_1(x)$ і $f_2(x)$ *неперервні на відрізку* $[a;b]$ і $f_2(x)\geqslant f_1(x)$ для всіх $x\in[a;b]$ (рис. 10.2.2, *а*). Для обґрунтування достатньо перенести задану фігуру паралельно вздовж осі Oy на m одиниць так, щоб вона розмістилася над віссю Ox (рис. 10.2.2, *б*). Таке перетворення означає, що задані функції $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$ ми замінили відповідно на функції $y=f_1(x)+m$ і $y=f_2(x)+m$. Площа фігури, обмеженої графіками цих функцій та прямими $x=a$ і $x=b$, дорівнює площі заданої фігури. Отже, шукана площа

$$S=\int_a^b\Big(\big(f_2(x)+m\big)-\big(f_1(x)+m\big)\Big)dx=\int_a^b\big(f_2(x)-f_1(x)\big)dx.$$

Наприклад, площа фігури, зображеної на рис. 10.2.3, дорівнює $S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx=(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1+1=2.$

2 Обчислення об'ємів тіл

Задача обчислення об'єму тіла за допомогою визначеного інтеграла аналогічна до задачі знаходження площі криволінійної трапеції. Нехай задано тіло об'ємом V, причому є така пряма (вісь Ox на рис. 10.2.4), що яку б не взяли площину, перпендикулярну до цієї прямої, нам буде відома площа S перерізу тіла цією площиною. Але площина, перпендикулярна до осі Ox, перетинає її в деякій точці x. Отже, кожному числу x з відрізка $[a; b]$ (див. рис. 10.2.4) поставлено у відповідність єдине число $S(x)$ — площу перерізу тіла цією площиною. Тим самим на відрізку $[a; b]$ задано функцію $S(x)$. Якщо функція S неперервна на відрізку $[a; b]$, то справджується формула

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \qquad (2)$$

Повне доведення цієї формули наведено в курсах математичного аналізу, а ми зупинимося на наочних міркуваннях, з яких вона випливає.

Поділимо відрізок $[a; b]$ на n відрізків однакової довжини точками x_k такими, що $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, і припустимо, що

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Через кожну точку x_k проведемо площину α_k, перпендикулярну до осі Ox. Ці площини розрізають дане тіло на шари (рис. 10.2.5, *а*). Об'єм шару між площинами α_{k-1} і α_k (рис. рис. 10.2.5, *б*) при достатньо великих n наближено дорівнює площі $S(x_{k-1})$ перерізу, помноженій на «товщину шару» Δx, і тому

$$V \approx S(x_0)\Delta x + S(x_1)\Delta x + \ldots + S(x_n)\Delta x = V_n.$$

Точність цієї наближеної рівності тим вища, чим тонші шари, на які розрізане тіло, тобто чим більше n.

Тому $V_n \to V$, якщо $n \to \infty$. За означенням визначеного інтеграла через інтегральні суми одержуємо, що $V_n \to \int_a^b S(x)\,dx$, якщо $n \to \infty$.

Отже,

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \ \circ$$

Використаємо одержаний результат для обґрунтування *формули об'єму тіл обертання*.

Нехай криволінійна трапеція спирається на відрізок $[a; b]$ осі Ox і обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, яка невід'ємна і неперервна на відрізку $[a; b]$. Унаслідок обертання цієї криволінійної трапеції навколо осі Ox утворюється тіло (рис. 10.2.6, *а*), об'єм якого можна знайти за формулою

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (3)$$

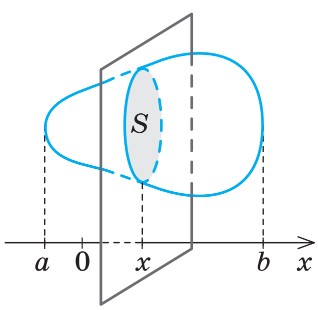
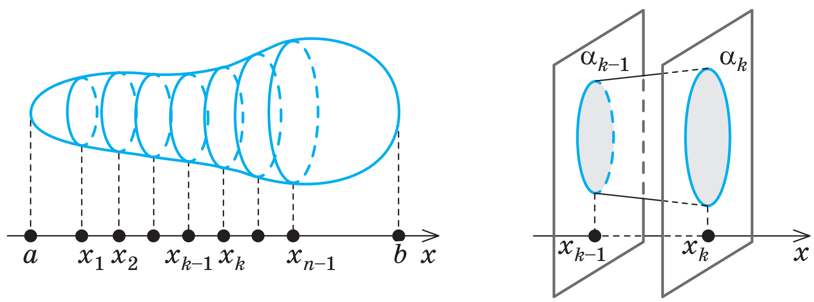


Рис. 10.2.4



а б

Рис. 10.2.5

Справді, перерізом тіла кожною площиною, яка перпендикулярна до осі Ox і перетинає відрізок $[a;b]$ цієї осі в точці x, є круг радіусом $f(x)$ і площею $S(x)=\pi f^2(x)$ (рис. 10.2.6, *б*). Звідси за формулою (2) одержуємо формулу (3).

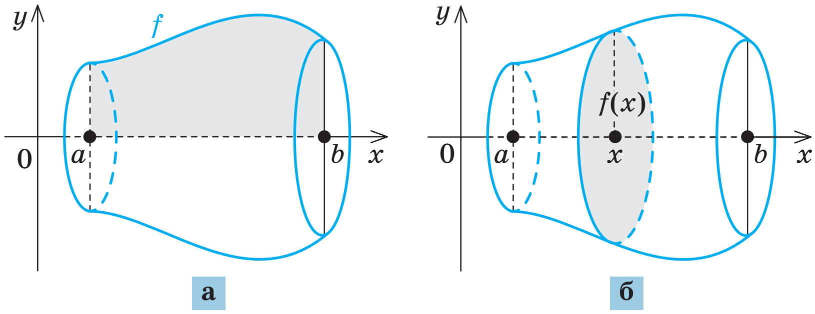


Рис. 10.2.6

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2$ і $y=\sqrt{-x}$.

Розв'язання

Зобразимо задані лінії (рис. 10.2.7) і знайдемо абсциси точок їх перетину:

$$x^2=\sqrt{-x}, \qquad (1)$$

тоді $x^4=-x$; $x^4+x=0$; $x(x^3+1)=0$; $x=0$ або $x=-1$ (обидва корені задовольняють рівняння (1)).

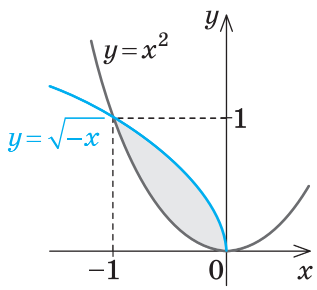


Рис. 10.2.7

Площа заданої фігури:

$$S=\int_{-1}^{0}\left(\sqrt{-x}-x^2\right)dx=\int_{-1}^{0}(-x)^{\frac{1}{2}}\,dx-$$

$$-\int_{-1}^{0}x^2dx=-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{3}. \ \triangleleft$$

Коментар

Зобразимо задані лінії (рис. 10.2.7). Бачимо, що шукана фігура розташована між графіками двох функцій. Зверху вона обмежена графіком функції $f_2(x)=\sqrt{-x}$, а знизу — графіком функції $f_1(x)=x^2$. Отже, площу фігури можна обчислити за формулою

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$$

Щоб знайти межі інтегрування, визначимо абсциси точок перетину графіків заданих функцій. Оскільки ординати обох кривих у точках перетину ті самі, то достатньо розв'язати рівняння $f_1(x)=f_2(x)$.

Для розв'язування одержаного ірраціонального рівняння можна використати рівняння-наслідки (завершити розв'язання перевіркою) або рівносильні перетворення (на ОДЗ, тобто при $x\leqslant 0$).

Зазначимо також, що на одержаному відрізку $[-1;0]$ значення $(-x)\geqslant 0$.

Тоді $\sqrt{-x}=(-x)^{\frac{1}{2}}$.

Приклад 2

Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y=4-x^2$ і $y=0$.

Розв'язання	Коментар
▶ Знайдемо абсциси точок перетину заданих ліній. $4-x^2=0;\ x=\pm 2.$ Оскільки задана фігура — криволінійна трапеція, то об'єм тіла обертання $V=\int_{-2}^{2}\pi(4-x^2)^2\,dx=\pi\int_{-2}^{2}(16-8x^2+x^4)\,dx=$ $=\pi\left(16x-8\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Big\|_{-2}^{2}=34\frac{2}{15}\pi.$ ◁	Зобразимо задану фігуру (рис. 10.2.8) і впевнимося, що вона є криволінійною трапецією. У цьому випадку об'єм тіла обертання можна обчислювати за формулою $V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$ Щоб знайти межі інтегрування, достатньо знайти абсциси точок перетину заданих ліній. Як і для задач на обчислення площ, до відповіді записують числове значення об'єму, але можна підкреслити, що ми одержали саме величину об'єму, і записати *відповідь*: $34\frac{2}{15}\pi$ куб. од. (тобто кубічних одиниць).

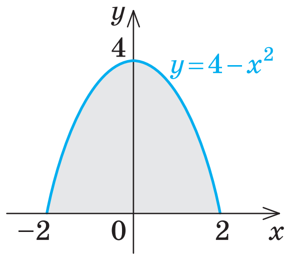


Рис. 10.2.8

Зауваження. Можна було б звернути увагу на те, що задана фігура симетрична відносно осі Oy, і тому об'єм тіла, утвореного обертанням всієї фігури навколо осі абсцис, буде вдвічі більшим за об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції, що спирається на відрізок $[0;2]$.

Запитання

1. Поясніть, як можна знайти площу криволінійної трапеції. Наведіть приклад.
2. 1) Запишіть формулу для знаходження площі фігури, обмеженої зверху і знизу графіками неперервних функцій, а також прямими $x=a$ і $x=b$ $(a<b)$. Наведіть приклад.
   2*) Доведіть цю формулу.
3. Запишіть формулу для знаходження об'єму тіла, одержаного обертанням криволінійної трапеції навколо осі абсцис. Наведіть приклад її використання.

Вправи

У завданнях 10.2.1–10.2.6 обчисліть площу фігури, обмеженої заданими лініями.

10.2.1. 1) $y=x^2-4x+5,\ y=5-x;$ 3) $y=\frac{4}{x},\ y=4,\ x=4;$

2) $y=x^2-3x+4,\ y=4-x;$ 4) $y=\frac{3}{4},\ y=3,\ x=3.$

10.2.2. 1) $y=x^2-6x+9$, $y=5-x$; 3) $y=4-x^2$, $y=x+2$;

2) $y=x^2+2x+1$, $y=x+3$; 4) $y=4-x^2$, $y=2-x$.

10.2.3. 1) $y=x^2$, $y=x+2$; 2) $y=x^2$, $y=2-x$.

10.2.4. 1) $y=-x^2+2x+1$, $y=x^2-4x+5$;

2) $y=x^2+2x+2$, $y=6-x^2$.

10.2.5. 1) $y=\frac{7}{x}$, $x+y=8$; 3) $y=\frac{5}{x}$, $y=4x+1$, $x=2$;

2) $y=\frac{5}{x}$, $x+y=6$; 4) $y=\frac{3}{x}$, $y=2x+1$, $x=3$.

10.2.6. 1) $y=8-x^2$, $y=4$; 3) $y=x^2$, $y=4x-x^2$;

2) $y=6-x^2$, $y=5$; 4) $y=x^2$, $y=2x-x^2$.

10.2.7. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції $y=8x-2x^2$, дотичною до цієї параболи, проведеною через її вершину, та прямою $x=0$.

10.2.8. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції $f(x)=8-0{,}5x^2$, дотичною, проведеною до нього в точці з абсцисою $x=-2$, і прямою $x=1$.

10.2.9. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

1) $y=x^2+1$, $x=0$, $x=1$, $y=0$; 3) $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $y=0$;

2) $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $x=4$, $y=0$; 4) $y=1-x^2$, $y=0$.

10.2.10. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями:

1) $y=x^2$, $y=x$; 3) $y=x+2$, $y=1$, $x=0$, $x=2$;

2) $y=2x$, $y=x+3$, $x=0$, $x=1$; 4) $y=\sqrt{x}$, $y=x$.

У завданнях 10.2.11–10.2.15 обчисліть площу фігури, обмеженої заданими лініями.

10.2.11. 1) $y=x^2-2x+3$, $y=3-x$; 3) $y=\frac{1}{x}$, $y=1$, $x=4$;

2) $y=x^2-5x+2$, $y=2-x$; 4) $y=\frac{2}{x}$, $y=2$, $x=3$.

10.2.12. 1) $y=x^2-4x+4$, $y=2-x$; 3) $y=5-x^2$, $y=x+3$;

2) $y=x^2+2x+1$, $y=x+1$; 4) $y=4-x^2$, $y=x+4$.

10.2.13. 1) $y=x^3$, $y=x$; 3) $y=-x^2+2x+1$, $y=x^2-2x+1$;

2) $y=x^3$, $y=4x$; 4) $y=x^2+2x+2$, $y=2-x^2$.

10.2.14. 1) $y=\frac{2}{x}$, $x+y=3$; 3) $y=\frac{3}{x}$, $y=4x-1$, $x=2$;

2) $y=\frac{4}{x}$, $x+y=5$; 4) $y=\frac{5}{x}$, $y=2x+3$, $x=3$.

10.2.15. 1) $y=9-x^2$, $y=1$; 3) $y=x^2$, $y=8x-x^2$;

2) $y=5-x^2$, $y=4$; 4) $y=x^2$, $y=3x-2x^2$.

10.2.16. При якому значенні a пряма $x=a$ ділить навпіл площу фігури, обмеженої графіком функції $y=\frac{8}{x}$ та прямими $y=0$, $x=2$, $x=8$?

10.2.17. При якому значенні a пряма $x=a$ ділить навпіл площу фігури, обмеженої графіком функції $y=\frac{4}{x}$ та прямими $y=0$, $x=4$, $x=9$?

10.2.18. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y=2x-x^2$, дотичною, проведеною до цієї параболи в точці з абсцисою $x_0=2$, та віссю ординат.

10.2.19. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y=3x-x^2$, дотичною, проведеною до цієї параболи в точці з абсцисою $x_0=3$, та віссю ординат.

10.2.20. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=\sqrt{x+1}$ і $y=\sqrt{7-x}$ та віссю абсцис.

10.2.21*. При яких значеннях a площа фігури, обмеженої лініями $y=x^4$, $y=0$ і $x=a$, дорівнює 625?

10.2.22*. При яких значеннях a площа фігури, обмеженої лініями $y=x^3$, $y=0$ і $x=a$, дорівнює 64?

Виявіть свою компетентність

10.2.23. Потрібно пофарбувати з однієї сторони 30 однакових плоских металевих деталей. Ескіз деталі зображено на рис. 10.2.9 (верхня межа деталі задається графіком функції $y=8\sqrt{x}$, а нижня — графіком функції $y=x^2$, одиничний відрізок на ескізі дорівнює 20 см). Скільки банок, що містять по 0,9 кг фарби, потрібно придбати, якщо для фарбування 1 м^2 поверхні витрачається 130 г фарби?

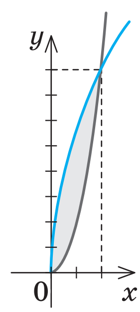


Рис. 10.2.9

10.3. Застосування первісної та визначеного інтеграла до розв'язування задач практичного змісту

Інтегрування застосовується не тільки для знаходження площ плоских фігур і об'ємів тіл. Розглянемо інші випадки застосування інґерала.

Часто для математичного моделювання різноманітних процесів доводиться розглядати рівняння, у яких невідомими є функції. Наприклад, задача знаходження шляху $s(t)$ за заданою швидкістю $v(t)$ зводиться до розв'язування рівняння $s'(t)=v(t)$, де $v(t)$ — задана функція, а $s(t)$ — шукана функція. Розв'язують таке рівняння* інтегруванням. Під час розв'язування слід ураховувати, що *розв'язок визначається неоднозначно, з точністю до сталої*. Зазвичай до рівняння, що містить похідну невідомої функції, додається умова, з якої цю сталу визначають.

Докладніше ознайомитися з розв'язуванням диференційних рівнянь ви можете, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Розглянемо приклади розв'язування практичних задач за допомогою інтегрування.

Приклад 1

Циліндричний бак, висота якого 4,5 м, а радіус основи 1 м, заповнений водою. За який час вода витече з бака через круглий отвір у дні, якщо радіус отвору дорівнює 0,05 м?

Розв'язання

Позначимо висоту бака H (рис. 10.3.1), радіус його основи R, радіус отвору r (довжини вимірюємо в метрах, час — у секундах). Швидкість витікання рідини v залежить від висоти стовпа рідини x, її обчислюють за формулою Бернуллі:

$$v=\sigma\sqrt{2gx}, \qquad (1)$$

де $g=9{,}8$ м/с^2, σ — коефіцієнт, що залежить від властивостей рідини (для води $\sigma=0{,}6$). Зі зменшенням рівня води в баці швидкість витікання зменшується (тобто не є постійною).

Нехай $t(x)$ — час, за який із бака висотою x і радіусом основи R витікає вода через отвір радіуса r (рис. 10.3.1).

Знайдемо наближено відношення $\frac{\Delta t}{\Delta x}$, уважаючи, що в період часу $\Delta t=t(x+\Delta x)-t(x)$ швидкість витікання води є постійною і виражається формулою (1).

Об'єм води, що витекла з бака за час Δt, дорівнює об'єму циліндра висотою Δx з радіусом основи R (див. рис. 10.3.1), тобто дорівнює $\pi R^2\Delta x$. З іншого боку, цей об'єм дорівнює об'єму циліндра, основою якого служить отвір у дні бака, а висота — добутку швидкості витікання v на час Δt, тобто об'єм дорівнює $\pi r^2 v\Delta t$.

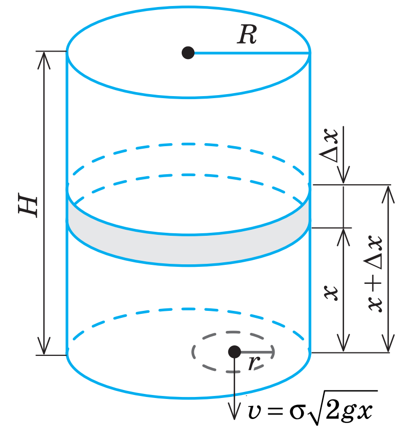


Рис. 10.3.1

* Рівняння, які містять похідну невідомої функції, називаються *диференціальними рівняннями*. Їх розв'язування розглядається в курсі вищої математики.

Отже,

$$\pi R^2 \Delta x = \pi r^2 v \Delta t.$$

Ураховуючи формулу (1), одержуємо:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{R^2}{r^2 v} = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2gx}} = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Тоді при $\Delta x \to 0$ одержуємо рівність

$$t'(x) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Остання рівність означає, що функція $t(x)$ є первісною для одержаної функції.

Тоді

$$t(x) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} 2\sqrt{x} + C.$$

Якщо $x = 0$ (у баці немає води), то $t(0) = 0$, тому $C = 0$. При $x = H$ знаходимо шуканий час:

$$t(H) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{g}} \sqrt{2H}.$$

Використовуючи дані задачі, одержуємо:

$$t(4{,}5) = \frac{1^2}{(0{,}05)^2 \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{9{,}8}} \sqrt{9} \approx 639 \text{ (с)}.$$

Відповідь: 639 с. ◁

Приклад 2 Обчисліть роботу сили F під час стискування пружини на 0,06 м, якщо для її стиску на 0,01 м потрібна сила 5 Н.

Розв'язання

▶ За законом Гука сила F пропорційна розтягу або стиску пружини, тобто $F = kx$, де x — величина розтягу чи стиску (у метрах), k — постійна.

З умови задачі знаходимо k. Оскільки при $x = 0{,}01$ м сила $F = 5$ Н, то $k = \frac{F}{x} = 500$ Н/м. Отже, $F(x) = kx = 500x$.

Знайдемо формулу для обчислення роботи, що була виконана під час переміщення тіла (яке розглядається як матеріальна точка), що рухається під дією змінної сили $F(x)$, напрямленої вздовж осі Ox. Нехай тіло перемістилося з точки $x = a$ в точку $x = b$.

Позначимо через $A(x)$ роботу, яку виконано під час переміщення тіла з точки a в точку x. Надамо x приросту Δx. Тоді $\Delta A = A(x + \Delta x) - A(x)$ — робота, яка виконується силою $F(x)$ при переміщенні тіла з точки x у точку $x + \Delta x$. Якщо $\Delta x \to 0$, то силу $F(x)$ на відрізку $[x; x + \Delta x]$ будемо вважати постійною і рівною $F(x)$. Тоді $\Delta A = F(x)\Delta x$. Звідси $\frac{\Delta A}{\Delta x} = F(x)$. При $\Delta x \to 0$ одержуємо $A'(x) = F(x)$. Остання рівність означає, що $A(x)$ є первісною для функції $F(x)$.

Ураховуючи, що $A(a) = 0$, за формулою Ньютона — Лейбніца одержуємо:

$$\int_a^b F(x)dx = A(x)\Big|_a^b = A(b) - A(a) = A(b) = A.$$

Отже, ***робота змінної сили $F(x)$ під час переміщення тіла з точки a в точку b дорівнює***

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Використовуючи дані задачі, одержуємо:

$$A = \int_0^{0{,}06} 500x\,dx = 500\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}06} = 0{,}9 \text{ (Дж)}.$$ ◁

Вправи

10.3.1. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)$ (м/с). Обчисліть шлях, який пройде тіло за проміжок часу від $t=t_1$ до $t=t_2$, якщо:

1) $v(t)=3t^2+1$, $t_1=0$, $t_2=4$; 2) $v(t)=2t^2+t$, $t_1=1$, $t_2=3$.

10.3.2. Яку роботу потрібно виконати для стискання пружини на 4 см, якщо відомо, що сила 2 Н стискає цю пружину на 1 см?

10.3.3. Пружину розтягли на 8 см, приклавши силу 4 Н. Яку роботу при цьому виконали?

10.3.4. Вода, що подається в циліндричний бак із площини основи через отвір у дні, заповнює весь бак. Визначте затрачену при цьому роботу. Висота бака дорівнює h, радіус основи r.

Виявіть свою компетентність

10.3.5. Яку роботу потрібно виконати для занурення кулі у воду (врахуйте, що на кулю діє виштовхувальна сила)? Запишіть формулу.

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Інтегральне числення й поняття інтеграла виникло через необхідність обчислення площ плоских фігур та об'ємів тіл. Ідеї інтегрального числення беруть свій початок у роботах стародавніх математиків. Зокрема важливе значення для розвитку інтегрального числення мав *метод вичерпування*, запропонований **Євдоксом Кнідським** (бл. 408 — бл. 355 рр. до н. е.) і вдосконалений **Архімедом**. За цим методом для обчислення площі плоскої фігури навколо неї описують ступінчасту фігуру і в неї вписують ступінчасту фігуру. Збільшуючи кількість сторін одержаних многокутників, знаходять границю, до якої прямують площі ступінчастих фігур (саме так у курсі геометрії було доведено формулу площі круга). Архімед передбачив багато ідей інтегрального числення. Але пройшло більш як півтори тисячі років, перш ніж ці ідеї було доведено до рівня числення. Зазначимо, що математики XVII ст., які здобули багато нових результатів, брали за основу праці Архімеда. У XVII ст. було зроблено багато відкриттів стосовно інтегрального числення, уведено основні поняття і терміни.

Символ $\int$ увів **Г. Лейбніц** (1675 р.). Цей знак є зміненою латинською буквою S (пер-

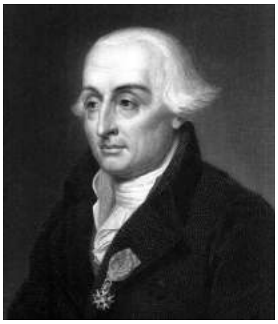
Архімед (287–212 рр. до н. е)

Г. Лейбніц (1646–1716)

Я. Бернуллі (1655–1705)

Л. Ейлер (1707–1783)

Ж.-Б. Фур'є
(1768–1830)



Ж.-Л. Лагранж
(1736–1813)

В. Я. Буняковський
(1804–1889)

М. В. Остроградський
(1801–1862)

ша буква слова *summa*). Саме слово *інтеграл* увів **Я. Бернуллі** (1690 р.). Інші відомі вам терміни, що стосуються інтегрального числення, з'явилися значно пізніше. Термін *первісна функція*, що застосовується тепер, замінив попередню назву *примітивна функція*, яку ввів **Ж.-Л. Лагранж** (1797 р.). Латинське слово *primitivus* перекладається як *початковий*: функція $F(x)=\int f(x)dx$ — початкова (або первісна) для функції $f(x)$, яка утворюється з $F(x)$ диференціюванням. Поняття *невизначеного інтеграла* та його позначення ввів Лейбніц, а позначення *визначеного інтеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ увів **Ж.-Б. Фур'є** (1768–1830).

Слід зауважити, що при всій значущості результатів, здобутих математиками XVII ст., інтегрального числення ще не було. Необхідно було окреслити загальні ідеї, на яких ґрунтується розв'язування багатьох окремих задач, а також установити зв'язок операцій диференціювання й інтегрування. Це виконали **І. Ньютон** і **Г. Лейбніц**, які відкрили незалежно один від одного факт, відомий під назвою формули Ньютона — Лейбніца. Тим самим остаточно оформився загальний метод. Треба було ще навчитися знаходити первісні для багатьох функцій, дати логічні основи нового числення тощо. Але головне вже було зроблено: диференціальне й інтегральне числення створено. Методи інтегрального числення активно розвивались у наступному столітті (насамперед слід назвати імена **Л. Ейлера**, який завершив систематичне дослідження інтегрування елементарних функцій, та **Й. Бернуллі**). У розвиток інтегрального числення значний внесок зробили математики з України **В. Я. Буняковський** (1804–1889) і **М. В. Остроградський** (1801–1862). Багато теорем і формул Остроградського ввійшли до різних математичних курсів. Математикам усього світу добре відомі метод інтегрування Остроградського, правило Остроградського, формула Остроградського тощо.

Теми навчальних проектів

1. Практичні застосування інтеграла.
2. Диференціальні рівняння та їх застосування для моделювання різноманітних процесів.
3. Використання інтегрального числення в економіці.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 2

1. Запишіть за допомогою невизначеного інтеграла рівність $\left(\cos^2 x + C\right)' = -\sin 2x$.

А $\int\left(\sin^2 x + C\right)dx = \sin 2x$

Б $\int\left(\cos^2 x + C\right)dx = -\sin 2x$

В $\int \sin 2x dx = \sin^2 x + C$

Г $\int(-\sin 2x)dx = \cos^2 x + C$

Д $\int \sin 2x dx = \cos^2 x + C$

2. Для функції $f(x) = 4x^3$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $A(0;1)$.

А $F(x) = -x^4 - 1$

Б $F(x) = x^4 - 1$

В $F(x) = x^4$

Г $F(x) = -x^4 + 1$

Д $F(x) = x^4 + 1$

3. Серед наведених нижче функцій вкажіть ту, первісною для якої є функція $F(x) = \operatorname{ctg} x + C$.

А $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Б $f(x) = -\dfrac{1}{\cos^2 x}$

В $f(x) = \operatorname{tg} x$

Г $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

Д $f(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

4. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції $f(x) = \cos x - e^x$.

А $F(x) = -\sin x - e^x$

Б $F(x) = \sin x - e^x$

В $F(x) = \sin x - e^x + C$

Г $F(x) = -\sin x - e^x + C$

Д $F(x) = \sin x + e^x + C$

5. Установіть відповідність між інтегралами (1–3) та їхніми значеннями (А–Г).

1 $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

2 $\int_0^1 x^2 dx$

3 $\int_1^2 \frac{1}{x^4}dx$

А 1

Б $\frac{7}{24}$

В $\frac{1}{3}$

Г $\frac{2}{3}$

6. Обчисліть інтеграл $\int_0^1 (2x+1)^3 dx$.

7. Знайдіть інтеграл $\int \frac{1 - x^2 + \sqrt{1-x}}{1-x} dx$.

8. Обчисліть інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 3x\, dx$.

9. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \frac{1}{x^2}$, прямими $x = 1$, $x = 4$ та віссю Ox.

Пройдіть онлайн-тестування на сайті *interactive.ranok.com.ua*

Розділ 3

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- систематизуєте й узагальните знання і вміння, пов’язані з комбінаторикою, теорією ймовірностей та математичною статистикою;
- ознайомитеся з аксіомами теорії ймовірностей та наслідками з них, дізнаєтесь, які формули застосовують для обчислення числа перестановок, розміщень і комбінацій;
- навчитеся застосовувати ймовірнісні характеристики до аналізу навколишніх явищ для прийняття правильних рішень

§ 11 ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Таблиця 15

Комбінаторика

Комбінаторика — розділ математики, у якому вивчають способи вибору та розміщення елементів деякої скінченної множини на основі певних умов.
Вибрані (або вибрані й розміщені) групи елементів називають *сполуками*.
Якщо всі елементи різні, то одержуємо сполуку без повторень, а якщо елементи можуть повторюватися, то сполуку з повтореннями. Далі будемо розглядати сполуки без повторень.

Зі схемою вибору та формулами для розв'язування комбінаторних задач за умови повторення елементів можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Перестановки

Означення. ***Перестановкою з n елементів*** **називається будь-яка впорядкована множина з *n* заданих елементів (тобто така *множина, для якої вказано, який елемент розташований на першому місці, який — на другому, ..., який — на n-му*).**

Формула числа перестановок (P_n)	Приклад
$P_n = n!$, де $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ (читають: «ен факторіал»)	Кількість різних шестицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, не повторюючи ці цифри в одному числі, дорівнює: $P_6 = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720.$

Розміщення

Означення. ***Розміщенням з n елементів по k*** **називається будь-яка впорядкована множина з *k* елементів, складена з елементів заданої *n*-елементної множини.**

Формула числа розміщень (A_n^k)	Приклад
$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	Кількість різних трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри не повторюються, дорівнює: $A_6^3 = \dfrac{6!}{(6-3)!} = \dfrac{6!}{3!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 4\cdot 5\cdot 6 = 120.$

Комбінації

Означення. ***Комбінацією без повторень з n елементів по k*** **називається будь-яка *k*-елементна підмножина заданої *n*-елементної множини.**

Формула числа комбінацій (C_n^k)	Приклад
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (за означенням вважають, що $C_n^0 = 1$)	Із класу, що складається з 25 учнів, можна вибрати 5 учнів для чергування по школі C_{25}^5 способами, тобто: $C_{25}^5 = \dfrac{25!}{5!(25-5)!} = \dfrac{25!}{5!\cdot 20!} = \dfrac{21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 53130$ способами.

Деякі властивості числа комбінацій без повторень

$C_n^k = C_n^{n-k}$ (зокрема $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$) $\qquad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

Схема плану розв'язування комбінаторних задач

Правило суми	**Правило добутку**
Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами (при цьому вибір елемента A виключає одночасний вибір і елемента B), то A або B можна вибрати $(m+n)$ способами.	Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після цього елемент B — n способами, то A і B можна вибрати $(m \cdot n)$ способами.

Вибір формули

Чи враховується порядок наступності елементів у сполуці?

Так → Чи всі елементи входять до сполуки?

- Так → Перестановки: $P_n = n!$
- Ні → Розміщення: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Ні → Комбінації: $C_n^k = \dfrac{n!}{k(n-k)!}$

11.1. Правило суми й добутку. Упорядковані множини. Розміщення

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття сполуки. Правило суми й добутку

Під час розв'язування багатьох практичних задач доводиться вибирати з певної сукупності об'єктів елементи, що мають ті або інші властивості, розміщувати ці елементи в певному порядку тощо. Оскільки в таких задачах йдеться про ті або інші комбінації об'єктів, то такі задачі називають *комбінаторними*. Розділ математики, у якому розглядають методи розв'язування комбінаторних задач, називають *комбінаторикою*. У комбінаториці розглядають вибір і розміщення елементів деякої скінченної множини на основі якихось умов.

Вибрані (або вибрані й розміщені) групи елементів називають *сполуками*. Якщо всі елементи сполуки різні, то одержуємо сполуку без повторень, а якщо елементи можуть повторюватися, то одержуємо сполуку з повтореннями.

Надалі в цьому розділі розглядатимемо тільки сполуки без повторень, тому не будемо окремо вказувати на це у кожному випадку.

Розв'язування багатьох комбінаторних задач спирається на два основних правила — правило суми й правило добутку.

Правило суми

Якщо на тарілці лежить 5 груш і 4 яблука, то вибрати один фрукт (тобто грушу або яблуко) можна 9 способами $(5+4=9)$. У загальному вигляді справедливе таке твердження.

Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами (при цьому вибір елемента A виключає одночасний вибір і елемента B), то A *або* B можна вибрати $(m+n)$ способами.

Уточнимо зміст цього правила, використовуючи поняття множин та операцій над ними.

Нехай множина A складається з m елементів, а множина B — з n елементів. Якщо множини A і B не перетинаються (тобто $A\cap B=\varnothing$), то множина $A\cup B$ складається з $m+n$ елементів.

Правило добутку

Якщо в кіоску продають ручки 5 видів і зошити 4 видів, то вибрати набір із ручки й зошита (тобто пару — ручку і зошит) можна $5\cdot 4=20$ способами (оскільки до кожної з 5 ручок можна взяти будь-який із 4 зошитів). У загальному вигляді справедливе таке твердження.

Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після цього елемент B — n способами, то A і B можна вибрати $(m\cdot n)$ способами.

Це твердження означає, що оскільки для кожного з m елементів A можна взяти в пару будь-який з n елементів B, то кількість пар дорівнює добутку $m\cdot n$.

У термінах множин одержаний результат можна сформулювати так: якщо множина A складається з m елементів, а множина B — з n елементів, то множина всіх упорядкованих пар* $(a;b)$, де перший елемент належить множині A (тобто $a\in A$), а другий — множині B (тобто $b\in B$), складається з $m\cdot n$ елементів.

Повторюючи наведені міркування декілька разів (більш строго — використовуючи метод математичної індукції), одержуємо, що правила суми й добутку можна застосовувати при виборі довільної скінченної кількості елементів.

* Множину всіх упорядкованих пар $(a;b)$, де перший елемент належить множині A (тобто $a\in A$), а другий — множині B (тобто $b\in B$), називають декартовим добутком множин A і B і позначають $A\times B$. (Зазначимо, що декартовий добуток $B\times A$ теж складається з $m\cdot n$ елементів.)

2 Упорядковані множини

Під час розв'язування комбінаторних задач доводиться розглядати не тільки множини, у яких елементи можна записувати в будь-якому порядку, а й так звані *впорядковані множини*. Для впорядкованих множин суттєвим є порядок розміщення їх елементів, тобто те, який елемент записано на першому місці, який на другому і т. д. Зокрема, якщо одні й ті самі елементи записати в різному порядку, то отримаємо різні впорядковані множини. Щоб відрізнити запис упорядкованої множини від невпорядкованої, елементи впорядкованої множини часто записують у круглих дужках, наприклад $(1;2;3)\neq(1;3;2)$.

Розглядаючи впорядковані множини, треба враховувати, що одну й ту саму множину можна впорядкувати по-різному. Наприклад, множину з трьох чисел $\{-5;1;3\}$ можна впорядкувати за зростанням: $(-5;1;3)$, за спаданням: $(3;1;-5)$, за зростанням абсолютної величини числа: $(1;3;-5)$ тощо.

Будемо розуміти, що *для того щоб задати скінченну впорядковану множину з n елементів, достатньо вказати, який елемент розміщено на першому місці, який на другому, ..., який на n-му.*

3 Розміщення

Означення. ***Розміщенням*** **з n елементів по k називається будь-яка впорядкована множина з k елементів, складена з елементів заданої n-елементної множини.**

Наприклад, із множини з трьох цифр $\{1;5;7\}$ можна скласти такі розміщення з двох елементів:

$$(1;5),\ (1;7),\ (5;7),\ (5;1),\ (7;1),\ (7;5).$$

Кількість розміщень з n елементів по k позначають A_n^k (читають: «A з n по k»). Як бачимо, $A_3^2=6$.

Кількість розміщень з n елементів по k позначають A_n^k.
A — перша літера французького слова *arrangement* — розміщення).

З'ясуємо, скільки можна скласти розміщень з n елементів по k. Складання розміщення уявимо як послідовне заповнення k місць, які будемо зображати у вигляді клітинок (рис. 11.1.1).

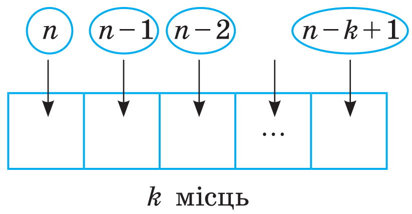


Рис. 11.1.1

На перше місце ми можемо помістити один з n елементів заданої множини (тобто елемент для першої клітинки можна вибрати n способами). На друге місце можна вибрати тільки один елемент із тих, що залишилися, тобто з $(n-1)$. Тепер уже два елементи використано й на третє місце можна вибрати тільки один з $(n-2)$ елементів тощо. На k-те місце можна вибрати тільки один з $n-(k-1)=n-k+1$ елементів (див. рис. 11.1.1).

Оскільки нам потрібно вибрати елементи й на перше, і на друге, ..., і на k-те місце, то використовуємо правило добутку й одержуємо **формулу числа розміщень з n елементів по k:**

$$A_n^k=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k\text{ множників}}.$$

Наприклад, $A_3^2=3\cdot2=6$ (що збігається з відповідним значенням, одержаним вище).

Під час розв'язування найпростіших комбінаторних задач важливо правильно вибрати формулу, за якою будуть проводитись обчислення кількості сполук. Для цього достатньо з'ясувати:

- *чи враховують порядок розміщення елементів у сполуці;*
- *чи всі задані елементи входять до одержаної сполуки.*

Якщо, наприклад, порядок розміщення елементів ураховують і з n заданих елементів у сполуці використовують тільки k елементів, то за означенням це розміщення з n елементів по k.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

На змагання з легкої атлетики приїхала команда з 12 спортсменок. Скількома способами тренер може визначити, хто з них побіжить в естафеті 4 по 100 м на першому, другому, третьому й четвертому етапах?

Розв'язання	Коментар
▶ Кількість способів вибрати з 12 спортсменок чотирьох для участі в естафеті дорівнює кількості розміщень із 12 елементів по 4, тобто $A_{12}^4 = 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9 = 11\,880$. ◁	Для вибору формули відповідаємо на запитання, наведені вище. Оскільки для спортсменок важливо, у якому порядку вони будуть бігти, то порядок розміщення під час вибору елементів ураховується. До одержаної сполуки входять не всі 12 заданих елементів. Отже, відповідна сполука — розміщення з 12 елементів по 4.

Приклад 2

Знайдіть кількість трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, якщо цифри в числі не повторюються.

Розв'язання	Коментар
▶ Кількість трицифрових чисел, які можна скласти з семи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, дорівнює числу розміщень із 7 елементів по 3, тобто $A_7^3 = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$. ◁	Для вибору формули з'ясовуємо, що для чисел, які ми будемо складати, порядок розміщення враховується й не всі елементи вибираються (тільки 3 із заданих семи). Отже, відповідна сполука — розміщення з 7 елементів по 3.

Приклад 3*

Знайдіть кількість трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, якщо цифри в числі не повторюються.

Коментар

Вибір формули проводять так само, як і в прикладі 2. Але треба врахувати, що коли число, складене з трьох цифр, починається цифрою 0, то його не вважають трицифровим. Отже, для відповіді на запитання задачі можна спочатку із заданих 7 цифр утворити всі числа, що складаються з 3 цифр (див. приклад 2), а потім від кількості одержаних чисел відняти кількість тих чисел, які складені з трьох цифр, але починаються цифрою 0. В останньому випадку ми фактично будемо з усіх цифр, крім нуля (їх 6), складати двоцифрові числа. Тоді їх кількість дорівнює числу розміщень із 6 елементів по 2 (див. **розв'язання** завдання).

Також можна виконати безпосереднє обчислення, послідовно заповнюючи три місця в трицифровому числі й використовуючи правило добутку. У цьому випадку зручно унаочнити міркування, зображаючи відповідні розряди в трицифровому числі у вигляді клітинок, наприклад так:

6 можливостей	6 можливостей	5 можливостей

Розв'язання

Кількість трицифрових чисел, які можна скласти з 7 цифр (серед яких немає цифри 0), дорівнює числу розміщень із 7 елементів по 3, тобто A_7^3.
Але серед заданих цифр є цифра 0, з якої не може починатися трицифрове число. Тому з розміщень із 7 елементів по 3 необхідно вилучити ті розміщення, у яких першим елементом є цифра 0. Їх кількість дорівнює числу розміщень із 6 елементів по 2, тобто A_6^2. Отже, шукана кількість трицифрових чисел дорівнює:

$$A_7^3 - A_6^2 = 7\cdot 6\cdot 5 - 6\cdot 5 = 180. ◁$$

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння $\frac{A_x^4}{A_x^2} = 6$.

Розв'язання	Коментар
ОДЗ: $x \in N$, $x \geqslant 4$. Тоді одержуємо $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{x(x-1)} = 6$. На ОДЗ це рівняння рівносильне рівнянням $(x-2)(x-3)=6$; $x^2-5x=0$; $x(x-5)=0$. Тоді $x=0$ або $x=5$. Але до ОДЗ входить тільки $x=5$. *Відповідь*: 5. ◁	*Рівняння, до запису яких входять вирази, що позначають кількість відповідних сполук з x елементів, вважають означеними тільки при натуральних значеннях змінної x.* У даному разі для існування виразу A_x^4 потрібно вибирати натуральне значення $x \geqslant 4$ (тоді A_x^2 теж існує і, звичайно, $A_x^2 \neq 0$). Для перетворення рівняння використовуємо відповідні формули: $A_x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3)$; $A_x^2 = x(x-1)$.

Запитання

1. Сформулюйте й поясніть на прикладах правило суми й правило добутку для розв'язування комбінаторних задач.
2. Поясніть, яку скінченну множину вважають упорядкованою. Наведіть приклади впорядкованих скінченних множин.
3. Поясніть, що називають розміщенням з n елементів по k без повторень. Наведіть приклади.
4. Запишіть формулу для обчислення числа розміщень з n елементів по k без повторень. Наведіть приклади її використання.
5*. Обґрунтуйте формулу для обчислення числа розміщень з n елементів по k без повторень.

Вправи

11.1.1°. Маємо 4 різні конверти без марок і 3 різні марки. Скількома способами можна вибрати конверт і марку для відправки листа?

11.1.2°. У коробці міститься 10 білих і 6 чорних куль. Скількома способами з коробки можна витягти:
1) одну кулю будь-якого кольору;
2) дві кулі різного кольору?

11.1.3. У корзині лежать 12 яблук і 9 апельсинів (усі різні). Петрик вибирає або яблуко, або апельсин, після чого Надійка вибирає з тих фруктів, що залишилися, і яблуко, і апельсин. Скільки існує таких варіантів вибору? При якому виборі Петрика в Надійки більше можливостей вибору?

11.1.4*. Учневі потрібно виконати 4 тести протягом 8 днів. Скількома способами може бути складений розклад його тестування, якщо в один день він може виконувати тільки один тест?

11.1.5*. Скількома способами може розміститися родина з трьох осіб у чотиримісному купе, якщо інших пасажирів у купе немає?

11.1.6. Із 30 учасників зборів треба вибрати голову та секретаря. Скількома способами це можна зробити?

11.1.7. Скількома способами можуть зайняти перше, друге й третє місця 8 учасниць фінального забігу на дистанції 100 м (припускаємо, що всі вони покажуть різний час)?

11.1.8. Скількома способами можна виготовити трикольоровий прапор з вертикальними смугами, якщо є матеріал 7 різних кольорів?

11.1.9. Скількома способами організатори конкурсу можуть визначити, хто з 15 його учасників буде виступати першим, другим і третім?

11.1.10. На площині відмітили 5 точок. Їх потрібно позначити латинськими буквами. Скількома способами це можна зробити (у латинському алфавіті 26 букв)?

11.1.11. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 3, 5, 7, 9, якщо цифри в числі не повторюються?

11.1.12*. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 2, 4, 6, 8, якщо цифри в числі не повторюються?

11.1.13. Скільки існує семицифрових телефонних номерів, у яких усі цифри різні й перша цифра відмінна від нуля?

11.1.14*. Скільки різних трицифрових чисел (без повторення цифр) можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб одержані числа були:

1) парними; 2) кратними 5?

11.1.15*. Розв'яжіть рівняння:

1) $A_x^2 = 20$; 2) $\dfrac{A_x^5}{A_x^3} = 6$.

11.1.16*. Учні 11 класу мають пройти флюорографічне обстеження. Скількома способами можна скласти чергу відвідування старшокласниками лабораторії, якщо в класі 30 учнів, а щодня проходять обстеження 5 осіб? (Список на кожен день складається в тому порядку, в якому учні будуть проходити обстеження.) *Вказівка*. Запишіть вираз, за допомогою якого можна знайти шукане число.

11.2. Перестановки

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Означення. ***Перестановкою* з n елементів називається будь-яка впорядкована множина з n заданих елементів.**

Нагадаємо, що впорядкована множина — це така *множина, для якої вказано, який елемент розміщено на першому місці, який на другому, ..., який на n-му.*

Наприклад, переставляючи цифри в числі 236 (тут множина цифр $\{2; 3; 6\}$ уже впорядкована), можна скласти такі *перестановки без повторень*: $(2; 3; 6)$, $(2; 6; 3)$, $(3; 2; 6)$, $(3; 6; 2)$, $(6; 2; 3)$, $(6; 3; 2)$ — усього 6 перестановок*.

Кількість перестановок з n елементів позначають P_n.
P — перша літера французького слова *permutation* — перестановка.

Як бачимо, $P_3 = 6$.

Фактично перестановки з n елементів є розміщеннями з n елементів по n, тому $P_n = A_n^n = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}_{n \text{ множників}}$.

Добуток $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ позначають $n!$. Тому одержана **формула числа перестановок без повторень з n елементів** може бути записана так:

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n.$$

Наприклад, $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ (що збігається з відповідним значенням, одержаним вище).

За допомогою факторіалів формулу для числа розміщень без повторень

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k \text{ множників}} \quad (1)$$

можна записати в іншому вигляді. Для цього помножимо й поділимо вираз у формулі (1) на добуток $(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = (n-k)!$. Одержуємо:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} =$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Отже, **формула для числа розміщень без повторень з n елементів по k** може бути записана так:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (2)$$

Для того щоб цією формулою можна було користуватися при всіх значеннях k, зокрема при $k = n-1$ та при $k = n$, домовилися вважати, що: $1! = 1$ і $0! = 1$.

Наприклад, за формулою (2)

$$A_6^5 = \frac{6!}{(6-5)!} = \frac{6!}{1!} = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720.$$

Зауважимо, що в тих випадках, коли значення $n!$ виявляється дуже великим, відповіді залишають записаними за допомогою факторіалів.

Наприклад, $A_{30}^{25} = \frac{30!}{(30-25)!} = \frac{30!}{5!}$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Нагадаємо: для вибору формули під час розв'язування найпростіших комбінаторних задач достатньо відповісти на запитання:

- *чи враховують порядок розміщення елементів у сполуці;*
- *чи всі задані елементи входять до одержаної сполуки?*

Якщо, наприклад, порядок розміщення елементів ураховується і всі n заданих елементів використовуються у сполуці, то за означенням це перестановки з n елементів.

* Зазначимо, що кожна така перестановка визначає трицифрове число, складене з цифр 2, 3, 6, так, що цифри в числі не повторюються.

Приклад 1

Знайдіть, скількома способами можна вісім учнів вишикувати в колону по одному.

Розв'язання	Коментар
▶ Кількість способів дорівнює числу перестановок з 8 елементів. Тобто $P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$. ◁	Для вибору відповідної формули з'ясовуємо відповіді на запитання, наведені вище. Оскільки порядок розміщення елементів ураховується й усі 8 заданих елементів вибираються, то відповідні сполуки — це перестановки з 8 елементів. Їх кількість можна обчислити за формулою: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Приклад 2

Знайдіть кількість різних чотирицифрових чисел, які можна скласти з цифр 0, 3, 7, 9 (цифри в числі не повторюються).

Розв'язання	Коментар
▶ З чотирьох цифр 0, 3, 7, 9 можна одержати P_4 перестановок. Але ті перестановки, які починаються з 0, не будуть записом чотирицифрового числа — їх кількість P_3. Тоді шукана кількість чотирицифрових чисел дорівнює: $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 18$. ◁	Оскільки порядок розміщення елементів ураховується і для одержання чотирицифрового числа потрібно використати всі елементи, то потрібна сполука — це перестановки з 4 елементів. Їх кількість P_4. Але ще потрібно врахувати, що в чотирицифровому числі на першому місці не може стояти цифра 0. Таких чисел буде стільки, скільки разів ми зможемо виконати перестановки з 3 цифр, які залишилися, тобто P_3.

Приклад 3*

З десяти книжок чотири — підручники. Скількома способами можна поставити ці книжки на полицю так, щоб усі підручники стояли поряд один з одним?

Розв'язання	Коментар
▶ Спочатку будемо розглядати підручники, що стоять поряд, як одну книжку. Тоді на полиці потрібно розставити не 10, а 7 книжок. Це можна зробити P_7 способами. У кожному з одержаних наборів книжок ще можна виконати P_4 перестановок підручників. За правилом добутку шукана кількість способів дорівнює: $P_7 \cdot P_4 = 7! \cdot 4! = 5040 \cdot 24 = 120\,960$. ◁	Задачу можна розв'язувати у два етапи. На першому етапі умовно будемо вважати всі підручники за 1 книжку. Тоді одержимо 7 книжок (6 не підручників + 1 умовна книжка-підручник). Порядок розміщення елементів ураховується, і використовуються всі елементи (поставити на полицю потрібно всі книжки). Отже, відповідна сполука — це перестановки з 7 елементів. Їх кількість — P_7. На другому етапі розв'язування будемо переставляти між собою тільки підручники. Це можна зробити P_4 способами. Оскільки нам потрібно переставити і підручники, й інші книжки, то використовуємо правило добутку.

Запитання

1. Поясніть, що називається перестановкою з n елементів без повторень. Наведіть приклади.
2. Запишіть формулу для обчислення числа перестановок з n елементів без повторень. Наведіть приклади її використання.
3*. Обґрунтуйте формулу для обчислення числа перестановок з n елементів без повторень.

Вправи

11.2.1. Скількома способами 4 людини можуть розміститися на чотиримісній лавці?

11.2.2. Кур'єр повинен рознести пакети в 7 різних установ. Скільки маршрутів він може вибрати?

11.2.3. Скільки існує виразів, тотожно рівних добутку $abcde$, що одержуються з нього перестановкою множників?

11.2.4. Ольга пам'ятає, що телефон подруги закінчується цифрами 5, 7, 8, але забула, у якому порядку ці цифри розміщено. Укажіть найбільше число варіантів, що їй доведеться перебрати, щоб зателефонувати подрузі (якщо вона пам'ятає всі інші цифри номера).

11.2.5. Скільки шестицифрових чисел (без повторення цифр) можна скласти з цифр:

1) 1, 2, 5, 6, 7, 8;
2) 0, 2, 5, 6, 7, 8?

11.2.6. Скільки серед чотирицифрових чисел, складених із цифр 3, 5, 7, 9 (без повторення цифр), є таких, що:

1) починаються з цифри 3;
2) кратні 5?

11.2.7. Знайдіть суму цифр усіх чотирицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 3, 5, 7 (без повторення цифр у числі).

11.2.8. У розкладі на понеділок шість уроків: алгебра, геометрія, іноземна мова, історія, фізкультура, хімія. Скількома способами можна скласти розклад уроків на цей день так, щоб два уроки математики стояли поспіль?

11.2.9. Скількома способами можна розставити на полиці 12 книжок, із яких 5 книжок — це збірники віршів, так, щоб збірники стояли поряд у довільному порядку?

11.2.10. Визначте, скількома способами 5 хлопчиків і 5 дівчаток можуть зайняти в театрі в одному ряді місця з 1 по 10. Скількома способами вони можуть це зробити, якщо хлопчики будуть сидіти на непарних місцях, а дівчатка — на парних?

11.3. Комбінації

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Означення. ***Комбінацією без повторень з n елементів по k*** **називається будь-яка k-елементна підмножина заданої n-елементної множини.**

Наприклад, з множини $\{a, b, c, d\}$ можна скласти такі комбінації без повторень з трьох елементів: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

Кількість комбінацій без повторень з n елементів по k позначають символом C_n^k (читають: «число комбінацій з n по k» або «це із n по k»). Як бачимо, $C_4^3 = 4$.

Кількість комбінацій без повторень з n елементів по k позначають символом C_n^k.
C — перша літера французького слова *combinaison* — комбінація.

З'ясуємо, скільки всього можна скласти комбінацій без повторень з n елементів по k. Для цього використаємо відомі нам формули числа розміщень і перестановок.

Складання розміщення без повторень з n елементів по k проведемо у два етапи. Спочатку виберемо k різних елементів із заданої n-елементної множини, не враховуючи порядок вибору цих елементів (тобто виберемо k-елементну підмножину з n-елементної множини — комбінацію без повторень з n елементів по k). За нашим позначенням це можна зробити C_n^k способами. Після цього одержану множину з k різних елементів упорядкуємо. Її можна впорядкувати $P_k = k!$ способами. Одержимо розміщення без повторень з n елементів по k. Отже, кількість розміщень без повторень з n елементів по k в $k!$ разів більша за число комбінацій без повторень з n елементів по k, тобто $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Звідси $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$. Ураховуючи, що за формулою (2) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ (див. п. 11.2), одержуємо:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (3)$$

Наприклад, $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 4$, що збігається зі значенням, одержаним вище.

Використовуючи формулу (3), легко обґрунтувати *властивість 1 числа комбінацій без повторень*, наведену в табл. 15.

1) Оскільки

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!((n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k, \text{ то}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (4)$$

Для того щоб формулу (4) можна було використовувати і при $k = n$, домовилися вважати, що $C_n^0 = 1$. Тоді за формулою (4) $C_n^n = C_n^0 = 1$.

Зауважимо, що формулу (4) можна отримати без обчислень за допомогою досить простих комбінаторних міркувань.

Коли ми вибираємо k предметів із n, то $n-k$ предметів ми залишаємо. Якщо ж, навпаки, вибрані предмети залишимо, а інші $n-k$ — виберемо, то одержимо спосіб вибору $n-k$ предметів із n. Зазначимо, що ми одержали *взаємно однозначну відповідність* способів вибору k і $n-k$ предметів з n. Отже, кількість тих і інших способів однакова. Але кількість одних C_n^k, а інших C_n^{n-k}, тому $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Якщо у формулі (3) скоротити чисельник і знаменник на $(n-k)!$, то отримаємо формулу, за якою зручно обчислювати C_n^k при малих значеннях k:

$$C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}^{k\ \text{множників}}}{k!} =$$

$$= \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}^{k\ \text{множників}}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot \dots \cdot k}_{k\ \text{множників}}}. \qquad (5)$$

Наприклад, $C_{25}^2 = \frac{\overbrace{25\cdot 24}^{2\ \text{множники}}}{1\cdot 2} = 25\cdot 12 = 300$,

$$C_8^3 \frac{\overbrace{8\cdot 7\cdot 6}^{3\ \text{множники}}}{1\cdot 2\cdot 3} = 8\cdot 7 = 56.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Зауважимо, що, як і раніше, для вибору формули під час розв'язування найпростіших комбінаторних задач достатньо відповісти на запитання:

- *чи враховується порядок розміщення елементів у сполуці;*
- *чи всі задані елементи входять до одержаної сполуки?*

Але для з'ясування того, що задана сполука є комбінацією, достатньо відповісти тільки на перше запитання (див. схему в табл. 15). Якщо порядок розміщення елементів не враховується, то за означенням це комбінація з n елементів по k.

Приклад 1

Із 12 членів туристичної групи потрібно вибрати 3 чергових. Скількома способами можна зробити цей вибір?

Розв'язання	Коментар
▶ Кількість способів вибрати з 12 туристів 3 чергових дорівнює кількості комбінацій із 12 елементів по 3, тобто $C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220$. ◁	Для вибору відповідної формули з'ясовуємо відповіді на запитання, наведені вище. Оскільки порядок розміщення елементів не враховується (для чергових не важливо, у якому порядку їх виберуть), то відповідна сполука є комбінацією з 12 елементів по 3. Для обчислення можна використати формули (3) або (5), у даному випадку застосували формулу (3): $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Приклад 2

З вази з фруктами, у якій лежить 10 різних яблук і 5 різних груш, потрібно вибрати 2 яблука і 3 груші. Скількома способами можна зробити такий вибір?

Розв'язання	Коментар
▶ Вибрати 2 яблука з 10 можна C_{10}^2 способами. При кожному виборі яблук груші можна вибрати C_5^3 способами. Тоді за правилом добутку вибір потрібних фруктів можна виконати $C_{10}^2\cdot C_5^3$ способами. Одержуємо: $C_{10}^2\cdot C_5^3 = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 450$. ◁	Спочатку окремо виберемо 2 яблука з 10 і 3 груші з 5. Оскільки при виборі яблук чи груш порядок розміщення елементів не враховується, то відповідні сполуки — комбінації без повторень. Ураховуючи, що потрібно вибрати і 2 яблука, і 3 груші, використовуємо правило добутку й перемножуємо одержані можливості вибору яблук $\left(C_{10}^2\right)$ і груш $\left(C_5^3\right)$.

Запитання

1. Поясніть, що називається комбінаціями з n елементів по k без повторень. Наведіть приклади.
2. Запишіть формулу для обчислення числа комбінацій з n елементів по k без повторень. Наведіть приклади її використання.
3*. Обґрунтуйте формулу для обчислення числа комбінацій з n елементів по k без повторень.
4*. Обґрунтуйте властивість $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.
5. Поясніть на прикладах, як можна вибирати відповідну формулу під час розв'язування найпростіших комбінаторних задач.

Звернувшись до інтернет-підтримки підручника, ви можете дізнатися, як використовувати розглянуті формули числа комбінацій для запису бінома Ньютона — формули $(a+b)^n$.

Вправи

11.3.1°. У класі 7 учнів успішно навчаються математики. Скількома способами можна вибрати з них двох учнів для участі в математичній олімпіаді?

11.3.2°. У магазині «Філателія» продають 8 різних наборів марок на спортивну тематику. Скількома способами можна вибрати з них 3 набори?

11.3.3°. Учням дали список із 10 книжок, що рекомендовано прочитати під час канікул. Скількома способами учень може вибрати з них 6 книжок?

11.3.4. На полиці стоїть 12 книжок: англо-український словник і 11 художніх творів англійською мовою. Скількома способами читач може вибрати 3 книжки, якщо:
1) словник потрібний йому обов'язково;
2) словник йому не потрібний?

11.3.5°. У класі навчаються 16 хлопчиків і 12 дівчаток. Для прибирання території потрібно виділити чотирьох хлопчиків і трьох дівчаток. Скількома способами це можна зробити?

11.3.6. Під час зустрічі 16 осіб потисли одне одному руки. Скільки всього зроблено рукостискань?

11.3.7. Група учнів з 30 осіб вирішила обмінятися фотокартками. Скільки всього фотокарток потрібно було для цього?

11.3.8°. Скільки перестановок можна зробити з букв слова ХАРКІВ?

11.3.9°. Із 12 робітників-бурильників потрібно відрядити 5 для роботи в сусідній області. Скількома способами можна утворити таку бригаду для відрядження?

11.3.10. Скількома різними способами збори, на яких присутні 40 осіб, можуть обрати з числа своїх учасників голову зборів, його заступника та секретаря?

11.3.11. Скільки прямих ліній можна провести через 8 точок, з яких ніякі три не лежать на одній прямій? (Кожна пряма має проходити через дві задані точки.)

11.3.12. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 без їх повторень?

11.3.13. Визначте число всіх діагоналей правильного:
1) п'ятикутника; 3) дванадцятикутника;
2) восьмикутника; 4) п'ятнадцятикутника.

11.3.14. Скільки різних трикольорових прапорів можна зробити, комбінуючи жовтий, чорний та червоний кольори? (Кожний прапор складається з трьох горизонтальних смуг.)

11.3.15. Скільки різних площин можна провести через 10 точок, якщо ніякі чотири точки не лежать в одній площині?

11.3.16*. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна написати за допомогою цифр 0, 2, 4, 6, 8 без їх повторень?

11.3.17. Скільки існує перестановок із цифр 1, 2, 3, 4, 5 таких, що не починаються цифрою 5? числом 12? числом 123?

11.3.18. Скільки існує комбінацій із 10 букв a, b, c, ... по 4 таких, що не містять букви a? букв a і b?

11.3.19. Скільки розміщень із 12 букв a, b, c, ... по 5 таких, що не містять букви a? букв a і b?

11.3.20*. Скільки треба взяти елементів, щоб число розміщень із них по 4 було у 12 разів більшим, ніж число розміщень із них по 2?

У завданнях 11.3.21–11.3.25 розв'яжіть рівняння.

11.3.21. 1) $A_x^2 = 42$; 3) $A_{x+1}^2 = 30$;
2) $A_x^3 = 56x$; 4) $5C_x^3 = C_{x+2}^4$.

11.3.22. 1) $C_{x-3}^2 = 21$; 3) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$;
2) $C_x^3 = \dfrac{5x(x-3)}{4}$; 4) $C_x^4 = \dfrac{15A_x^2}{4}$.

11.3.23*. 1) $\dfrac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$; 3) $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$;
2) $\dfrac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89$; 4) $C_{x+1}^5 = \dfrac{3A_x^3}{8}$.

11.3.24*. 1) $\dfrac{A_x^4 P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$; 3) $\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n P_{x-n}} = 132$;
2) $\dfrac{A_{x+1}^{n+1} P_{x-n}}{P_{x-1}} = 90$; 4) $\dfrac{A_{x+2}^{n+2} P_{x-n}}{P_x} = 110$.

11.3.25*. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 10, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = \dfrac{5}{3}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} C_x^y : C_x^{y+2} = 1, \\ C_x^2 = 153; \end{cases}$

2) $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2{,}5x, \\ C_{x-1}^y = 10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 8, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = 1{,}6. \end{cases}$

§ 12 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

12.1. Поняття випадкової події. Класичне означення ймовірності

Таблиця 16

1. Випадкові події	
Поняття	**Приклади**
Під *експериментами з випадковими результатами* (або, коротше, *випадковими експериментами*) розуміють різні експерименти, досліди, випробовування, спостереження, виміри, результати яких залежать від випадку і які можна повторити багато разів в однакових умовах.	Експерименти з рулеткою, підкиданням грального кубика, підкиданням монети, серія пострілів одного стрільця по одній і тій самій мішені, участь у лотереї тощо.
Будь-який результат випадкового експерименту називають *випадковою подією*. Унаслідок такого експерименту ця подія може або відбутися, або не відбутися. Випадкові події зазвичай позначають великими літерами латинського алфавіту: A, B, C, D, ...	Випадання «герба», випадання «числа» при підкиданні монети; виграш у лотерею; випадання певної кількості очок при підкиданні грального кубика тощо.
2. Поняття, пов'язані з випадковими подіями в деякому експерименті	
Події B_1, B_2, ..., B_n називають *рівноможливими*, якщо в даному експерименті немає ніяких підстав вважати, що одна з них може відбутися переважніше за будь-яку іншу.	В експерименті з одноразового підкидання однорідної монети правильної форми рівноможливими є події: A — випав «герб», B — випало «число».
Події A і B називають *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися одночасно в даному експерименті.	В експерименті з підкидання монети події A — випав «герб» і B — випало «число» — несумісні.
Події C_1, C_2, ..., C_n називають *несумісними*, якщо кожна пара з них несумісна в даному експерименті.	Для експерименту з підкидання грального кубика події C_1 — випадання 1 очка, C_2 — випадання 3 очок, C_3 — випадання 5 очок, C_4 — випадання парного числа очок — несумісні.
Подію U називають *вірогідною*, якщо в результаті даного експерименту вона обов'язково відбудеться.	Випадання менше 7 очок при підкиданні звичайного грального кубика (на гранях якого позначено від 1 до 6 очок).
Подію $\varnothing$ називають *неможливою*, якщо вона не може відбутися в даному експерименті.	Випадання 7 очок при підкиданні грального кубика.

3. Простір елементарних подій

Поняття	Приклад
Нехай результатом деякого випадкового експерименту може бути тільки одна з попарно несумісних подій u_1, u_2, ..., u_n. Назвемо ці події *елементарними подіями*, а множину всіх цих подій $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — *простором елементарних подій*.	1. Для експерименту з підкидання монети елементарними будуть події: u_1 — випав «герб», u_2 — випало «число». Тоді простір елементарних подій буде складатися з двох подій: $U = \{u_1, u_2\}$. (Ці події попарно несумісні, у результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій.)
Будь-яку підмножину простору елементарних подій U вважатимемо випадковою подією A.	2. Для експерименту з підкидання грального кубика елементарними можуть бути події u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, де u_k — випадання k очок, $k = 1$, 2, 3, 4, 5, 6. У цьому випадку простір елементарних подій буде складатися з шести подій: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.

4. Класичне означення ймовірності (для рівноможливих елементарних подій)

Нехай задано простір елементарних подій, усі елементарні події якого — рівноможливі. *Ймовірність події A* — це відношення числа сприятливих для неї елементарних подій (m) до числа всіх рівноможливих елементарних подій (n) у даному експерименті: $P(A) = \frac{m}{n}$.	**Приклад.** Знайдіть імовірність випадання більше чотирьох очок при підкиданні грального кубика. ▶ Розглянемо як елементарні події шість рівноможливих результатів підкидання кубика — випало 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок (отже, $n = 6$). Подія A — випало більше 4 очок. Сприятливими для події A є тільки дві елементарні події — випало 5 або 6 очок (тобто $m = 2$). Тоді $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ◁

Ймовірність вірогідної (U) та неможливої ($\varnothing$) подій:

$P(U) = 1$ $\qquad$ $P(\varnothing) = 0$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Випадкові експерименти й випадкові події

Нам часто доводиться проводити різні спостереження, досліди, брати участь в експериментах або випробуваннях. Часто такі експерименти завершуються результатом, який заздалегідь передбачити неможливо. Наприклад, ми купуємо лотерейний квиток і не знаємо, виграємо чи ні; підкидаємо монету і не знаємо, що випаде — «число» чи «герб». Чи можна якимось чином оцінити шанси появи результату, який нас цікавить? Відповідь на це запитання дає розділ математики, що має назву *теорія ймовірностей*. Ми ознайомимося тільки з основами цієї теорії.

Одним з основних понять, які розглядаються в теорії ймовірностей, є поняття *експерименту з випадковими результатами*. Прикладом такого експерименту може бути підкидання монети суддею футбольного матчу перед його початком із метою визначення, яка з команд почне матч із центра поля.

Під експериментами з випадковими результатами (або, коротше, випадковими експериментами) розуміють різні експерименти, досліди, випробовування, спостереження, виміри, результати яких залежать від випадку і які можна повторити багато разів в однакових умовах. Наприклад, це серія пострілів одного стрільця по одній і тій самій мішені, участь у лотереї, витягання пронумерованих куль із коробки, експерименти з рулеткою, підкиданням грального кубика, підкиданням монети.

Будь-який результат випадкового експерименту називають *випадковою подією*. Унаслідок експерименту, який розглядається, ця подія може або відбутися, або не відбутися. Зазначимо, що для кожного випадкового експерименту зазвичай заздалегідь домовляються, які його результати розглядаються як елементарні події, а потім випадкова подія розглядається як підмножина отриманої множини (див. п. 3 табл. 16).

Надалі, як правило, будемо позначати випадкові події великими латинськими літерами: A, B, C, D, ...

Говорячи про випадкові події, будемо вважати, що вони пов'язані з одним конкретним випадковим експериментом.

Зауважимо, що багато важливих і потрібних фактів теорії ймовірностей спочатку були одержані за допомогою дуже простих експериментів. Велику роль у розвитку теорії ймовірностей як науки зіграли звичайні монети та гральні кубики. Але *ті монети й кубики, які розглядаються в теорії ймовірностей, є математичними óбразами справжніх монет і кубиків* (тому про них іноді говорять, що це математична монета й математичний гральний кубик).

Наприклад, *математична монета*, яку використовують у теорії ймовірностей, позбавлена багатьох якостей справжньої монети.

У *математичної монети* немає кольору, розміру, ваги та ціни. Вона не зроблена ні з якого матеріалу й не може служити платіжним засобом. Монета, з погляду теорії ймовірностей, має тільки дві сторони, одна з яких називається «герб», а інша — «число». Монету кидають, і вона падає однією зі сторін угору. Ніяких інших властивостей у математичної монети немає.

Математична монета вважається *симетричною*. Це означає, що кинута *на стіл монета має рівні шанси випасти «гербом» або «числом»*. При цьому мається на увазі, що ніякий інший результат кидання монети неможливий — вона не може загубитися, закотившись у куток і, тим більше, не може «стати на ребро».

Справжня металева монета служить лише ілюстрацією для математичної монети. Справжня монета може бути трохи ввігнутою, може мати інші дефекти, які впливають на результати кидання. Проте, щоб перевірити на практиці досліди з підкиданням математичної монети, ми кидаємо звичайну монету (без явних дефектів).

Гральний кубик також служить прекрасним засобом для ілюстрації випадкових подій. Розглянено *правильний (симетричний) кубик* — такий, що забезпечує однакові шанси випадання кожної грані. Для цього всі грані мають бути однакової площі, плоскими й однаково гладенькими. Кубик повинен бути саме кубічної форми, а його центр ваги має збігатися з геометричним центром. Вершини й ребра кубиків повинні бути правильної форми. Якщо вони округлені, то всі округлення мають бути однаковими. Отвори, які маркують кількість очок на гранях, повинні бути просвердлені на однакову глибину. Сума очок на протилежних гранях правильного кубика дорівнює 7 (рис. 12.1.1).

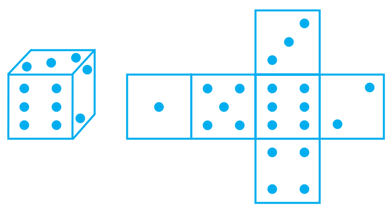


Рис. 12.1.1

Математичний гральний кубик, який обговорюється в теорії ймовірностей, — це *математичний образ правильного кубика*. Випадання всіх граней рівноможливе. Подібно до математичної монети, математичний кубик не має ні кольору, ні розміру, ні ваги, ні інших матеріальних якостей.

Гральний кубик має дивовижну історію. Гра з кубиками — одна з найдавніших. Вона була відома в глибокій давнині в Індії, Китаї, Лідії, Єгипті, Греції й Римі.

2 Деякі поняття, пов'язані з випадковими подіями

Нехай проведено якийсь випадковий експеримент. Як зазначалося вище, його результатами є деякі випадкові події. Унаслідок такого експерименту кожна з подій може або відбутися, або не відбутися. Ці події пов'язані з одним конкретним випадковим експериментом.

Означення. **Події називаються *рівноможливими*, якщо в даному експерименті немає ніяких підстав вважати, що одна з них може відбутися переважніше за будь-яку іншу.**

Наприклад, в експерименті з одноразового підкидання однорідної монети правильної форми рівноможливими є події: A — випав «герб», B — випало «число».

Означення. **Події A і B називаються *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися одночасно в даному експерименті.**

Так, в експерименті з одноразового підкидання монети події A — випав «герб» і B — випало «число» — несумісні.

Події C_1, C_2, ..., C_n називають *несумісними*, якщо кожна пара з них несумісна в даному експерименті. Для експерименту з підкидання грального кубика події: C_1 — випадання 1 очка, C_2 — випадання 2 очок, C_3 — випадання 3 очок, C_4 — випадання 4 очок, C_5 — випадання 5 очок, C_6 — випадання 6 очок — несумісні (і рівноможливі).

Означення. **Подія U називається *вірогідною*, якщо в результаті даного експерименту вона обов'язково відбудеться.**

Наприклад, випадання менше 7 очок при підкиданні грального кубика (на гранях якого позначено від 1 до 6 очок) є вірогідною подією.

Означення. **Подія $\varnothing$ називається *неможливою*, якщо вона не може відбутися в даному експерименті.**

Наприклад, випадання 7 очок при підкиданні грального кубика — неможлива подія.

3 Простір елементарних подій

Нехай результатом деякого випадкового експерименту може бути тільки одна з попарно несумісних подій u_1, u_2, ..., u_n. Назвемо їх *елементарними подіями*, а множину всіх цих подій $U=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ — *простором елементарних подій*.

Наприклад, для експерименту з підкидання монети елементарними подіями будуть: u_1 — випадання «герба», u_2 — випадання «числа». Тоді простір елементарних подій буде складатися з двох подій: $U=\{u_1, u_2\}$. (Ці події несумісні, і в результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій.)

Для експерименту з підкидання грального кубика елементарними подіями можуть бути: u_1 — випадання 1 очка, u_2 — випадання 2 очок, u_3 — випадання 3 очок, u_4 — випадання 4 очок, u_5 — випадання 5 очок, u_6 — випадання 6 очок. У цьому випадку простір елементарних подій буде складатися з шести подій: $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.

Будь-яку підмножину простору елементарних подій U вважатимемо випадковою подією A. Наприклад, для експерименту з підкидання грального кубика випадковою є подія A — випадання парної кількості очок, оскільки $A=\{u_2, u_4, u_6\}$ — підмножина U.

4 Класичне означення ймовірності

Нехай результатом деякого випадкового експерименту може бути одна й тільки одна з n попарно несумісних і рівноможливих елементарних подій $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (тобто простір U елементарних подій даного випадкового експерименту складається з рівноможливих елементарних подій $u_1, u_2, \ldots, u_n$). І нехай у даному експерименті подія A полягає в тому, що відбувається одна з m наперед виокремлених елементарних подій $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}$ тобто $A = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ (у цьому випадку говорять, що елементарні події $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}$ сприяють події A).

Ймовірність події A означимо як відношення числа m елементарних подій, що сприяють події A, до загального числа n елементарних подій у даному експерименті, тобто як відношення $\frac{m}{n}$.

Ймовірність події A звичайно позначають $P(A)$. Тоді

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Буква P — перша буква французького слова *probabilité* або латинського слова *probabilitas*, що в перекладі означає «ймовірність».

Цією рівністю виражається *класичне означення ймовірності*, яке можна сформулювати таким чином.

Означення. **Якщо розглядається простір рівноможливих елементарних подій, то *ймовірність події A* — це відношення числа сприятливих для неї елементарних подій до числа всіх рівноможливих елементарних подій у даному експерименті.**

Наприклад, в експерименті з підкидання монети рівноможливими елементарними подіями є дві $(n = 2)$ події: A — випав «герб» і B — випало «число». Події A сприяє тільки один випадок $(m = 1)$, тому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, що ймовірність події B також дорівнює $\frac{1}{2}$: $P(B) = \frac{1}{2}$. Отже, в експерименті з одноразового підкидання монети ймовірність випадання «герба» (або «числа») дорівнює $\frac{1}{2}$.

Аналогічно обґрунтовується, що в експерименті з підкидання грального кубика ймовірність події A_i — випало i очок ($i = 1$, 2, 3, 4, 5, 6) дорівнює $\frac{1}{6}$.

Обґрунтуйте це самостійно.

Зазначимо, що коли в будь-якому експерименті розглянути неможливу подію $\varnothing$, то немає елементарних подій, що сприяють цій події, тобто число елементарних подій, сприятливих для неї, дорівнює нулю $(m = 0)$, і тоді $P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0$.

Отже, **ймовірність неможливої події дорівнює 0.**

Наприклад, в експерименті з підкидання грального кубика ймовірність неможливої події A — випало 7 очок — дорівнює 0.

Якщо в будь-якому експерименті розглянути вірогідну подію U, то їй сприяють усі елементарні події в цьому експерименті $(m = n)$, і тоді $P(U) = \frac{n}{n} = 1$.

Отже, **ймовірність вірогідної події дорівнює 1.**

Наприклад, в експерименті з підкидання грального кубика подія A — випало 1 очко, або 2 очки, або 3 очки, або 4 очки, або 5 очок, або 6 очок — вірогідна й її ймовірність дорівнює 1.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ*

Приклад 1

Користуючись класичним означенням ймовірності, знайдемо ймовірність події A — випадання числа очок, кратного 3, при підкиданні грального кубика.

Розв'язання

▶ Як зазначалося вище, в експерименті з підкидання кубика існує шість попарно несумісних рівноможливих елементарних подій — випало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок (також можна сказати, що простір елементарних подій складається з шести вказаних попарно несумісних рівноможливих подій). Сприятливими для події A є тільки дві елементарні події: випало 3 очки і випало 6 очок. Отже, ймовірність події A дорівнює:

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$ ◁

Приклад 2

Петро й Павло кидають сірий і блакитний гральні кубики (рис. 12.1.2) і кожного разу підраховують суму очок, що випали. Вони домовилися, що у випадку, коли в черговій спробі в сумі випаде 8 очок, виграє Петро, а коли в сумі випаде 7 очок — виграє Павло. Чи є ця гра справедливою?

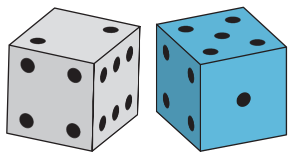


Рис. 12.1.2

Розв'язання

▶ При киданні кубиків на кожному з них може випасти 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок. Кожному числу очок, які випали на сірому кубику (1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок), відповідає шість варіантів числа очок, які випали на блакитному кубику. Отже, усього одержуємо 36 попарно несумісних рівноможливих елементарних подій — результатів цього експерименту, які наведено в таблиці:

$(1;1)$	$(2;1)$	$(3;1)$	$(4;1)$	$(5;1)$	$(6;1)$
$(1;2)$	$(2;2)$	$(3;2)$	$(4;2)$	$(5;2)$	$(6;2)$
$(1;3)$	$(2;3)$	$(3;3)$	$(4;3)$	$(5;3)$	$(6;3)$
$(1;4)$	$(2;4)$	$(3;4)$	$(4;4)$	$(5;4)$	$(6;4)$
$(1;5)$	$(2;5)$	$(3;5)$	$(4;5)$	$(5;5)$	$(6;5)$
$(1;6)$	$(2;6)$	$(3;6)$	$(4;6)$	$(5;6)$	$(6;6)$

(У кожній парі чисел на першому місці записано число очок, яке випало на сірому кубику, а на другому місці — число очок, що випало на блакитному кубику.)

Нехай подія A означає, що при киданні кубиків у сумі випало 8 очок, а подія B — що при киданні кубиків у сумі випало 7 очок. Для події A сприятливими є такі 5 результатів (елементарних подій):

$$(2;6),\ (3;5),\ (4;4),\ (5;3),\ (6;2).$$

Для події B сприятливими є такі 6 результатів (елементарних подій):

$$(1;6),\ (2;5),\ (3;4),\ (4;3),\ (5;2),\ (6;1).$$

Тоді

$$P(A)=\frac{5}{36},\quad P(B)=\frac{6}{36}.$$

Отже, в Павла більше шансів виграти, ніж у Петра. Тобто така гра не буде справедливою. ◁

* Коментар включено в запис розв'язання.

Зазначимо, що результати експерименту з підкидання двох гральних кубиків, наведені у прикладі 2, дозволяють обчислити ймовірності появи тієї або іншої суми очок, що випадають при підкиданні двох гральних кубиків.

Сума очок	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ймовірність	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Приклад 3*

Із 15 виготовлених велосипедів 3 виявилися з дефектами. Яка ймовірність того, що 2 велосипеди, вибрані навмання з цих п'ятнадцяти, будуть без дефектів?

Розв'язання

▶ Нехай подія A полягає в тому, що 2 вибрані навмання велосипеди будуть без дефектів. З 15 велосипедів вибрати 2 можна C_{15}^2 способами (число комбінацій із 15 по 2). Усі ці вибори є рівноможливими й попарно несумісними. Отже, загальна кількість рівноможливих результатів (тобто загальна кількість елементарних подій) дорівнює C_{15}^2.

Сприятливим результатом для події A є вибір 2 бездефектних велосипедів із 12 бездефектних $(15-3=12)$. Отже, число сприятливих результатів (подій) для події A дорівнює C_{12}^2. Звідси одержуємо

$$P(A)=\frac{C_{12}^2}{C_{15}^2}=\frac{\frac{12!}{2!(12-2)!}}{\frac{15!}{2!(15-2)!}}=\frac{12\cdot 11}{15\cdot 14}=\frac{22}{35}.$$ ◁

Приклад 4*

Група туристів, у якій 6 юнаків і 4 дівчини, вибирає за жеребкуванням чотирьох чергових. Яка ймовірність того, що буде вибрано 2 юнаки й 2 дівчини?

Розв'язання

▶ Число результатів (елементарних подій) при виборі чотирьох чергових із 10 туристів дорівнює C_{10}^4. Усі ці події рівноможливі й попарно несумісні.

Нехай подія A полягає в тому, що серед 4 чергових є 2 юнаки і 2 дівчини. Вибрати двох юнаків з 6 можна C_6^2 способами, а вибрати двох дівчат з 4 можна C_4^2 способами. За правилом добутку вибір і двох юнаків, і двох дівчат можна виконати $C_6^2\cdot C_4^2$ способами — це і є кількість сприятливих подій для події A. Тоді

$$P(A)=\frac{C_6^2\cdot C_4^2}{C_{10}^4}=\frac{\frac{6!}{2!(6-2)!}\cdot\frac{4!}{2!(4-2)!}}{\frac{10!}{4!(10-4)!}}=\frac{\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}}{\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}}=\frac{3}{7}.$$ ◁

Зауважимо, що залежно від задачі, яка розглядається, для одного й того самого експерименту простір елементарних подій можна вводити у різні способи. Найчастіше для цього незалежні елементарні події підбирають так, щоб подія, ймовірність якої потрібно знайти, сама була елементарною або виражалася через суму елементарних подій. Але для того щоб використати класичне означення ймовірності, потрібно бути впевненим, що всі виділені елементарні події — рівноможливі.

Наприклад, як уже зазначалось у задачі про підкидання грального кубика, простір елементарних подій може складатися з 6 незалежних рівноможливих подій — випадання 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок. Але якщо в задачі просять знайти ймовірність випадання парного числа очок, то простором елементарних подій для цього експерименту може бути множина тільки двох подій: u_1 — випадання парної кількості очок, u_2 — випадання непарної кількості очок (оскільки ці події попарно несумісні й у результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій). Ці події рівноможливі (оскільки серед чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 рівно половина парних і половина непарних). Отже, за класичним означенням ймовірність кожної з них дорівнює $\frac{1}{2}$. Звичайно, якби ми розглянули перший з указаних просторів елементарних подій, то теж змогли б розв'язати цю задачу: всього подій— 6, а сприятливих — 3 (випадання парного числа очок: 2, 4, 6). Тоді ймовірність випадання парного числа очок дорівнює $\frac{3}{6}$, тобто $\frac{1}{2}$.

Спробуємо ввести для розв'язування цієї задачі такий простір елементарних подій: u_1 — випадання парної кількості очок, u_2 — випадання 1 очка, u_3 — випадання 3 очок, u_4 — випадання 5 очок. Ці події дійсно утворюють простір елементарних подій експерименту з підкидання грального кубика, оскільки вони попарно несумісні й у результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій. Але, користуючись таким простором елементарних подій, ми не зможемо застосувати класичне означення ймовірності, оскільки, як ми вже бачили, вказані елементарні події не є рівноможливими: $P(u_1)=\frac{1}{2}$, $P(u_2)=\frac{1}{6}$, $P(u_3)=\frac{1}{6}$, $P(u_4)=\frac{1}{6}$.

Запитання

1. Поясніть, що таке випадковий експеримент та випадкова подія. Наведіть приклади.
2. Поясніть, які події вважають рівноможливими. Наведіть приклади рівноможливих та нерівноможливих подій. Які події вважають несумісними? Наведіть приклади.
3. Поясніть зміст класичного означення ймовірності. Наведіть приклади. Як позначають ймовірність події A?
4. Яку подію вважають вірогідною, а яку неможливою? Наведіть приклади. Чому дорівнюють ймовірності вірогідної та неможливої подій?

Вправи

12.1.1°. Укажіть, які з подій у наведених експериментах є вірогідними, які — неможливими, які — просто випадковими.

№	Експеримент	Подія
1	Виконання пострілу	Влучання в ціль
2	Нагрівання води (при звичайних умовах)	Вода перетворилася на лід
3	Участь у лотереї	Ви виграєте, беручи участь у лотереї
4	Участь у безпрограшній лотереї	Ви не виграєте, беручи участь у безпрограшній лотереї
5	Підкидання звичайного грального кубика	Випало 5 очок
6	Підкидання звичайного грального кубика	Випало менше 8 очок
7	Перевірка роботи дзвінка	Ви натиснули на кнопку дзвінка, а він не задзвонив
8	Витягання кулі з коробки з білими кулями	Витягли чорну кулю
9	Витягання кулі з коробки з білими кулями	Витягли білу кулю
10	Витягання двох куль із коробки з 10 білими й 5 чорними кулями	Витягли білу й чорну кулі
11	Витягання карти з колоди	Витягли туза

12.1.2. Наведіть по три приклади вірогідних, неможливих і просто випадкових подій. Приклади запишіть у вигляді таблиці (див. вправу 12.1.1).

12.1.3°. Відомо, що на 100 батарейок зустрічаються 3 бракованих. Яка ймовірність купити браковану батарейку?

12.1.4°. У магазині підрахували, що зазвичай із 1000 телевізорів виявляється 2 бракованих. Яка ймовірність того, що телевізор, вибраний навмання в цьому магазині, буде бракованим?

12.1.5°. За статистикою в місті N в середньому за рік з 1000 автомобілістів 2 потрапляють в аварію. Яка ймовірність того, що автомобіліст у цьому місті весь рік проїздить без аварій?

12.1.6°. Яка ймовірність того, що в Києві сонце зійде на заході?

12.1.7°. Яка ймовірність того, що після 31 грудня настане 1 січня?

12.1.8°. У пакеті лежать 20 зелених і 10 жовтих груш. Яка ймовірність вийняти з пакета грушу? Яка ймовірність вийняти з пакета яблуко?

12.1.9°. До екзамену з вищої математики у технічному виші викладач підготував 24 білети. Студент Андрій не розібрався в одному білеті й дуже боїться його витягнути. Яка ймовірність того, що Андрію дістанеться «нещасливий» білет?

12.1.10°. На запитання вікторини було отримано 1250 листівок із правильними відповідями, у тому числі й ваша. Для визначення призера ведучий повинен навмання витягти одну листівку. Яка ймовірність того, що приз дістанеться вам?

12.1.11. У лотереї 10 виграшних квитків і 240 квитків без виграшу. Яка ймовірність виграти в цю лотерею, купивши один квиток?

12.1.12. *Задача Д'Аламбера*. Яка ймовірність того, що при двох підкиданнях монети хоча б один раз випаде «герб»?

12.1.13. За перемогу в телегрі Яна одержить головний приз — подорож, якщо за одну спробу вгадає, у якому з 12 секторів табло (рис. 12.1.3) захований приз. Яка ймовірність того, що Яна відправиться в подорож?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Рис. 12.1.3

12.1.14. У лотереї 100 квитків, з них 5 виграшних. Яка ймовірність програшу?

12.1.15. У кишені хлопчика лежать 6 монет (рис. 12.1.4). Яка ймовірність вийняти навмання монету:
1) з номіналом, що є парним числом;
2) з номіналом, що є з непарним числом;
3) з номіналом менше 20?

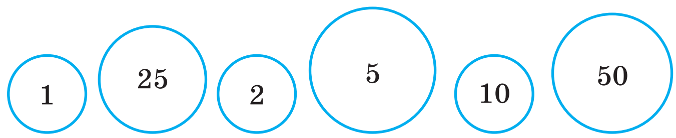


Рис. 12.1.4

12.1.16. На картці Суперлото (6 з 52) Данило позначив номери: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наталя на своїй картці позначила номери: 5, 12, 17, 23, 35, 49. Як ви думаєте, виграш якого набору чисел більш імовірний? Поясніть свою відповідь.

12.1.17. Ілля позначив у картці Суперлото (6 з 52) номери: 7, 11, 15, 29, 38, 40 — і виграв. Тоді він вирішив, що ця комбінація чисел щаслива і він буде відмічати її у всіх тиражах. Чи дійсно він збільшить свої шанси на виграш? Поясніть свою відповідь.

12.1.18. У сумці лежать 12 червоних, 10 зелених і 3 жовтих яблука.
1) Яблуко якого кольору ймовірніше всього вийняти навмання із сумки?
2) Яка ймовірність вийняти навмання:
а) яблуко; б) грушу; в) зелене яблуко; г) не червоне яблуко?

12.1.19. Ви виграєте, якщо куля, вийнята навмання з коробки, біла. Яку з коробок вигідніше вибрати для гри, щоб імовірність виграшу була більшою, якщо:
- у коробці А лежать 15 білих куль із 45;
- у коробці Б лежать 40 білих куль із 120;
- у коробці В лежать 22 білі кулі й 44 червоні;
- у коробці Г порівну білих, червоних і чорних куль.

12.1.20. Грані звичайного грального кубика пофарбовано в червоний і жовтий кольори. Ймовірність випадання червоної грані дорівнює $\frac{1}{6}$, ймовірність випадання жовтої грані дорівнює $\frac{5}{6}$. Скільки червоних і жовтих граней у кубика?

12.1.21. У коробці половина цукерок у червоних обгортках, третина — у синіх, інші — у зелених. Навмання вийняли одну цукерку. Обгортка якого кольору найменш імовірна в цієї цукерки? Знайдіть цю ймовірність.

12.1.22. У шухляді лежать 8 червоних, 2 синіх і 20 зелених олівців. Ви навмання виймаєте олівець.
1) Яка ймовірність того, що це:
   а) червоний олівець;
   б) жовтий олівець;
   в) не зелений олівець?
2) Яку найменшу кількість олівців потрібно вийняти, щоб з імовірністю, яка дорівнює 1, серед них був зелений олівець?

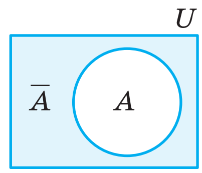
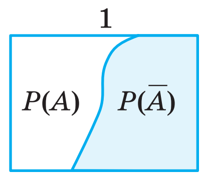
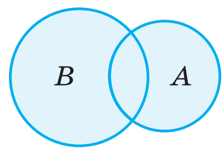
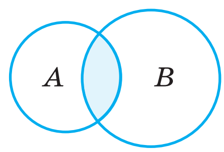
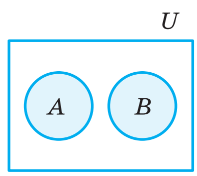
12.1.23. Кидають одночасно два гральні кубики. Яка ймовірність того, що сума очок буде дорівнювати 12?

12.1.24. На лавку довільним чином сідають двоє чоловіків і жінка. Яка ймовірність того, що чоловіки опиняться поруч?

12.1.25. Із 5 карток із буквами М, Р, О, А, Е навмання вибирають 4 картки. Знайдіть імовірність того, що, поклавши їх у ряд у тому порядку, в якому їх вибирали, одержать слово МОРЕ.

12.2. Операції над подіями. Властивості ймовірностей подій

Таблиця 17

Означення	Приклад	Теоретико-множинна ілюстрація
1. Протилежна подія		
Подія $\bar{A}$ називається *протилежною* до події A, якщо вона полягає в тому, що в розглянутому випадковому експерименті не відбувається подія A.	Подія A — випав «герб» при підкиданні монети, тоді подія $\bar{A}$ — не випав «герб» при підкиданні монети (тобто випало «число»).	
Ймовірність протилежної події: $P(\bar{A})=1-P(A)$	Якщо ймовірність купити справний прилад дорівнює 0,95, то ймовірність купити несправний прилад дорівнює $1-0{,}95=0{,}05$.	
2. Сума подій		
Сумою **(або *об'єднанням*) подій A і B називається подія $A+B$ (інше позначення $A\cup B$), яка полягає в тому, що відбувається подія A або подія B (або A, або B, або обидві події).**	З колоди карт навмання витягають одну карту. Розглянемо події: A — витягли бубнову карту, B — витягли чирвову карту. Тоді подія $A+B$ — витягли або бубнову, або чирвову карту (тобто карту червоної масті).	 $A+B$
3. Добуток подій		
Добутком **(або *перерізом*) подій A і B називається подія $A\cdot B$ (інше позначення $A\cap B$), яка полягає в тому, що відбуваються обидві події A і B.**	При підкиданні грального кубика розглядають події: A — випало парне число очок, B — випало число очок, кратне 3. Тоді подія $A\cdot B$ — випало число очок, яке одночасно і парне, і кратне 3 (тобто випало 6 очок).	 $A\cdot B$
4. Несумісні події		
Дві випадкові події A і B *несумісні тоді і тільки тоді*, коли їх добуток є неможливою подією, тобто $A\cdot B=\varnothing$ (інше позначення $A\cap B=\varnothing$).	При підкиданні грального кубика розглядають події: A — випало парне число очок, B — випало 1 очко, C — випало число очок, кратне 3. Події A і B та події B і C — ***несумісні*** **(*не можуть відбутися одночасно*).** Події A і C — ***сумісні*** **(*можуть відбутися одночасно*,** якщо випаде 6 очок, тобто $A\cdot C\neq\varnothing$).	 $A\cdot B=\varnothing$
5. Імовірність суми двох несумісних подій		
Якщо події A і B несумісні, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$, тобто *ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій*.		

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Іноді доводиться, знаючи ймовірності одних випадкових подій, обчислювати ймовірності інших, які є результатом певних операцій над першими. Розглянемо найпростіші операції над випадковими подіями, які далі будемо називати просто подіями.

1 Знаходження протилежної події

Нехай задана випадкова подія A.

Означення. **Подія $\bar{A}$ називається *протилежною* до події A, якщо вона полягає в тому, що в розглянутому випадковому експерименті не відбувається подія A.**

Наприклад, якщо подія A полягає в тому, що випав «герб» при підкиданні монети, то подія $\bar{A}$ (читається: «не A») означає, що «герб» не випав, а отже, випало «число» при підкиданні монети. Якщо подія B полягає в тому, що випало 1 очко при підкиданні грального кубика, то подія $\bar{B}$ означає, що 1 очко не випало, а отже, випало або 2, або 3, або 4, або 5, або 6 очок при підкиданні грального кубика.

● Ураховуючи, що в кожному експерименті відбувається одна й тільки одна з подій — A або $\bar{A}$, отримуємо, що в просторі рівноможливих елементарних подій сума кількості m елементарних подій, які сприяють події A, і кількості k елементарних подій, які сприяють події $\bar{A}$, дорівнює кількості n усіх елементарних подій: $m+k=n$. Тоді $\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=\frac{m+k}{n}=\frac{n}{n}=1$.

Отже, $P(A)+P(\bar{A})=1$. Звідси

$$P(\bar{A})=1-P(A).\ \bigcirc$$

Наприклад, розглянемо подію A — випало 1 очко при підкиданні грального кубика. Тоді, як було зазначено вище, подія $\bar{A}$ — 1 очко не випало (тобто випало або 2, або 3, або 4, або 5, або 6 очок). Як було показано в п. 12.1, імовірність події A дорівнює $\frac{1}{6}$, тобто $P(A)=\frac{1}{6}$, тоді ймовірність події $\bar{A}$ дорівнює $P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

При означенні операцій суми і добутку подій розглядатимемо події, що відносяться до одного випадкового експерименту.

2 Знаходження суми подій

Нехай задано дві випадкові події A і B.

Означення. ***Сумою* (або *об'єднанням*) подій A і B називається подія $A+B$ (інше позначення $A \cup B$), яка полягає в тому, що відбувається подія A або подія B (або A, або B, або обидві події).**

Наприклад, нехай при підкиданні грального кубика події A і B означають: A — випаде парна кількість очок, B — випаде число очок, яке ділиться на 3. Тоді подія $A+B$ означає, що випаде або парна кількість очок, або число очок, яке ділиться на 3, тобто випаде 2, 3, 4 або 6 очок.

Аналогічно вводиться поняття суми декількох подій.

Означення. ***Сумою* (або *об'єднанням*) подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називається подія $A_1+A_2+\ldots+A_n$ (інше позначення $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$), яка полягає в тому, що відбувається хоча б одна з даних подій.**

3 Знаходження добутку подій

Нехай задано дві випадкові події A і B.

Означення. ***Добутком* (або *перерізом*) подій A і B називається подія $A \cdot B$ (інше позначення $A \cap B$), яка полягає в тому, що відбуваються обидві події A і B.**

У наведеному вище прикладі подія $A \cdot B$ означає, що випаде і парна кількість очок, і число очок, яке ділиться на 3, тобто випаде 6 очок.

Аналогічно вводиться поняття добутку декількох подій.

Означення. ***Добутком*** **(або *перерізом*) *подій* A_1, A_2, ..., A_n називається подія $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ (інше позначення $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$), яка полягає в тому, що відбуваються всі задані події: і A_1, і A_2, ..., і A_n.**

Зауваження. Означення операцій над подіями аналогічні відповідним означенням операцій над множинами (тому й позначення операцій над подіями збігаються з позначеннями операцій над множинами). Операції над подіями (як і операції над множинами) зручно ілюструвати за допомогою кругів Ейлера — Венна (рис. 12.2.1–12.2.3).

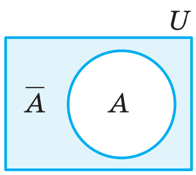


Рис. 12.2.1

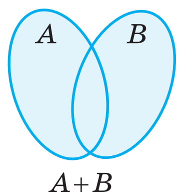


Рис. 12.2.2

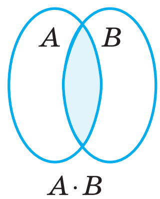


Рис. 12.2.3

Наприклад, ураховуючи, що завжди виконується або подія A, або подія $\bar{A}$, одержуємо, що $A + \bar{A} = U$ (вірогідна подія). Ураховуючи, що одночасно події A і $\bar{A}$ не можуть виконуватися, маємо $A \cdot \bar{A} = \varnothing$ (неможлива подія). Тоді подію $\bar{A}$ можна проілюструвати доповненням множини A (до множини U) (рис. 12.2.1).

Аналогічно суму двох подій A і B (нагадаємо, що подія $A + B$ полягає в тому, що відбувається подія A, або подія B, або обидві разом) можна проілюструвати у вигляді об'єднання множин A і B (рис. 12.2.2), а добуток подій A і B (подія $A \cdot B$ полягає в тому, що відбуваються обидві події A і B) — у вигляді перерізу множин A і B (рис. 12.2.3).

4 Властивості ймовірностей подій

Імовірності подій мають такі **властивості**.

1) Імовірність будь-якої події A задовольняє нерівність

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

2) Імовірність вірогідної події U дорівнює 1:

$$P(U) = 1.$$

3) Імовірність суми несумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Справді, з означення, наведеного в п. 12.1, випливає, що ймовірність $P(A)$ (тобто дріб $\frac{m}{n}$) невід'ємна і не більша за 1. Вона дорівнює нулю для неможливої події й одиниці для вірогідної події.

Щоб обґрунтувати властивість 3, уточнимо поняття несумісних подій, спираючись на введені операції над подіями. З означення несумісних подій одержуємо: **дві випадкові події A і B *несумісні* тоді й тільки тоді, коли їх добуток є неможливою подією, тобто $A \cdot B = \varnothing$ (інше позначення $A \cap B = \varnothing$).**

Наприклад, при підкиданні грального кубика можуть відбутися події: A — випало парне число очок, B — випало 5 очок. Ці події несумісні, оскільки 5 — непарне число; тому подія $A \cdot B$, яка полягає в тому, що випало парне число очок і це 5 очок, — неможлива.

Розглянемо несумісні події A і B у просторі з n рівноможливих елементарних подій. Нехай m — кількість елементарних подій, що сприяють події A, і k — кількість елементарних подій, що сприяють події B. Оскільки події A і B несумісні, то елементарні події, які сприяють події A, відмінні від елементарних подій, які сприяють події B, тоді події $A+B$ сприяють $m+k$ елементарних подій. Маємо:

$$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B).$$

Отже, **для несумісних подій A і B** виконується рівність

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (1)$$

Тобто **ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.**

Формулу (1) можна узагальнити.

Назвемо події $A_1+A_2+\ldots+A_n$ *несумісними*, якщо будь-які дві з цих подій A_i і A_j (при $i \neq j$) несумісні, тобто їх добуток є неможливою подією:

$$A_i \cdot A_j=\varnothing.$$

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несумісні, то з рівності (1) випливає, що

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n),$$

тобто *ймовірність суми несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій*. (Для обґрунтування цієї властивості достатньо використати метод математичної індукції.)

Зазначимо, що для несумісних подій A і B ймовірність $P(A \cdot B)=0$ (оскільки $A \cdot B=\varnothing$).

Спираючись на розглянуті основні властивості, можна довести інші властивості ймовірностей подій.

Покажемо, що для довільних подій A і B виконується рівність

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B). \qquad (2)$$

Позначимо через $A \setminus B$ подію, яка полягає в тому, що подія A відбувається, а подія B не відбувається.

Оскільки події A і $B \setminus A \cdot B$ несумісні й $A+B=A+(B \setminus A \cdot B)$, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B \setminus A \cdot B). \qquad (3)$$

Аналогічно, оскільки події $B \setminus A \cdot B$ і $A \cdot B$ несумісні й очевидно, що $B=(B \setminus A \cdot B)+A \cdot B$, то

$$P(B)=P(B \setminus A \cdot B)+P(A \cdot B). \qquad (4)$$

Виразимо з рівності (4) значення $P(B \setminus A \cdot B)$ і підставимо його в рівність (3). Одержимо рівність (2).

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад

З колоди, яка містить 36 гральних карт, навмання виймають одну карту. Яка ймовірність того, що буде вийнята козирна карта або дама?

Розв'язання

Нехай подія A полягає в тому, що вийнята козирна карта, подія B — вийнята дама. Тоді подія $A+B$ — вийнята козирна карта або дама, а подія $A \cdot B$ — вийнята козирна дама.

Ураховуючи, що $P(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$, $P(A \cdot B)=\frac{1}{36}$, за формулою (2) одержуємо

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{36}=\frac{1}{3}.$$

Запитання

1. Поясніть, яка подія називається протилежною до події A. Наведіть приклади.
2. Як знайти ймовірність протилежної події, знаючи ймовірність події A? Чому дорівнює ймовірність події $\bar{A}$, якщо $P(A)=0,6$?
3. Яка подія називається сумою (або об'єднанням) подій A і B? Наведіть приклади.
4. Яка подія називається добутком (або перерізом) подій A і B? Наведіть приклади.
5. Які дві події називаються несумісними? Наведіть приклади.
6. а) Чому дорівнює ймовірність суми двох несумісних подій?
   б*) Обґрунтуйте відповідну формулу.
7. Які три (або більше) події вважаються несумісними? Як обчислюється ймовірність суми декількох несумісних подій?

Вправи

12.2.1. Проводиться експеримент із підкидання двох монет. Розглядаються такі події: A — випав «герб» на першій монеті, B — випало «число» на першій монеті, C — випав «герб» на другій монеті, D — випало «число» на другій монеті. Що означають події:

1) $A+C$;	4) $B\cdot D$;
2) $A\cdot C$;	5) $\bar{A}$;
3) $B+C$;	6) $\bar{B}\cdot D$?

12.2.2. Проводиться експеримент із підкидання кубика. Розглядаються такі події: A — випала парна кількість очок, B — випала непарна кількість очок, C — випало 3 очки, D — випало число очок, менше 4. Що означають події:

1) $\bar{A}$;	4) $B\cdot C$;
2) $A+C$;	5) $B\cdot D$;
3) $A\cdot D$;	6) $B\cdot \bar{D}$?

Знайдіть імовірність кожної з цих подій.

12.2.3*. Користуючись означеннями операцій над подіями, обґрунтуйте справедливість рівності:

1) $A+U=U$;	4) $A\cdot \bar{A}=\varnothing$;
2) $A+A=A$;	5) $A+\varnothing=A$;
3) $A+\bar{A}=U$;	6) $A\cdot\varnothing=\varnothing$.

12.2.4. М'яч тричі кидають у баскетбольний кошик. Події A_1, A_2, A_3 означають: A_1 — при першому кидку м'яч улучив у кошик, A_2 — при другому кидку м'яч улучив у кошик, A_3 — при третьому кидку м'яч улучив у кошик. Запишіть через події A_1, A_2, A_3 таку подію:

1) B — м'яч улучив у кошик усі три рази;

2) C — м'яч жодного разу не влучив у кошик;

3) D — м'яч хоча б один раз улучив у кошик;

4) K — м'яч улучив у кошик тільки при першому кидку;

5) M — м'яч улучив у кошик тільки при другому та третьому кидках.

12.2.5. Для експерименту з підкидання кубика вкажіть, які з наведених подій є попарно несумісними: A — випала парна кількість очок, B — випала непарна кількість очок, C — випало 3 очка, D — випало менше 3 очок, K — випала кількість очок, кратна 3, M — випало 6 очок, T — випало більше 4 очок, F — випало число очок, менше 7.

12.2.6. Для експерименту з витягання карт із колоди вкажіть, які з наведених подій є попарно несумісними: A — витягли карту чирвової масті, B — витягли карту бубнової масті, C — витягли короля, D — витягли даму, K — витягли карту, старшу за валета, M — витягли карту з числовими позначеннями.

12.2.7. Є 16 гральних карт: 4 валети, 4 дами, 4 королі, 4 тузи. З цих 16 карт навмання виймають одну карту. Яка ймовірність того, що буде вийнята козирна карта або туз?

12.2.8. З колоди, яка містить 52 гральні карти, навмання виймають одну карту. Яка ймовірність того, що буде вийнята козирна карта або король?

12.3. Відносна частота випадкової події. Статистичне означення ймовірності. Аксіоматичне означення ймовірності

Таблиця 18

1. Частота й відносна частота випадкової події

Якщо випадковий експеримент проведено n разів і в $n(A)$ випадків відбулася подія A, то число $n(A)$ називають *частотою події* A.

Відносною частотою випадкової події називають відношення числа появ цієї події до загального числа проведених експериментів, тобто відношення $\frac{n(A)}{n}$.

Подія A — випадання «герба» при підкиданні монети.

Показник	Експериментатори*		
	Бюффон	Пірсон	Пірсон
Кількість експериментів n	4040	12 000	24 000
Частота $n(A)$	2048	6019	12 012
Відносна частота	0,5069	0,5016	0,5005

2. Статистичне означення ймовірності

Якщо при проведенні великої кількості випадкових експериментів, у кожному з яких може відбутися або не відбутися подія A, значення відносної частоти події A близькі до деякого певного числа (яке залежить тільки від виду події A і не залежить від серії експериментів), то це число називається *ймовірністю випадкової події* A. Його позначають $P(A)$.

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

Подія A — випав «герб» при підкиданні монети.

$$P(A) = 0{,}5$$

3. Аксіоми теорії ймовірностей

Ймовірність — це функція $P(A)$, означена на множині U всіх подій, що визначаються даним експериментом, яка задовольняє такі умови:

1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ для будь-якої події A з U;
2) $P(A) = 1$, якщо A — вірогідна подія;
3) $P(A+B) = P(A) + P(B)$, якщо події A і B несумісні.

Ці три умови називають *аксіомами теорії ймовірностей*.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Частота й відносна частота випадкової події. Статистичне означення ймовірності

Нехай у результаті випадкового експерименту може відбутися подія A, яка має ймовірність $p = P(A)$, де $0 < p < 1$. Повторимо експеримент n разів, і нехай при цьому подія A відбудеться m разів. Число m називають *частотою події* A (її часто позначають $n(A)$), а число $\frac{n(A)}{n} = \frac{m}{n}$ називають *відносною частотою події* A.

* Жорж Луї де Бюффон (1707–1782) — французький математик і природознавець, Карл Пірсон (1857–1936) — англійський математик і біолог. Їхні праці сприяли розвитку теорії ймовірностей і математичної статистики.

Означення. ***Відносною частотою випадкової події*** **називається відношення числа появ цієї події до загального числа проведених експериментів.**

Розглянемо результати експериментів з підкидання монети, які були проведені математиками Ж. Бюффоном і К. Пірсоном (п. 1 табл. 18). Як видно з таблиці, відносна частота випадання «герба», одержана в експериментах Бюффона й Пірсона, мало відрізняється від імовірності випадання «герба» в указаному експерименті, яка дорівнює 0,5 (див. п. 12.1).

Той факт, що ймовірність появи «герба» дорівнює 0,5, звичайно, не означає, що в будь-якій серії експериментів «герб» з'явиться точно в половині випадків. Але якщо число експериментів достатньо велике, ми можемо дати прогноз, що «герб» випаде приблизно в половині випадків. Отже, знаючи ймовірність події, ми можемо прогнозувати частоту появи цієї події в майбутньому при великій кількості відповідних експериментів.

Одержаний результат відображає такий факт: *при великій кількості експериментів відносна частота події, як правило, мало відрізняється від імовірності цієї події*. Цю закономірність називають *статистичною стійкістю відносних частот*.

Не завжди вдається визначити ймовірність p події апріорі, як це має місце з підкиданням монети або грального кубика. Але якщо можливо повторити експеримент n разів, то при великому n відносна частота події $\frac{m}{n}$ може розглядатися як наближене значення ймовірності цієї події $\left(\frac{m}{n} \approx p\right)$.

> Апріорі — від лат. *apriori* — незалежно від досвіду.

Одержимо так зване *статистичне означення ймовірності*. Більш точно його можна сформулювати у такий спосіб:

Означення. **Якщо при проведенні великої кількості випадкових експериментів, у кожному з яких може відбутися або не відбутися подія A, значення відносної частоти події A близькі до деякого певного числа (яке залежить тільки від виду події A і не залежить від серії експериментів), то це число називається *ймовірністю випадкової події A*.**

Статистична оцінка ймовірності подій з використанням відносної частоти події широко застосовується у фізиці, біології, соціології, економіці та в повсякденному житті кожної людини. Наведемо приклад використання такої оцінки. Згідно із Законом України «Про обов'язкове страхування цивільно-правової відповідальності власників наземних транспортних засобів» кожен власник автомобіля повинен укласти договір з якою-небудь уповноваженою страховою компанією. За цим договором власник машини платить компанії певну суму, а компанія натомість зобов'язується компенсувати (до певної межі) той збиток, який може бути нанесений цим автовласником іншому автовласнику, міській власності або пішоходам. Щоб по справедливості вирішити, хто й скільки повинен платити, треба врахувати дві обставини: 1) з якою ймовірністю автомобіль (протягом терміну страхування) може потрапити в аварію; 2) який у середньому збиток оточуючим завдає одна аварія. Знаючи це, можна обчислити страхові внески. Зокрема, ймовірність випадкової події «протягом року автомобіль потрапляє в аварію» була обчислена за статистичними даними, які мали у своєму розпорядженні страхові компанії та інші відповідальні організації. Виявилася, що ця ймовірність приблизно дорівнює 0,015.

2 Аксіоми теорії ймовірностей

Нагадаємо, що наведене в п. 12.1 означення ймовірності подій називають *класичним означенням ймовірності*.

Існує ще й *аксіоматичне означення ймовірності*, у якому означення ймовірності задається переліком її властивостей. При аксіоматичному означенні ймовірність задається як числова функція $P(A)$, визначена на множині U усіх подій, що визначаються даним експериментом, тобто кожній події ставиться у відповідність число $P(A)$, яке задовольняє такі умови:

1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ для будь-якої події A з U;

2) $P(A)=1$, якщо A — вірогідна подія;

3) $P(A+B)=P(A)+P(B)$, якщо події A і B несумісні.

Теорію, що вивчає ймовірність подій лише для експериментів зі скінченним числом результатів, називають *елементарною теорією ймовірностей*. Звичайно, існують і експерименти з нескінченним числом можливих подій. Теорію, що вивчає ймовірність таких подій, називають *загальною теорією ймовірностей*.

У загальній теорії ймовірностей умову 3 розуміють в розширеному сенсі:

$$P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots .$$

Умови 1–3 називають *аксіомами Колмогорова теорії ймовірностей*. Саме А. М. Колмогоров у 1933 р. вперше запропонував аксіоматичну побудову теорії ймовірностей.

Аксіоматична побудова теорії ймовірностей аналогічна аксіоматичній побудові геометрії, в якій замість реальних об'єктів чи їх зображень на папері (точок, прямих, площин тощо) розглядаються ідеальні поняття (точок, прямих, площин тощо), що задовольняють певні аксіоми планіметрії і стереометрії.

При аксіоматичній побудові теорії ймовірностей поняття «випадкова подія», «ймовірність» тощо — це математичні ідеальні поняття, які задовольняють умови 1–3. Пояснимо сутність аксіоматичної побудови теорії ймовірностей, використовуючи як ілюстрацію приклад із витяганням куль із коробки.

Нехай у деякій коробці U є n однакових куль, які у деякий спосіб позначені так, щоб їх можна було відрізнити одну від одної (наприклад, перенумеровані, як у телевізійних розіграшах лотерей). Позначимо кулі $u_1, u_2, \ldots, u_n$, а множину всіх куль, які містяться в коробці, — $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ (на рис. 12.3.1 зображена коробка, що містить 10 куль).

Кулі в коробці ретельно перемішують, а потім якимось випадковим чином із коробки виймають одну кулю. Припустимо,

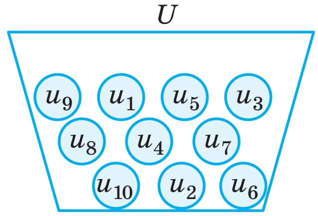


Рис. 12.3.1

що витягли кулю u_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Нехай $A=\{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ — деяка множина куль із множини U. *Якщо витягнута куля u_i належить множині A, то будемо говорити, що відбулася подія A.* Вірогідною подією будемо вважати всю множину U, тобто всю множину куль у коробці (оскільки будь-яка витягнута куля буде належати множині U). Неможливою подією будемо вважати порожню множину $\varnothing$.

Після цього кожній події A якимось чином (наприклад, через статистичне означення) можна спробувати поставити у відповідність її ймовірність — число $P(A)$, що задовольняє умови 1–3.

Ця ілюстрація показує, що можна сформулювати абстрактні ймовірнісні поняття, використовуючи тільки терміни теорії множин, наприклад, у такий спосіб.

Розглянемо скінченну множину $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, елементи якої u_i (де $i=1, 2, \ldots, n$ і $u_i \cap u_j=\varnothing$ при $i \neq j$) назвемо *елементарними подіями* (множина U — *простір елементарних подій*). Будь-яку підмножину $A=\{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ множини U назвемо *подією*. Вся множина U — це *вірогідна подія*, а порожня множина $\varnothing$ — це *неможлива подія*.

Суму $A+B$ подій A і B означимо як об'єднання $A \cup B$ множин A і B, а добуток $A \cdot B$ подій A і B — як переріз $A \cap B$ множин A і B.

Якщо добуток подій A і B порожній $(A \cdot B=\varnothing)$, то події A і B називають *несумісними*.

Подія $\overline{A}$, *протилежна* до події A, означається як доповнення $\overline{A}$ множини A до множини U (тобто як множина всіх елементів u_i, які не входять до A). Події A і $\overline{A}$ задовольняють умови $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ і $A + \overline{A} = U$.

Тепер означимо ймовірність $P(A)$ події A.

Нехай у будь-який спосіб задано числа $p(u_i)$, де $i = 1, 2, \ldots, n$, що задовольняють умови:

$$p(u_i) \geqslant 0,$$
$$p(u_1) + p(u_2) + \ldots + p(u_n) = 1.$$

Ці числа називають *елементарними ймовірностями*.

Означимо рівністю ймовірність $P(A)$ події $A = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$:

$$P(A) = p(u_{i_1}) + p(u_{i_2}) + \ldots + p(u_{i_m}).$$

Означене у такий спосіб поняття ймовірності узгоджене з такими аксіомами.

Аксіома 1. *Для довільної події A з U*

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

Аксіома 2. *Для вірогідної події U*

$$P(U) = 1.$$

Аксіома 3. *Для довільних несумісних подій A і B* **(тобто для таких, що $A \cdot B = \varnothing$)**

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Із цих аксіом випливають такі наслідки.

Наслідок 1. *Ймовірність неможливої події* $P(\varnothing) = 0$, **а** *ймовірність події* $\overline{A}$, *протилежної до події A,* **обчислюється за формулою** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Справді, оскільки $U \cdot \varnothing = \varnothing$, то події U і $\varnothing$ несумісні, і тоді з рівності $U = U + \varnothing$ за аксіомою 3 одержуємо $P(U) = P(U) + P(\varnothing)$. Враховуючи, що за аксіомою 2 ймовірність $P(U) = 1$, одержуємо $1 = 1 + P(\varnothing)$. Звідси $P(\varnothing) = 0$.

Аналогічно, оскільки $A \cdot \overline{A} = \varnothing$, то події A і $\overline{A}$ несумісні, і тоді з рівності $A + \overline{A} = U$ за аксіомами 3 і 2 одержуємо $P(A) + P(\overline{A}) = P(U)$, тобто $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, отже, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. ○

Зауваження. Якщо для довільної події $P(A) \geqslant 0$ (а отже, і $P(\overline{A}) \geqslant 0$), то з рівності $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ одержуємо, що $P(A) \leqslant 1$, тобто обмеження $P(A) \leqslant 1$ в аксіомі 1 можна обґрунтувати, спираючись на обмеження $P(A) \geqslant 0$. Але ми включили обмеження $P(A) \leqslant 1$ до аксіоми 1 для зручності використання цієї аксіоми.

Наслідок 2. *Ймовірність суми попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій*, **тобто, якщо** $u_i \cdot u_j = \varnothing$ **при** $i \neq j$**, то**

$$P(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = P(u_1) + P(u_2) + \ldots + P(u_n).$$

Обґрунтуйте цю властивість самостійно, спираючись на аксіому 3 і використовуючи метод математичної індукції.

Система аксіом 1–3 передбачає, що залежно від задачі, яка розв'язується, елементарні ймовірності $p(u_i)$, а відповідно і ймовірності $P(A)$, можуть задаватися у різні способи.

У випадку, коли елементарні події не є рівноймовірними, доводиться використовувати статистичне означення ймовірності. Разом із тим, коли розглядаються експерименти з випадковими результатами (тобто випадкові події) і всі ці результати *рівноможливі, тобто є всі підстави вважати, що шанси отримання цих результатів однакові*, то ймовірність випадкової події вдається знайти шляхом міркувань, не виконуючи експериментів. Наведемо відповідні міркування, спираючись на аксіоми ймовірності (тобто *отримаємо класичне означення ймовірності як ще один* ***наслідок*** *з аксіом імовірності*).

Нехай результатом деякого випадкового експерименту може бути тільки одна з попарно несумісних подій u_1, u_2, ..., u_n. Назвемо ці події *елементарними подіями*, а множину всіх цих подій

$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — *простором елементарних подій*. Сумою всіх елементарних подій є вірогідна подія U:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = U.$$

Це випливає з того, що оскільки в результаті заданого експерименту обов'язково відбудеться одна з подій $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то за означенням суми обов'язково відбудеться і їх сума.

Враховуючи, що за аксіомою 2 ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці $(P(U) = 1)$, і те, що за аксіомою 3 і наслідком 2 ймовірність суми несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій, маємо:

$$p(u_1) + p(u_2) + \ldots + p(u_n) = 1.$$

Якщо всі події $u_1, u_2, \ldots, u_n$ рівноймовірні: $p(u_1) = p(u_2) = \ldots = p(u_n)$, то одержуємо, що

$$p(u_1) = p(u_2) = \ldots = p(u_n) = \frac{1}{n}.$$

Нехай подія A відбувається тоді й тільки тоді, коли відбудеться одна з m попарно несумісних елементарних подій $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}$ (у цьому випадку говорять, що елементарні події $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}$ *сприятливі* для події A). Це можна записати так: $A = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ або, використовуючи поняття суми подій, так: $A = u_{i_1} + u_{i_2} + \ldots + u_{i_m}$. Враховуючи, що ймовірність суми попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій, і те, що ймовірність кожної з m вибраних елементарних подій дорівнює $\frac{1}{n}$ (тобто $p(u_{i_1}) = p(u_{i_2}) = \ldots = p(u_{i_m}) = \frac{1}{n}$), маємо:

$$P(A) = p(u_{i_1}) + p(u_{i_2}) + \ldots + p(u_{i_m}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{m \text{ разів}} = \frac{m}{n}.$$

Отже, спираючись на аксіоматичне означення ймовірності, ми з'ясували, чому у випадку рівноможливих елементарних подій рівність $P(A) = \frac{m}{n}$ приймають за *класичне означення ймовірності*.

Зауваження. Оскільки різні означення ймовірності задовольняють одні й ті самі основні властивості (аксіоми), то наслідки, які можуть бути отримані з використанням цих аксіом, не залежать від способу означення ймовірності. Тому далі обґрунтування загальних властивостей ймовірностей ми будемо проводити для одного означення — або, як кажуть у математиці, для однієї ймовірнісної моделі, — і мати на увазі, що аналогічне обґрунтування можна провести й для інших моделей. Хоча, звичайно, у кожній моделі можна вказати й свої специфічні властивості, яких немає в інших моделях.

Звернувшись до інтернет-підтримки підручника, ви можете ознайомитися з означенням і застосуванням геометричної ймовірності, для якої теж виконуються аксіоми 1–3 ймовірності.

Запитання

1. Поясніть, що таке частота та відносна частота випадкової події.
2. Поясніть зміст статистичного означення ймовірності.
3. Поясніть зміст аксіоматичного означення ймовірності.
4. Сформулюйте і обґрунтуйте найпростіші наслідки з аксіом ймовірності.

Вправи

12.3.1. Проведіть 50 разів експеримент із підкидання монети. Обчисліть відносну частоту випадання «герба». Порівняйте свій результат із результатами інших учнів вашого класу.

12.3.2. Щоб визначити, як часто зустрічаються в лісопарку дерева різних порід, учні провели такі експерименти. Кожний вибрав свою стежину і, йдучи нею, записував породу кожного десятого дерева. Результати було подано у вигляді таблиці.

Порода дерева	Сосна	Дуб	Береза	Ялина	Осика	Усього
Число дерев	315	217	123	68	34	757

Оцініть імовірність того, що обране навмання в цьому парку дерево буде:
1) сосною; 2) хвойним; 3) листяним.

Відповідь подайте десятковим дробом, округливши його до сотих.

12.3.3. Щоб визначити, який колір волосся в жителів міста зустрічається частіше, а який рідше, учні провели такий експеримент. Кожний вибрав свій маршрут і протягом півгодини записував колір волосся кожного п'ятого на шляху проходження зустрічного. Результати було подано у вигляді таблиці.

Колір волосся	Брюнети	Шатени	Руді	Блондини	Усього
Число людей	198	372	83	212	865

Оцініть імовірність того, що обраний навмання житель цього міста буде:
1) шатеном; 2) рудим; 3) не рудим.

Відповідь подайте десятковим дробом, округливши його до сотих.

12.3.4*. Виберіть навмання одну сторінку з книжки будь-якого письменника і підрахуйте, скільки разів на цій сторінці з'являються букви «о» і «б», а також скільки всього на ній букв. Оцініть імовірність появи букв «о» і «б» у цьому тексті.

Поясніть, чому на клавіатурах друкарських машинок і комп'ютерів буква «о» розташована ближче до центра, а буква «б» — ближче до краю (рис. 12.3.2). Як ви поясните розташування інших букв?

Рис. 12.3.2

12.3.5. Виготовили «неправильний» кубик зі зміщеним центром ваги. Після проведення 1000 експериментів із підкидання кубика отримали такі результати.

Число очок	1	2	3	4	5	6
Число випадань відповідної кількості очок	71	145	169	91	21	503

Використовуючи ці дані, оцініть імовірності вказаних нижче подій (запишіть відповідні ймовірності десятковим дробом, округливши його до тисячних) і дайте відповіді на запитання, чи справедливим буда таке парі:

1) я виграю, якщо випаде парне число очок, ви — якщо непарне;

2) я виграю, якщо випаде число очок від 4 до 6, ви — якщо від 1 до 3;

3) Я виграю, якщо випаде не 6 очок, ви — якщо 6 очок?

12.3.6. У результаті значної кількості спостережень учні визначили ймовірність, з якою в лісопарку зустрічаються дерева різних порід, і подали результати у вигляді таблиці.

Порода дерева	Сосна	Дуб	Береза	Ялина	Осика
Ймовірність	0,42	0,29	0,16	0,09	0,04

Знайдіть імовірність того, що обране навмання в цьому лісопарку дерево буде:
1) сосною або дубом;
2) не дубом;
3) хвойним;
4) листяним;
5) не осикою;
6) хвойним або листяним (поясніть, що означає останній результат).

12.3.7. У результаті значної кількості спостережень учні визначили ймовірності того, який колір волосся зустрічається в жителів міста частіше, а який рідше, і подали результати у вигляді таблиці.

Колір волосся	Брюнети	Шатени	Руді	Блондини
Ймовірність	0,23	0,43	0,1	0,24

Знайдіть імовірність того, що обраний навмання житель цього міста буде:
1) шатеном або рудим;
2) не рудим;
3) брюнетом або блондином;
4) не блондином.

12.4. Умовна ймовірність

Таблиця 19

1. Поняття умовної ймовірності	
Означення	**Формула**
Число, яке виражає ймовірність події A за умови, що відбулася подія B, називається *умовною ймовірністю* події A за умови B і позначається $P_B(A)$ або $P(A\mid B)$.	$P_B(A)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

2. Ймовірність добутку двох подій (теорема множення ймовірностей)

Ймовірність добутку (тобто сумісної появи) двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої події, яка обчислена за умови, що перша подія вже відбулася.

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$$

3. Ймовірність добутку декількох подій

Ймовірність добутку (тобто сумісної появи) декількох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності інших, причому ймовірність кожної наступної події обчислюється за умови, що всі попередні події вже відбулися.

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття умовної ймовірності

Оцінюючи ймовірність випадкової події A, іноді доводиться враховувати якісь додаткові умови, що впливають на оцінку ймовірності цієї події.

Нехай A і B — дві події, які розглядаються в даному експерименті. Поява однієї події (наприклад, B) може впливати на можливість появи другої (A).

Наприклад, нехай проводиться експеримент з витягання куль з коробки, в якій є 8 куль, з них 2 білих і 6 чорних. Навмання послідовно виймають дві кулі, причому взяту кулю в коробку не повертають. Яка ймовірність того, що друга куля виявиться білою за умови, що перша куля була чорною?

Позначимо події: A — друга витягнута куля біла, B — перша витягнута куля чорна. Витягання (навмання) з коробки будь-якої кулі — рівноможливі події. Оскільки подія B відбулася, то в коробці лежать не 8, а 7 куль, з яких 2 білих. Тоді ймовірність події A за умови, що відбулася подія B, дорівнює $\frac{2}{7}$.

Означення. **Число, яке виражає ймовірність події A за умови, що відбулася подія B, називається *умовною ймовірністю* події A за умови B і позначається $P_B(A)$ або $P(A\mid B)$.**

Умовна ймовірність події A за умови B обчислюється за формулою

$$P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}\ (\text{де } P(B)>0). \qquad (1)$$

Доведемо цю формулу для випадку класичного означення ймовірності.

Нехай у результаті випадкового експерименту ми одержали n рівноможливих елементарних подій (простір U). З цих по-

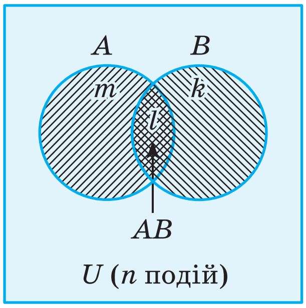


Рис. 12.4.1

дій m — сприятливі для події A, k — сприятливі для події B, l — сприятливі для події AB (рис. 12.4.1).

Тоді $P(A)=\frac{m}{n}$, $P(B)=\frac{k}{n}$, $P(AB)=\frac{l}{n}$.

Знайдемо ймовірність події A за умови B. Для обчислення умовної ймовірності замість всього простору елементарних подій U візьмемо тільки ту його частину, яка сприятлива для B. У цьому випадку сприятливими для події A будуть тільки l елементарних подій, які складають подію AB.

Тоді $P_B(A)=\frac{l}{k}=\frac{\frac{l}{n}}{\frac{k}{n}}=\frac{P(AB)}{P(B)}$. ○

Зазначимо, що рівність (1) іноді приймається за означення умовної ймовірності події A за умови B.

2 Ймовірність добутку подій

З рівності (1) одержуємо, що

$$P(AB)=P(B)\cdot P_B(A). \quad (2)$$

Оскільки подія BA збігається з подією AB, то в правій частині останньої формули можна поміняти місцями A і B.

Тоді

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B). \quad (3)$$

Рівність (2) (або (3)) зазвичай називають *теоремою множення ймовірностей*.

Теорема. **Ймовірність добутку (тобто сумісної появи) двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої події, яка обчислена за умови, що перша подія вже відбулася.**

Якщо ми можемо обчислити ймовірність події A й умовну ймовірність $P_A(B)$, то за формулою (3) легко знайти ймовірність $P(AB)$ добутку подій A і B.

Приклад 1

В коробці лежать 10 куль, із них 4 білі. Навмання беруть одну за одною дві кулі, причому взяту кулю до коробки не повертають. Обчислимо ймовірність того, що обидві кулі будуть білими.

Розв'язання

▶ Позначимо події: A — перша витягнута куля біла, B — друга витягнута куля біла. Тоді подія AB — обидві витягнуті кулі білі. Витягання (навмання) з коробки будь-якої з 10 куль — рівноможливі події. Сприятливими для події A є 4 події (в коробці всього 4 білих кулі). Тоді $P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. Після витягання однієї білої кулі (відбулася подія A) в коробці залишиться 9 куль, і з них тільки 3 білих, отже, $P_A(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. Тоді за формулою множення ймовірностей (3) одержуємо:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}.$$ ◁

Приклад 2

Серед однотипних деталей, які випускають у цеху, 1 % бракованих. Серед якісних деталей 40 % деталей вищого ґатунку. Яка ймовірність того, що взята навмання деталь вищого ґатунку?

Розв'язання

► Позначимо події: A — деталь не бракована, B — деталь вищого ґатунку. Тоді подія AB — вибрали якісну деталь вищого ґатунку.
Вибір однієї деталі з множини однотипних деталей — рівноможливі події. Враховуючи, що серед випущених деталей 99 % якісних, одержуємо $P(A)=0{,}99$, а враховуючи, що серед якісних деталей 40 % деталей вищого ґатунку, одержуємо, що $P_A(B)=0{,}4$.
Тоді

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=0{,}99\cdot 0{,}4=0{,}396.$$ ◁

Формула множення ймовірностей (2) узагальнюється на випадок декількох подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n), \qquad (4)$$

де $P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$ позначає умовну ймовірність події A_n, обчислену за умови, що всі події $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ уже відбулися.

Отже, **ймовірність добутку (тобто сумісної появи) декількох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності інших, причому ймовірність кожної наступної події обчислюється за умови, що всі попередні події вже відбулися.**

Приклад 3

В коробці лежить 6 білих, 4 чорних і 3 червоні кулі. Навмання одну за одною беруть три кулі, причому взяту кулю до коробки не повертають. Знайдіть імовірність того, що перша куля буде червоною, друга — білою і третя — чорною.

Розв'язання

► Нехай подія A — перша куля червона, подія B — друга куля біла, подія C — третя куля чорна. Тоді подія ABC — вибрали три кулі, з яких перша — червона, друга — біла і третя — чорна.
В коробці всього 13 куль. Витягання (навмання) будь-якої з 13 куль — рівноможливі події. Сприятливими для події A є 3 події (в коробці всього 3 червоні кулі). Тоді $P(A)=\frac{3}{13}$. Після витягання однієї червоної кулі (відбулася подія A) в коробці залишиться 12 куль і з них тільки 6 білих, отже, $P_A(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$. Після витягання однієї червоної і однієї білої куль (відбулися події A і B, тобто подія AB) в коробці залишиться 11 куль і з них тільки 4 чорних, отже, $P_{AB}(C)=\frac{4}{11}$. Тоді за узагальненою формулою множення ймовірностей (4) одержуємо:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)=\frac{3}{13}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{11}=\frac{6}{143}.$$ ◁

Запитання

1. Поясніть зміст поняття умовної ймовірності події A за умови події B.

2. Обґрунтуйте формулу $P_B(A)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$, де $P(B)>0$, для випадку класичного означення ймовірності.

3. Сформулюйте теорему множення ймовірностей. Наведіть приклади її використання.

Вправи

12.4.1. В ящику лежать 10 деталей, з яких 4 пофарбовані. Робітник навмання по одній виймає дві деталі. Знайдіть імовірність того, що:
1) друга деталь пофарбована, якщо перша пофарбована;
2) друга деталь пофарбована, якщо перша не пофарбована;
3) обидві деталі пофарбовані;
4) обидві деталі не пофарбовані.

12.4.2. В коробці лежать 5 білих і 4 чорних кулі. З коробки навмання виймають одну за одною дві кулі (кулі в коробку не повертають). Знайдіть імовірність того, що друга куля біла, якщо перша:
1) біла;
2) чорна.

12.4.3 На деякому підприємстві 95 % продукції вважається якісною. З якісних виробів 75 % становлять вироби першого ґатунку, решта — другого. Знайдіть імовірність того, що виріб, виготовлений на цьому підприємстві, виявився другого ґатунку.

12.4.4. В читальному залі є шість підручників із математики, з яких три у твердій обкладинці. Бібліотекар навмання взяв два підручники. Знайдіть імовірність того, що обидва підручники будуть у твердій обкладинці.

12.4.5. В коробці лежить 12 червоних, 8 зелених і 10 синіх куль. Навмання одну за одною беруть три кулі, причому взяту кулю до коробки не повертають. Знайдіть імовірність того, що перша куля буде червоною, друга — зеленою і третя — синьою.

12.5. Незалежні події

Таблиця 20

1. Поняття незалежності двох подій

Зміст	Означення
Подія B називається незалежною від події A, якщо подія A не змінює ймовірність події B.	**Події A і B називаються *незалежними*, якщо виконується рівність** $$P(AB)=P(A)P(B).$$ Ймовірність добутку (тобто сумісної появи) подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

2. Незалежність декількох подій

Декілька подій називаються *незалежними*, якщо для будь-якої підмножини цих подій (що містить дві або більше подій) імовірність їх добутку дорівнює добутку їх імовірностей. Зокрема,

якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні, то $P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$.

3. Властивість незалежних подій

Якщо ми маємо сукупність незалежних подій, то, замінивши деякі з цих подій на протилежні їм події, знову одержимо сукупність незалежних подій. Наприклад, якщо події A і B незалежні, то незалежними будуть також події

$$A \text{ і } \bar{B},\quad \bar{A} \text{ і } B,\quad \bar{A} \text{ і } \bar{B}.$$

4. Ймовірність того, що відбудеться хоча б одна з незалежних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-(1-P(A_1))(1-P(A_2))\ldots(1-P(A_n)).$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Подія B називається *незалежною* від події A, якщо поява події A не змінює ймовірність події B.

Загальне означення незалежності подій найчастіше формулюють так.

Означення. Події A і B називаються *незалежними*, якщо виконується рівність

$$\boldsymbol{P(AB)=P(A)P(B)},\qquad (1)$$

тобто дві події називаються *незалежними*, якщо ймовірність добутку (тобто сумісної появи) цих подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Рівність (1) обов'язково виконуватиметься, якщо одна з подій неможлива або вірогідна. Наприклад, якщо подія B — неможлива, тобто $B=\varnothing$, то $AB=\varnothing$. Отже, $P(AB)=0$ і $P(B)=0$, тобто рівність (1) виконується. Якщо подія B — вірогідна, тобто $B=U$, то $AB=AU=A$. Тоді $P(AB)=P(A)$ і $P(B)=1$, тобто рівність (1) виконується і в цьому випадку. Отже, *якщо хоча б одна з двох подій неможлива або вірогідна, то такі дві події незалежні.*

Звернемо увагу на те, що у випадку, коли події A і B незалежні, також незалежними будуть події A і $\bar{B}$, $\bar{A}$ і B, $\bar{A}$ і $\bar{B}$.

Доведемо, наприклад, що будуть незалежними події A і $\bar{B}$.

Якщо події A і B незалежні, то за означенням $P(AB)=P(A)P(B)$. Коли відбувається подія A, то в цей час подія B може від-

буватися або не відбуватися. Отже, можна стверджувати, що подія A відбувається тоді й тільки тоді, коли відбуваються або події A і B, або події A і $\bar{B}$, тобто $A = AB + A\bar{B}$. Ураховуючи, що події AB і $A\bar{B}$ несумісні (бо події B і $\bar{B}$ несумісні) і що $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$, одержуємо $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$. Тоді $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) =$
$= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$.

А це й означає, що події A і $\bar{B}$ незалежні.

Аналогічно обґрунтовується незалежність подій $\bar{A}$ і B, $\bar{A}$ і $\bar{B}$. ○

Поняття незалежності подій може бути поширене на будь-яку скінченну кількість подій.

Означення. **Декілька подій називають *незалежними* (ще говорять «незалежними в сукупності»), якщо для будь-якої підмножини цих подій (яка містить дві або більше подій) імовірність їх добутку дорівнює добутку їх імовірностей.**

Наприклад, три події A, B, C будуть незалежними, якщо виконуються умови:

$$P(AB) = P(A)P(B),$$
$$P(AC) = P(A)P(C),$$
$$P(BC) = P(B)P(C),$$
$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

З означення випливає, що у випадку, коли події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні,

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

(але виконання цієї рівності при $n > 2$ ще не означає, що події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні).

Як і у випадку двох подій, можна довести, що коли в деякій сукупності незалежних подій замінити якісь події протилежними їм подіями, то отримаємо також сукупність незалежних подій.

Зазначимо, що наведені означення незалежності подій у теоретико-ймовірнісному розумінні відповідають звичайному розумінню незалежності подій як відсутності впливу одних подій на інші. Тому під час розв'язування задач можна користуватися таким принципом: *причинно-незалежні події є незалежними і в теоретико-ймовірнісному розумінні*.

Приклад 1

Прилад складається з трьох вузлів, кожен із яких протягом доби може вийти з ладу незалежно від інших. Прилад не працює, якщо не працює хоча б один із вузлів. Імовірність роботи без поломки протягом доби першого вузла дорівнює 0,95, другого 0,9, третього 0,85. Знайдіть імовірність того, що протягом доби прилад працюватиме без поломок.

Розв'язання

▶ Нехай подія A_1 — перший вузол справний, подія A_2 — другий вузол справний, подія A_3 — третій вузол справний, подія A — протягом доби прилад працює без поломок. Оскільки прилад працює без поломок тоді й тільки тоді, коли справні всі три вузли, то $A = A_1A_2A_3$. За умовою події A_1, A_2, A_3 незалежні, отже,

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) =$$
$$= 0{,}92 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}85 = 0{,}726\,75 \approx 0{,}73. \ \triangleleft$$

Приклад 2

Два стрільці зробили по одному пострілу в одну мішень. Ймовірність влучити в мішень для першого стрільця дорівнює 0,9, для другого 0,8. Знайдіть імовірність того, що мішень буде влучена.

Розв'язання

Розглянемо такі події: A — перший стрілець влучив у мішень, B — другий стрілець влучив у мішень, C — мішень улучена. Події A і B незалежні, але безпосередньо використовувати в даному випадку множення ймовірностей не можна, оскільки подія C відбувається не тільки тоді, коли обидва стрільці влучили у мішень, але й тоді, коли в мішень влучив хоча б один із них.

Міркуватимемо інакше. Розглянемо події $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, протилежні відповідно подіям A, B, C. Оскільки події A і B незалежні, то події $\bar{A}$ і $\bar{B}$ також незалежні. Якщо $P(A)=0{,}9$, то $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0{,}9=0{,}1$. Якщо $P(B)=0{,}8$, то $P(\bar{B})=1-P(B)=1-0{,}8=0{,}2$.

Ураховуючи, що мішень не буде влучена тоді й тільки тоді, коли в неї не попаде ні перший стрілець, ні другий, одержуємо, що $\bar{C}=\bar{A}\bar{B}$. Тоді

$$P(\bar{C})=P(\bar{A})P(\bar{B})=0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}02.$$

Оскільки події C і $\bar{C}$ протилежні, то

$$P(C)=1-P(\bar{C})=1-0{,}02=0{,}98.$$ ◁

Зауваження. Міркування, наведені в ході розв'язування задачі 2, можна узагальнити. Якщо події A_1, A_2, ..., A_n незалежні, то події $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, ..., $\overline{A_n}$ також незалежні (і $P(\overline{A_i})=1-P(A_i)$, де $i=1, 2, 3, \ldots, n$). Для знаходження ймовірності появи хоча б однієї з незалежних подій A_1, A_2, ..., A_n, тобто події $C=A_1+A_2+\ldots+A_n$, можна знайти ймовірність протилежної події $\bar{C}$. Подія $\bar{C}$ відбудеться тоді й тільки тоді, коли не відбудеться ні подія A_1, ні подія A_2, ..., ні подія A_n, тобто $\bar{C}=\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n$.

Тоді $P(\bar{C})=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_n)=$
$=(1-P(A_1))(1-P(A_2))\ldots(1-P(A_n))$.

Ураховуючи, що $P(C)=1-P(\bar{C})$, одержуємо, що *ймовірність появи хоча б однієї з незалежних подій* A_1, A_2, ..., A_n можна обчислити за формулою $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=(1-P(A_1))(1-P(A_2))\ldots(1-P(A_n))$.

Зрозуміло, наведену формулу необов'язково запам'ятовувати, достатньо під час розв'язування задач на знаходження ймовірності появи хоча б однієї з незалежних подій провести вищевикладені міркування.

Запитання

1. Поясніть, у якому випадку подія B називається незалежною від події A.
2. Сформулюйте означення незалежності двох подій. Користуючись цим означенням, доведіть, що в експерименті з витягання карт з колоди (36 карт) незалежними є події: A — витягли даму, B — витягли бубнову карту.

3*. Відомо, що події A і B незалежні. Обґрунтуйте незалежність подій A і $\bar{B}$, $\bar{A}$ і B, $\bar{A}$ і $\bar{B}$.

4. Поясніть, як розуміють незалежність (тобто незалежність у сукупності) трьох подій K, M, N.

5. Запишіть формулу для знаходження ймовірності добутку декількох незалежних подій. Наведіть приклад її використання.

Вправи

12.5.1°. Ймовірність того, що стрілець при одному пострілі влучить у ціль, дорівнює 0,8. Стрілець зробив два постріли. Знайдіть імовірність того, що при обох пострілах стрілець улучив у ціль.

12.5.2°. Одночасно підкинули монету й гральний кубик. Знайдіть імовірність одночасного випадання «герба» на монеті і 1 очка на кубику.

12.5.3°. В одній партії електролампочок 3 % бракованих, а в другій 4 % бракованих. Навмання беруть по одній лампочці з кожної партії. Знайдіть імовірність того, що обидві лампочки виявляться бракованими.

12.5.4. Підкидають два гральні кубики. Знайдіть імовірність того, що на одному кубику випаде 1 очко, а на другому — більше 3 очок.

12.5.5. Три стрільці, для яких імовірність влучення в мішень дорівнює 0,8, 0,75, 0,7, роблять по одному пострілу по одній мішені. Знайдіть імовірність того, що:

1°) усі три стрільці улучать у мішень;
2) хоча б один зі стрільців улучить у мішень;
3) тільки один зі стрільців улучить у мішень;
4) тільки двоє зі стрільців улучать у мішень.

12.5.6. Ймовірність зупинки за зміну одного з верстатів, що працюють в цеху, дорівнює 0,15, а другого 0,16. Знайдіть імовірність того, що обидва верстати за зміну не зупиняться.

12.5.7. Прилад містить два незалежні елементи. Ймовірність відмови елементів дорівнює 0,05 і 0,08. Знайдіть імовірність відмови приладу, якщо для цього досить, щоб відмовив хоча б один елемент.

12.5.8*. Ймовірність хоча б одного влучення стрільцем у мішень при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайдіть імовірність влучення при одному пострілі.

12.5.9*. Ймовірність того, що при одному пострілі стрілець улучить у ціль, дорівнює 0,5. Скільки пострілів повинен зробити стрілець, щоб із імовірністю не менше 0,9 улучити в ціль хоча б один раз?

12.6. Поняття випадкової величини та її розподілу. Математичне сподівання випадкової величини

1 Поняття випадкової величини та її розподілу

Під *випадковою величиною* в теорії ймовірностей розуміють змінну величину, яка в даному випадковому експерименті може набувати тих чи інших числових значень із певною ймовірністю. Позначають випадкові величини великими латинськими літерами: X, Y, Z, ..., а їх значення — відповідними малими літерами: x, y, z, ... Той факт, що випадкова величина X набула значення x, записують так: $X = x$. Наприклад, у п. 12.1 було знайдено ймовірності появи тієї чи іншої суми очок при киданні двох гральних кубиків. Сума очок, що з'являється, — *випадкова величина*. Позначимо її через X. Тоді $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, ..., $x_{10} = 11$, $x_{11} = 12$ — значення випадкової величини X. Значення випадкової величини X та відповідні ймовірності їх появи (p_1, p_2, ..., p_{10}, p_{11})* наведені в таблиці:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

За допомогою цієї таблиці легко побачити, яких значень величина X набуває з однаковими ймовірностями, яке значення величини X з'являється з більшою ймовірністю тощо. Таку таблицю називають *таблицею розподілу значень випадкової величини за її ймовірностями* й кажуть, що ця таблиця задає *закон розподілу* розглянутої *випадкової величини*.

Наведемо означення розглянутих понять. Зазначимо, що випадкову величину можна задати в будь-якому випадковому експерименті. Для цього достатньо кожній елементарній події з простору елементарних подій експерименту поставити у відповідність якесь число (тоді кажуть, що задано числову функцію, областю визначення якої є простір елементарних подій).

Означення. ***Випадковою величиною* називається числова функція, областю визначення якої є простір елементарних подій.**

Наприклад, в експерименті з підкиданням монети простір елементарних подій складається з двох подій: u_1 — випав «герб», u_2 — випало «число». Ці події несумісні, і в результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій. Поставимо у відповідність події u_1 число 1, а події u_2 — число 0 (тобто фактично будемо вважати, що у випадку появи «герба» випадає число 1, а у випадку появи «числа» випадає 0). Тоді одержимо випадкову величину X, яка набуває тільки двох значень: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ (тобто $X(u_1) = x_1 = 1$, $X(u_2) = x_2 = 0$). Розглянуту функцію — випадкову величину X — можна задати також за допомогою таблиці.

Результат експерименту	u_1 — випав «герб»	u_2 — випало «число»
Значення X	1	0

Закон розподілу цієї випадкової величини задається таблицею:

X	1	0
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

* Таким чином, через p_i позначено ймовірність події «випадкова величина X набула значення x_i». Це можна записати так: $P(X = x_i) = p_i$ (де $i = 1, 2, \ldots, 11$).

Зазначимо, що закон розподілу кожної випадкової величини встановлює відповідність між значеннями випадкової величини та їх імовірностями, тобто є функцією, областю визначення якої є всі значення випадкової величини.

Означення. ***Законом розподілу випадкової величини*** X **називається функція, яка кожному значенню** x **випадкової величини** X **ставить у відповідність число** $P(X=x)$ **(імовірність події «випадкова величина** X **набула значення** x**»).**

У загальному випадку закон розподілу випадкової величини, яка набуває тільки n значень, можна записати у вигляді таблиці:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_k

Тут x_1, x_2, ..., x_n — різні значення випадкової величини X, а $p_i = P(X = x_i)$ (де $i = 1, 2, ..., n$) — ймовірності, з якими X набуває цих значень.

Події $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, ..., $(X = x_n)$ попарно несумісні, і їх сума є вірогідною подією. Тому сума ймовірностей цих подій дорівнює 1, отже,

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Цю рівність часто використовують для перевірки правильності задання закону розподілу випадкової величини, особливо в тих випадках, коли він задається не в результаті теоретичного розрахунку ймовірностей подій із використанням класичного означення ймовірності, а в результаті використання статистичного означення ймовірності.

Наприклад, в експериментах із підкидання ґудзика з вушком для пришивання падіння ґудзика на вушко чи на лицьову сторону може бути розглянуте як випадкова величина Y з умовними значеннями $y_1 = 1$ (падіння на вушко) і $y_2 = 0$ (падіння на лицьову сторону). Результати серії експериментів для деякого ґудзика наведені в таблиці, яка задає закон розподілу випадкової величини.

Y	1	0
P	0,45	0,55

(*перевірка:* $0{,}45 + 0{,}55 = 1$)

Зауваження. У тому випадку, коли доводиться знаходити суму всіх значень деякої величини, можна використовувати уведений Л. Ейлером знак $\sum$ (сигма, читають: «сума») для позначення суми. Наприклад, якщо ймовірність P набуває значення P_1, P_2, ..., P_k, то:

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_k = \sum P^{*}.$$

Використовуючи позначення $\sum$, перевірку правильності складання останньої таблиці можна записати так:

$$\sum P = 0{,}45 + 0{,}55 = 1.$$

Розглянуті в цьому пункті випадкові величини набували ізольованих одне від одного значень. Такі величини називають *дискретними*, а розподіл імовірностей такої величини — *дискретним розподілом імовірностей*.

Дискретний — від латин. *discretus* — роздільний, переривчастий.

Якщо випадкова величина може набувати будь-якого значення з деякого проміжку, то таку величину називають *неперервною*. Наприклад, час T чекання автобуса на зупинці є неперервною випадковою величиною.

2 Математичне сподівання випадкової величини

Сформулюємо означення цього поняття для дискретної випадкової величини.

Нехай випадкова величина X набуває значень x_1, x_2, ..., x_k відповідно до ймовірностей p_1, p_2, ..., p_k, тобто має закон розподілу:

* Детальніше вказана сума записується так: $P_1 + P_2 + \ldots + P_k = \sum_{i=1}^{k} P_i$.

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_k

Означення. **Сума добутків усіх значень випадкової величини на відповідні ймовірності називається *математичним сподіванням величини* X (і позначається MX або $M(X)$):**

$$MX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k. \qquad (1)$$

Якщо значення випадкової величини X мають одну й ту саму ймовірність p, то, враховуючи, що $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$, одержуємо $kp = 1$ і $p = \frac{1}{k}$. Тоді

$$MX = x_1p + x_2p + \ldots + x_kp = p(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k},$$

тобто в цьому випадку математичне сподівання випадкової величини X дорівнює середньому арифметичному всіх її значень.

Говорять, що *математичне сподівання випадкової величини є середнім зваженим (за ймовірностями) її значень.*

Математичне сподівання називають ще *середнім значенням випадкової величини*. Іноді також говорять, що математичне сподівання випадкової величини є її *значенням у середньому*.

Математичне сподівання показує, на яке середнє значення випадкової величини X можна сподіватися в результаті тривалої серії експериментів (при значній кількості повторень експерименту). За допомогою математичного сподівання можна порівнювати випадкові величини, які задані законами розподілу.

Наприклад, нехай кількості очок, що вибиваються при одному пострілі кожним із двох вправних стрільців, мають такі закони розподілу:

X	8	9	10
P	0,4	0,1	0,5

Y	8	9	10
P	0,1	0,6	0,3

Щоб з'ясувати, який зі стрільців стріляє краще, знаходять математичне сподівання для кожної випадкової величини:

$$MX = 8 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}5 = 9{,}1;$$
$$MY = 8 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 10 \cdot 0{,}3 = 9{,}2.$$

Отже, середня кількість очок, які вибиває другий стрілець при одному пострілі, дещо вища, ніж у першого. Це дає підставу зробити висновок, що другий стрілець стріляє трохи краще, ніж перший.

Поняття математичного сподівання виникло у зв'язку з вивченням азартних ігор. Наведемо приклади.

Приклад 1

Гравець вносить у банк грального дому 1000 грн. Кидають гральний кубик. За правилами гравець може одержати 1800 грн, якщо відбудеться подія A_1 — випаде 6 очок; 1200 грн, якщо відбудеться подія A_2 — випаде або 4, або 5 очок; 0 гривень, якщо відбудеться подія A_3 — випаде або 1, або 2, або 3 очки.

Розв'язання

Вважатимемо, що гравець одержує X гривень, тобто X — випадкова величина, яка може набувати значення $x_1 = 1800$, $x_2 = 1200$, $x_3 = 0$ відповідно до ймовірностей

$$p_1 = p(A_1) = \frac{1}{6}, \quad p_2 = p(A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$p_3 = p(A_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \text{ де } p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Математичне сподівання випадкової величини X дорівнює:

$$MX = 1800 \cdot \frac{1}{6} + 1200 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 700.$$

Математичне сподівання — дуже важливий показник гри. Численні досліди показують, що число $MX = 700$ у нашому випадку — це та сума, яку в середньому гральний дім виплачує кожному гравцю. Але це означає, що кожен гравець у середньому втрачає 300 грн із внесених у банк грального дому 1000 грн. ◁

Приклад 2

Гравець виймає з колоди (у 36 карт) одну карту. Він одержує (тобто виграє) 10 грн, якщо вийме бубнового туза, 5 грн, якщо вийме бубнового короля, і кладе на стіл 1 грн (тобто програє, але можна сказати, що виграє −1 грн) у решті випадків.

Розв'язання

Вважатимемо, що гравець одержує X гривень, де X — випадкова величина, яка може набувати значення $x_1=10$, $x_2=5$, $x_3=-1$ відповідно до ймовірностей

$$p_1=\frac{1}{36},\quad p_2=\frac{1}{36},\quad p_3=\frac{34}{36},\ \text{де}\ p_1+p_2+p_3=1.$$

Математичне сподівання випадкової величини X дорівнює:

$$MX=10\cdot\frac{1}{36}+5\cdot\frac{1}{36}+(-1)\cdot\frac{34}{36}=-\frac{19}{36}.$$

Це означає, що кожен гравець у середньому втрачає $\frac{19}{36}$ грн. ◁

Приклад 3

Задача Паскаля. Два гравці A і B погодилися, що в їхній грі всю ставку отримає той, хто першим виграє 5 партій.
Але гра перервалася, коли гравець A мав 4 виграші, а гравець B — 3 виграші. У якому відношенні гравці повинні розділити ставку в цій перерваній грі? (У кожній партії виграє один з гравців — нічиїх немає; вважається, що ймовірність виграшу кожного гравця в одній партії дорівнює 0,5.)

Розв'язання

Розглянемо, які випадки могли б відбутися, якби гравці зіграли ще дві партії (незалежно від їх початкової домовленості):

1) гравець B виграє обидві партії;
2) гравець B виграє першу партію, але програє другу;
3) гравець B програє першу партію, але виграє другу;
4) гравець B програє обидві партії.

За початковою угодою всю гру виграє перший гравець у трьох із цих чотирьох випадків, другий — лише в одному. Отже, ймовірність події A (гравець A виграв усю гру) дорівнює $\frac{3}{4}$, а ймовірність події B (гравець B виграв усю гру) дорівнює $\frac{1}{4}$.

Якщо ставка дорівнює m грн, то гравець A одержав би X_A грн, де X_A — випадкова величина, яка набуває значення m з імовірністю $\frac{3}{4}$ і значення 0 з імовірністю $\frac{1}{4}$, а гравець B одержав би X_B грн, де X_B — випадкова величина, яка набуває значення m з імовірністю $\frac{1}{4}$ і значення 0 з імовірністю $\frac{3}{4}$.

Знайдемо математичне сподівання величин X_A і X_B, тобто знайдемо, скільки в середньому одержав би кожен гравець:

$$M(X_A)=m\cdot\frac{3}{4}+0\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}m,$$

$$M(X_B)=m\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}m.$$

Отже, в середньому гравці розділили б ставку у відношенні $3:1$, тому ставку треба розділити у відношенні $M(X_A):M(X_B)$, тобто $3:1$. ◁

Запитання

1. а) Поясніть, що таке випадкова величина для даного випадкового експерименту. Наведіть приклади.
б*) Сформулюйте означення випадкової величини. Користуючись означенням, задайте якусь випадкову величину для експерименту з підкидання двох монет.

2. Поясніть, що таке закон розподілу випадкової величини. Наведіть приклади.

3. Закон розподілу випадкової величини, яка набуває тільки n значень, задано у вигляді таблиці. Як можна перевірити правильність заповнення рядка зі значеннями ймовірностей у цій таблиці?

4. Сформулюйте означення математичного сподівання випадкової величини X.

Вправи

12.6.1°. Складіть таблицю розподілу за ймовірностями P випадкової величини X — числа очок, яке випадає при підкиданні грального кубика.

12.6.2. Є 3 гральних кубики, на гранях яких позначені тільки одне або два очки: у кубика A одне очко зустрічається на гранях один раз, у кубика B — 2 рази, а в кубика C — 3 рази (рис. 12.6.1). Випадкові величини X, Y і Z — число очок, що випало відповідно на кожному з кубиків A, B і C. Задайте закони розподілу випадкових величин X, Y і Z за допомогою відповідних таблиць.

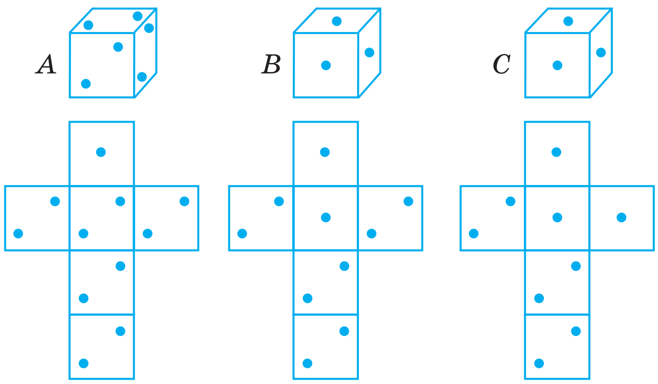


Рис. 12.6.1

12.6.3. Підкидають дві монети. Результату «герб» припишемо умовне числове значення 0, а результату «число» — 1. Складіть таблицю розподілу за ймовірностями P значень випадкової величини X — суми чисел, що випали на монетах.

12.6.4*. Тричі кидають монету. Випадкова величина X — число випадань «герба». Задайте закон розподілу випадкової величини X за допомогою таблиці.

12.6.5. Нехай закон розподілу випадкової величини X задано таблицею:

1)

X	2	5	6	7
P	0,3	0,1	0,2	0,4

2)

X	4	5	8	10	12
P	0,4	0,1	0,05	0,95	0,4

Знайдіть математичне сподівання цієї величини.

12.6.6. Підкидають гральний кубик. Знайдіть математичне сподівання випадкової величини X — числа очок, що випали на кубику.

12.6.7. Виграші (у гривнях), які припадають на один білет у кожній з двох лотерей, мають такі закони розподілу:

1)

X	0	1	5	10
P	0,9	0,06	0,03	0,01

2)

X	0	1	5	10
P	0,85	0,12	0,02	0,01

Якій із цих лотерей ви віддали б перевагу?

Називатимемо гру справедливою, якщо в середньому буде однаковим число очок або грошей, які одержує кожен гравець. Визначте, чи є справедливою гра, описана в завданнях 12.6.8–12.6.11.

12.6.8. Підкидають дві монети. Гравець A одержує 3 очки, якщо випадають два «герби», 0 очок — в інших випадках. Гравець B одержує 2 очки, якщо випадають «герб» і «число», 0 очок — в інших випадках.

12.6.9. Підкидають дві монети. Гравець A одержує 2 очки, якщо випадають два «числа», 0 очок — в інших випадках. Гравець B одержує 1 очко, якщо випадають «герб» і «число», 0 очок — в інших випадках.

12.6.10. Підкидають дві гральні кістки. Гравець A одержує 6 очок, якщо випадає сума, не більша 7 очок, 0 очок — в інших випадках. Гравець B одержує 7 очок, якщо випадає сума, більша 7 очок, 0 очок — в інших випадках.

12.6.11*. Підкидають дві монети. Гравець A одержує a очок, якщо випадають два «герби», 0 очок — в інших випадках. Гравець B одержує b очок, якщо випадають «герб» і «число», 0 очок — в інших випадках. Знайдіть відношення $a:b$, при якому ця гра буде справедливою.

12.6.12. *Задача Луки Пачолі* (1494 р.). Двоє гравців грають до трьох виграшів. Після того як перший гравець виграв дві партії, а другий — одну, гра урвалася. Як справедливо розділити ставку 210 ліврів (лівр — срібна монета)?

12.6.13*. *Задача П'єра Ферма* (1654 р.). Нехай до виграшу всієї гри гравцю A бракує двох партій, а гравцю B — трьох партій. Як справедливо розділити ставку, якщо гра перервана?

§ 13 ПОНЯТТЯ ПРО СТАТИСТИКУ. ХАРАКТЕРИСТИКИ РЯДІВ ДАНИХ

13.1. Поняття про статистику. Генеральна сукупність і вибірка

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття про статистику

Статистика — наука, що вивчає, обробляє й аналізує кількісні дані про найрізноманітніші масові явища в житті. Економічна статистика вивчає зміну цін, попиту та пропозиції на товари, прогнозує зростання й падіння виробництва й споживання. Медична статистика вивчає ефективність різних ліків і методів лікування, ймовірність виникнення деякого захворювання залежно від віку, статі, спадковості, умов життя, шкідливих звичок, прогнозує поширення епідемій. Демографічна статистика вивчає народжуваність, чисельність населення, його склад (віковий, національний, професійний). А є ще статистика фінансова, податкова, біологічна, метеорологічна...

Статистика — від латин. *status* — стан.

Статистика має багатовікову історію. Уже в стародавньому світі вели статистичний облік населення. Однак довільні тлумачення статистичних даних, відсутність строгої наукової бази статистичних прогнозів навіть у середині XIX ст. ще не дозволяли говорити про статистику як науку. Тільки в XX ст. з'явилася математична статистика — наука, яка спирається на закони теорії ймовірностей. Виявилося, що статистичні методи обробки даних із найрізноманітніших галузей життя мають багато спільного. Це дозволило створити універсальні науково обґрунтовані методи статистичних досліджень і перевірки статистичних гіпотез. Отже, ***математична статистика*** **— це розділ математики, який вивчає математичні методи обробки й використання статистичних даних для наукових і практичних висновків.**

У математичній статистиці розглядають методи, які дають можливість за результатами експериментів (статистичними даними) робити певні висновки ймовірнісного характеру.

Математична статистика ділиться на дві широкі галузі:

1) *описова статистика*, яка розглядає методи опису статистичних даних, їх табличне і графічне подання тощо;

2) *аналітична статистика* (теорія статистичних висновків), яка розглядає обробку даних, одержаних у ході експерименту, і формулювання висновків, що мають прикладне значення для конкретної галузі людської діяльності. Теорія статистичних висновків тісно пов'язана з теорією ймовірностей і базується на її математичному апараті.

Серед основних задач математичної статистики можна зазначити такі.

1. Оцінка ймовірності. Нехай деяка випадкова подія має ймовірність $p>0$, але її значення нам невідоме. Необхідно оцінити цю ймовірність за результатами експериментів, тобто розв'язати задачу про оцінку ймовірності через частоту.

2. Оцінка закону розподілу. Досліджується деяка випадкова величина, точний вираз для закону розподілу якої нам невідомий. Потрібно за результатами експериментів знайти наближений вираз для функції, що задає закон розподілу.

3. Оцінка числових характеристик випадкової величини (наприклад, математичного сподівання — див. п. 12.6).

4. Перевірка статистичних гіпотез (припущень). Досліджується деяка випадкова величина. Виходячи з певних міркувань, висувається гіпотеза, наприклад, про розподіл цієї випадкової величини. Потрібно за результатами експериментів прийняти або відхилити цю гіпотезу.

Результати досліджень, що проводяться методами математичної статистики, застосовуються для прийняття рішень. Зокрема, під час планування й організації виробництва, в процесі контролю якості продукції, вибору оптимального часу наладки або заміни діючої апаратури (наприклад, при визначенні часу заміни окремих частин верстатів тощо), під час організації тестування ЗНО.

Як і в кожній науці, у статистиці використовуються свої специфічні терміни й поняття. Деякі з них наведено в табл. 21. Запам'ятовувати ці означення не обов'язково, достатньо розуміти зміст.

Таблиця 21

Часто вживаний термін	Зміст терміну	Науковий термін	Означення
Загальний ряд даних	Те, звідки вибирають	**Генеральна сукупність**	Множина всіх можливих результатів спостереження (вимірювання)
Вибірка	Те, що вибирають	**Статистична вибірка, статистичний ряд**	Множина результатів, які реально одержані в даному спостереженні (вимірюванні)
Варіанта	Значення одного з результатів спостереження (вимірювання)	**Варіанта**	Одне зі значень елементів вибірки
Ряд даних	Значення всіх результатів спостереження (вимірювання)	**Варіаційний ряд**	Упорядкована множина всіх варіант

2 Генеральна сукупність і вибірка

Для вивчення різних масових явищ проводяться спеціальні статистичні дослідження. Будь-яке статистичне дослідження починається з цілеспрямованого збору інформації про явище або процес, що вивчається. Цей етап називають *етапом статистичних спостережень*. Для отримання статистичних даних у результаті спостережень схожі елементи деякої сукупності порівнюють за різними ознаками. Наприклад, учнів 11 класів можна порівнювати за зростом, розміром одягу, успішністю і т. д. Болти можна порівнювати за довжиною, діаметром, вагою, матеріалом тощо. Практично будь-яка ознака або може бути безпосередньо виміряна, або може одержати умовну числову характеристику (див. приклад із випаданням «герба» й «числа» при підкиданні монети в п. 12.6). Отже, деяку ознаку елементів сукупності можна розглядати як випадкову величину, що набуває тих чи інших числових значень.

В процесі вивчення реальних явищ часто буває неможливо обстежити всі елементи сукупності. Наприклад, практично неможливо виявити розміри взуття у всіх людей планети. А перевірити, наприклад, наявність аркушів неякісної рентгенівської плівки у великій партії хоча й реально, але безглуздо, тому що повна перевірка призведе до знищення всієї партії плівки. У подібних випадках замість вивчення всіх елементів сукупності, яку називають *генеральною сукупністю*, обстежують її значну частину, обрану випадковим чином. Цю частину називають *вибіркою*, а число елементів у вибірці — *об'ємом вибірки*.

Якщо у вибірці всі основні ознаки генеральної сукупності присутні в тій самій пропорції і з тією самою відносною частотою, з якою дана ознака виступає в заданій генеральній сукупності, то цю вибірку називають *репрезентативною*.

> Репрезентативний — від франц. *représentatif* — представницький.

Іншими словами, репрезентативна вибірка є меншою за розміром, але точною моделлю тієї генеральної сукупності, яку вона має відображати. У тій мірі, у якій вибірка є репрезентативною, висновки, що ґрунтуються на вивченні цієї вибірки, можна з великою упевненістю вважати застосовними до всієї генеральної сукупності.

Поняття репрезентативності відібраної сукупності не означає, що вона повністю за всіма ознаками представляє генеральну сукупність, оскільки це практично неможливо забезпечити. Відібрана частина має бути репрезентативною відносно тих ознак, які вивчаються.

Щоб вибірка була репрезентативною, вона має бути виокремлена з генеральної сукупності випадковим чином. Найчастіше використовують такі види вибірок:

- Вибірка
  - власне-випадкова
  - механічна
  - типова
  - серійна

Докладніше ознайомитися з характеристиками кожного виду вибірок ви можете, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Як уже зазначалося, практично будь-яка ознака X, яка вивчається, або безпосередньо вимірюється, або може одержати числову характеристику. Тому первинні експериментальні дані, що характеризують виокремлену вибірку, зазвичай подані у вигляді набору чисел, записаних дослідником у порядку їх надходження. Кількість (n) чисел у цьому наборі називають *об'ємом вибірки*, а кількість (m) з'явлень варіанти (одного зі значень елементів вибірки) — *частотою варіанти*. Відношення $\frac{m}{n}$ називають відносною частотою (W) варіанти.

Використовуючи ці поняття, запишемо співвідношення між ними в репрезентативній вибірці.

Нехай S — об'єм генеральної сукупності, n — об'єм репрезентативної вибірки, у якій k значень досліджуваної ознаки розподілено за частотами $M_1, M_2, \ldots, M_k$, де $\sum M = n$. Тоді в генеральній сукупності частотам $M_1, M_2, \ldots, M_k$ будуть відповідати частоти $s_1, s_2, \ldots, s_k$ тих самих значень ознаки, що й у вибірці $\left(\sum s = S\right)$. За означенням репрезентативної вибірки одержуємо

$$\frac{M_i}{n} = W_i = \frac{s_i}{S},$$

де i — порядковий номер значення ознаки $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Із цього співвідношення знаходимо

$$s_i = SW_i \text{ (або } s_i = S\frac{M_i}{n}\text{)}, \ 1 \leqslant i \leqslant k. \qquad (1)$$

Приклад

Взуттєвий цех має випустити 1000 пар кросівок молодіжного фасону. Для визначення того, скільки кросівок і якого розміру потрібно випустити, були виявлені розміри взуття у 50 випадковим чином вибраних підлітків. Розподіл розмірів взуття за частотами подано в таблиці:

Розмір (X)	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Частота (M)	2	5	6	12	11	7	4	2	1

$\sum M = n = 50$

Скільки кросівок різного розміру буде виготовлено?

Розв'язання

Будемо вважати розглянуту вибірку об'ємом $n = 50$ підлітків репрезентативною. Тоді в генеральній сукупності (об'ємом $S = 1000$) кількість кросівок кожного розміру пропорційна кількості кросівок відповідного розміру у вибірці (і для кожного розміру обчислюється за формулою (1)). Результати розрахунків будемо записувати в таблицю:

Розмір (X)	36	37	38	39	40	41	42	43	44	
Частота (M)	2	5	6	12	11	7	4	2	1	$\sum M = n = 50$
Відносна частота (W)	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\sum W = 1$
Кількість кросівок (SW)	40	100	120	240	220	140	80	40	20	$\sum (SW) = S = 1000$

Відповідь:

Розмір	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість кросівок	40	100	120	240	220	140	80	40	20

◁

У сільському господарстві для визначення кількісного співвідношення виробів різного сорту користуються так званим *вибірковим методом*. Суть цього методу буде зрозумілою з опису такого досліду.

У коробці ретельно перемішаний горох двох сортів: зелений і жовтий. Ложкою витягають із різних місць коробки порції гороху, в кожній порції підраховують число жовтих горошин M і число всіх горошин n. Для кожної порції знаходять відносну частоту появи жовтої горошини $W = \frac{M}{n}$. Так роблять k разів (на практиці зазвичай беруть $5 < k < 10$) і щоразу обчислюють відносну частоту. За статистичну ймовірність вилучення жовтої горошини з коробки приймають середнє арифметичне отриманих відносних частот $W_1, W_2, \ldots, W_k$:

$$W_{\text{сер}} = \frac{W_1 + W_2 + \ldots + W_k}{k}.$$

Запитання

1. Поясніть, які завдання розв'язують статистика й математична статистика.
2. Поясніть, як ви розумієте терміни: генеральна сукупність, вибірка, репрезентативна вибірка. Наведіть приклади.

Вправи

13.1.1. Визначте, яку із запропонованих вибірок в останньому стовпці таблиці можна вважати репрезентативною.

№	Генеральна сукупність	Мета обстеження	Вибірка
1°	Партія однакових деталей обсягом 10 000 штук	Визначення числа бракованих деталей у партії	1) 100 деталей, які лежать поряд; 2) 100 деталей, вибраних випадковим чином із різних частин партії
2°	Усі екзаменаційні роботи зовнішнього незалежного оцінювання з математики випускників шкіл міста	Виявлення співвідношення між числом учнів, рівень навчальних досягнень із математики яких є достатнім, середнім і високим	1) 10 робіт, узятих випадковим чином із числа всіх робіт; 2) 100 робіт, узятих випадковим чином із числа всіх робіт; 3) 100 робіт випускників однієї школи
3°	Партія штампованих деталей обсягом 100 000 штук	Визначення середньої маси деталі в партії	1) 2 деталі; 2) 100 деталей, які виготовили останніми; 3) 50 випадковим чином вибраних деталей із партії
4	Бідон молока	Визначення жирності молока (у відсотках)	1) Ложка молока, яка взята з поверхні через 2 год після надою; 2) стакан молока, налитий з бідона після 2 год охолодження його в погребі; 3) ложка молока, узята після ретельного перемішування молока
5	Урожай зерна на площі 1000 га	Визначення урожайності зерна на цьому полі	1) Урожай зерна з північного схилу пагорба площею 1 га; 2) середнє арифметичне врожайності зерна з двох сусідніх ділянок площею 1 га — північного і східного схилів пагорба; 3) середнє арифметичне врожайностей зерна з 10 ділянок, кожна з яких площею 10 соток вибрана на полі випадковим чином

13.1.2. В уривку з художнього твору деякого автора обсягом 600 слів дієслова трапляються 72 рази. Визначте орієнтовну кількість дієслів в уривку обсягом 2000 слів цього автора.

13.1.3. Серед випадковим чином вибраних 100 молодих людей, які влітку носять бейсболки, провели опитування про кольорові переваги для цього виду головних уборів. Результати опитування відображено в таблиці:

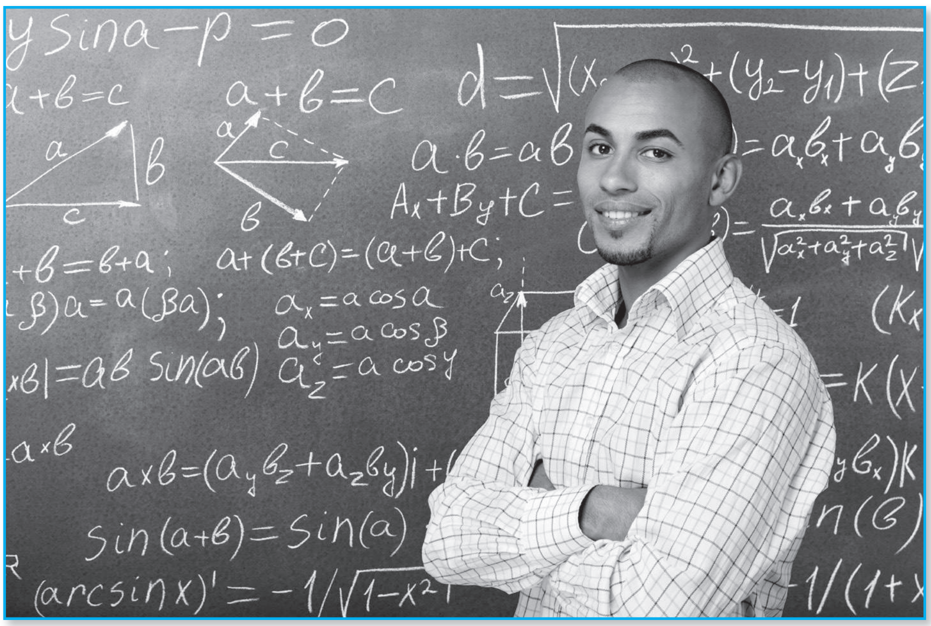
Колір	Чорний	Червоний	Синій	Сірий	Білий	Жовтий	Зелений
Частота	32	20	16	14	11	5	2

Вважаючи розглянуту вибірку репрезентативною, запропонуйте рекомендації швейній фабриці з кількості випуску бейсболок кожного кольору, якщо фабрика має випустити 30 000 бейсболок.

13.1.4. Молокозавод випускає молоко різної жирності. У продуктових магазинах міста, для яких завод виробляє молоко, було проведено опитування 50 навмання вибраних покупців про те, якої жирності молоко вони споживають. Результати опитування наведено в таблиці:

Жирність молока (у %)	0	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5
Частота	10	6	4	5	12	7	6

Вважаючи розглянуту вибірку репрезентативною, запропонуйте рекомендації молокозаводу щодо об'єму випуску молока кожного виду, якщо молокозавод має випускати 2000 літрів молока щоденно.



13.2. Табличне і графічне подання даних. Числові характеристики рядів даних

Таблиця 22

<table>
<tr><th>Означення</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ранжирування ряду даних</td></tr>
<tr><td>Під ранжируванням ряду даних розуміють розташування елементів цього ряду в порядку зростання (мається на увазі, що кожне наступне число або більше, або не менше попереднього).</td><td>Якщо ряд даних вибірки має вигляд
5, 3, 7, 4, 6, 4, 6, 9, 4,
то після ранжирування він перетворюється на ряд
3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9 (1)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Розмах вибірки (R)</td></tr>
<tr><td>Розмах вибірки — це різниця між найбільшим і найменшим значеннями величини у вибірці.</td><td>Для ряду (1) розмах вибірки:
$R = 9 - 3 = 6$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Мода (Mo)</td></tr>
<tr><td>Мода — це значення елемента вибірки, яке зустрічається частіше за інші.</td><td>У ряді (1) значення 4 зустрічається найчастіше, отже, $Mo = 4$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Медіана (Me)</td></tr>
<tr><td>Медіана — це так зване серединне значення впорядкованого ряду значень випадкової величини:
• якщо кількість чисел у ряді непарна, то медіана — це число, записане посередині;
• якщо кількість чисел у ряді парна, то медіана — це середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині.</td><td>Для ряду (1), у якому 9 членів, медіана — це середнє (тобто п'яте) число — 5: $Me = 5$.
Якщо розглянути ряд
3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9,
у якому 10 членів, то медіана — це середнє арифметичне п'ятого і шостого членів:
$Me = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Середнє значення $\left(\bar{X}\right)$ вибірки</td></tr>
<tr><td>Середнім значенням вибірки називають середнє арифметичне всіх чисел ряду даних вибірки.
Якщо в ряді даних записані значення x_1, x_2, ..., x_n (серед яких можуть бути й однакові), то
$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ (2)
Якщо відомо, що в ряді даних різні значення x_1, x_2, ..., x_k зустрічаються відповідно до частот m_1, m_2, ..., m_k (тоді $\sum M = n$), то середнє арифметичне можна обчислювати за формулою
$\bar{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}$.</td><td>Нехай ряд даних заданий таблицею розподілу за частотами M:
<table><tr><td>X</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>M</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>$\sum M = n = 8$.
Тоді за формулою (2)
$\bar{X} = \frac{2+2+2+4+5+5+7+7}{8} = \frac{34}{8} = 4{,}25$,
або за другою формулою
$\bar{X} = \frac{2\cdot 3 + 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 7\cdot 2}{8} = \frac{34}{8} = 4{,}25$.</td></tr>
</table>

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Табличне й графічне подання даних. Полігони частот

Як уже зазначалося, практично будь-яка ознака X, яка вивчається, або безпосередньо вимірюється, або може одержати числову характеристику. Тому початкові експериментальні дані, що характеризують виділену вибірку, зазвичай подані у вигляді набору чисел, записаних дослідником у порядку їх надходження. Якщо даних багато, то одержаний набір чисел важко осягнути й зробити по ньому якісь висновки дуже складно. Тому первинні дані потребують обробки, яка зазвичай починається з їх групування. Групування виконується різними методами залежно від мети дослідження, виду ознаки, що вивчається, і кількості експериментальних даних (об'єму вибірки). Але найчастіше групування зводиться до подання даних у вигляді таблиць, у яких різні значення елементів вибірки впорядковані за зростанням і вказані їх частоти (тобто кількість кожного елемента у вибірці). За необхідності в цій таблиці вказують також відносні частоти для кожного елемента, записаного в першому рядку. Таку таблицю часто називають *рядом розподілу* (або *варіаційним рядом*).

Наприклад, нехай у результаті вивчення розміру взуття 30 хлопців 11 класу було одержано набір чисел (результати записано в порядку опитування):
39; 44; 41; 39; 40; 41; 45; 42; 44; 41; 41; 43; 42; 43; 41; 44; 42; 38; 40; 38; 41; 40; 42; 43; 42; 41; 43; 40; 40; 42.

Щоб зручніше було аналізувати інформацію, у подібних ситуаціях числові дані спочатку *ранжирують*, розташовуючи їх у порядку зростання (коли кожне наступне число або більше, або не менше за попереднє). У результаті ранжирування одержуємо такий ряд:
38; 38; 39; 39; 40; 40; 40; 40; 40; 41; 41; 41; 41; 41; 41; 41; 42; 42; 42; 42; 42; 42; 43; 43; 43; 43; 44; 44; 44; 45.

Потім складаємо таблицю, у першому рядку якої вказуємо всі різні значення одержаного ряду даних (X — розмір взуття вибраних 30 хлопців 11 класу), а в другому рядку — їх частоти M:

X	38	39	40	41	42	43	44	45
M	2	2	5	7	6	4	3	1

$n = \sum M = 30$

Одержуємо ряд розподілу ознаки X, яка розглядається, за частотами. Іноді зручно проводити аналіз ряду розподілу на основі його графічного зображення.

Позначимо на координатній площині точки з координатами $(x_1; m_1)$, $(x_2; m_2)$, ..., $(x_8; m_8)$ і сполучимо їх послідовно відрізками (рис. 13.2.1). Одержану ламану лінію називають *полігоном частот*.

Означення. ***Полігоном частот*** **називається ламана, відрізки якої послідовно сполучають точки з координатами $(x_1; m_1)$, $(x_2; m_2)$, ..., $(x_k; m_k)$, де x_i — значення різних елементів ряду даних, а m_i — відповідні їм частоти.**

Аналогічно означається й будується *полігон відносних частот* для ознаки X,

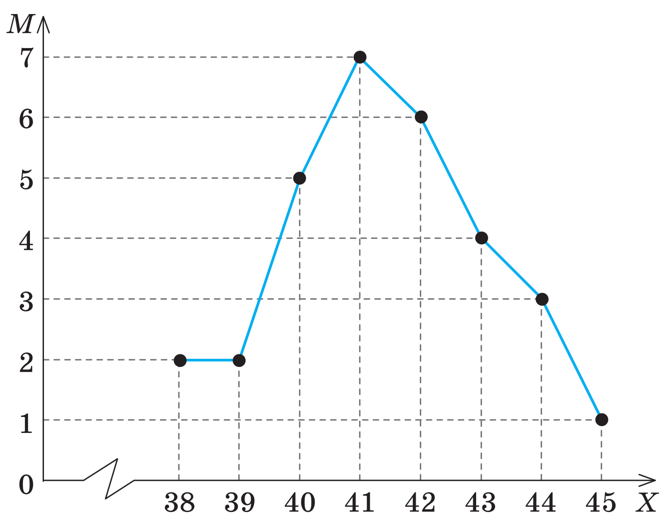


Рис. 13.2.1

яка розглядається (будуються точки з координатами $(x_1;w_1)$, $(x_2;w_2)$, …, $(x_k;w_k)$, де x_i — значення різних елементів ряду даних, а w_i — відповідні їм відносні частоти).

Якщо порахувати відносні частоти для кожного з різних значень ряду даних, розглянутого вище, то розподіл значень ознаки X, яка розглядається, за відносними частотами можна задати таблицею:

X	38	39	40	41
W	$\frac{1}{15}\approx 0{,}07$	$\frac{1}{15}\approx 0{,}07$	$\frac{1}{6}\approx 0{,}17$	$\frac{7}{30}\approx 0{,}23$

X	42	43	44	45
W	$\frac{1}{5}=0{,}2$	$\frac{2}{15}\approx 0{,}13$	$\frac{1}{10}=0{,}1$	$\frac{1}{30}\approx 0{,}03$

$$\sum W=1$$

Також розподіл значень ознаки X, яка розглядається, за відносними частотами можна подати у вигляді полігона відносних частот (рис. 13.2.2), у вигляді лінійної діаграми (рис. 13.2.3) або у вигляді кругової діаграми, попередньо записавши значення відносної частоти у відсотках (рис. 13.2.4).

Нагадаємо, що для побудови кругової діаграми круг розбивається на сектори, центральні кути яких пропорційні відносним

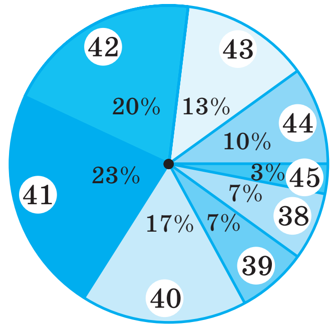


Рис. 13.2.4

частотам, обчисленим для кожного з різних значень ряду даних. Зауважимо, що кругова діаграма зберігає свою наочність і виразність тільки у випадку невеликої кількості одержаних секторів, в іншому випадку її застосування малоефективне.

Якщо ознака, яка розглядається, набуває багатьох різних значень, то її розподіл можна краще уявити після розбиття всіх значень ряду даних на класи. Кількість класів може бути будь-якою, зручною для дослідження (зазвичай їх вибирають у кількості від 4 до 12). При цьому величини (об'єми) класів мають бути однаковими.

Наприклад, у таблиці подано відомості про заробітну платню 100 робітників одного підприємства (у деяких умовних одиницях). При цьому значення платні (округлені до цілого числа умовних одиниць) згруповані в 7 класів, кожний об'ємом у 100 умовних одиниць.

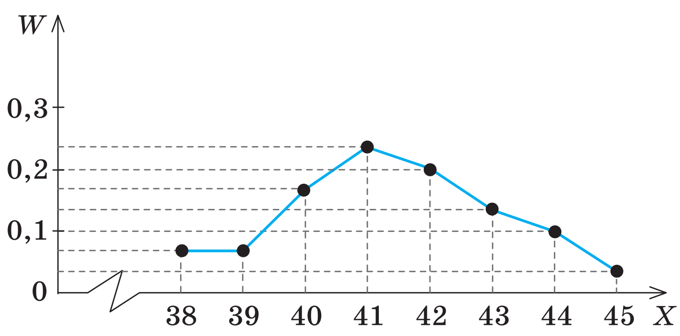


Рис. 13.2.2

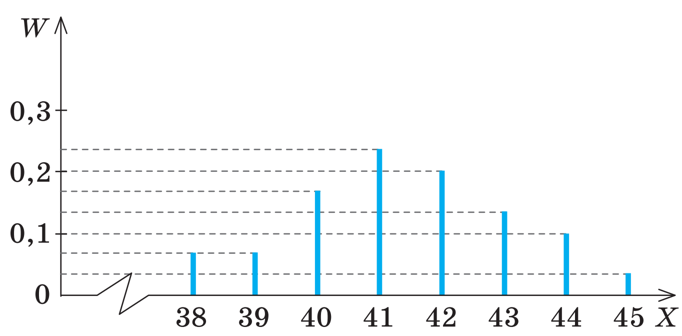


Рис. 13.2.3

Класи	Від 400 до 500	Від 500 до 600	Від 600 до 700	Від 700 до 800	Від 800 до 900	Від 900 до 1000	Від 1000 до 1100
Номер класу X	1	2	3	4	5	6	7
Частота (кількість робітників) M	4	6	18	36	22	10	4

(*перевірка:* $\sum M = 100$).

Наочно частотний розподіл зарплатні за класами можна подати за допомогою полігона частот (рис. 13.2.5) або стовпчастої діаграми (рис. 13.2.6).

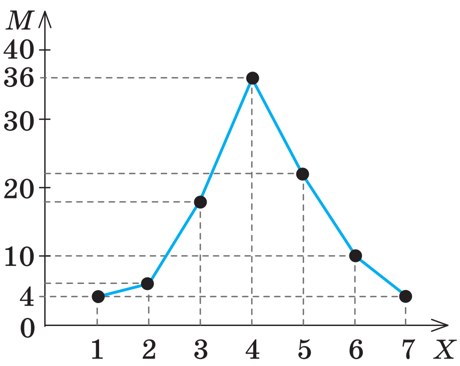


Рис. 13.2.5

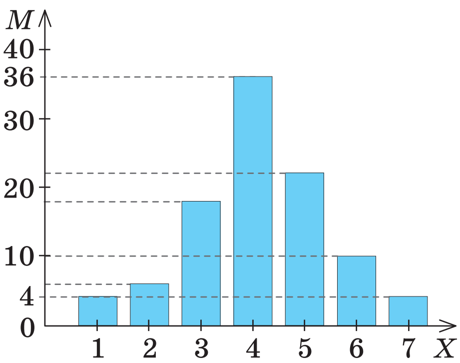


Рис. 13.2.6

2 Числові характеристики рядів даних. Розмах, мода й медіана ряду даних

Іноді вибірку випадкових величин або всю генеральну сукупність цих величин доводиться характеризувати одним числом. На практиці це необхідно, наприклад, для швидкого порівняння двох або більше сукупностей за загальною ознакою.

Розглянемо конкретний приклад.

Нехай після літніх канікул провели опитування 10 дівчат і 9 хлопців одного класу відносно кількості книжок, які вони прочитали за канікули.

Результати було записано в порядку опитування. Одержали такі ряди чисел:

Дівчата: 4, 3, 5, 3, 8, 3, 12, 4, 5, 5.

Хлопці: 5, 3, 3, 4, 6, 4, 4, 7, 4.

Як уже зазначалося, щоб зручніше було аналізувати інформацію, у подібних випадках числові дані ранжирують, розташовуючи їх у порядку зростання (коли кожне наступне число або більше, або не менше за попереднє). У результаті ранжирування одержимо такі ряди:

Дівчата: 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 8, 12. (1)

Хлопці: 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7. (2)

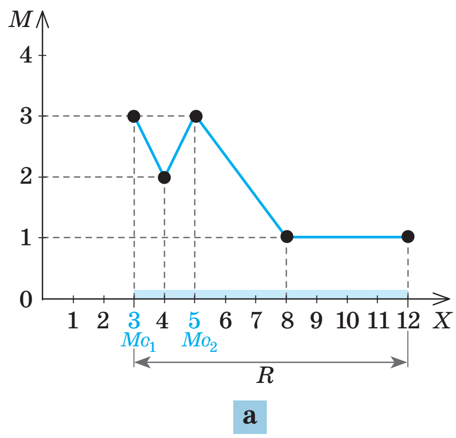
Тоді розподіл за частотами M величин: X — число книжок, прочитаних за канікули дівчатами, й Y — число книжок, прочитаних за канікули хлопцями, можна задати таблицями:

Y	3	4	5	8	12
M	3	2	3	1	1

$$\sum M = n = 10$$

Y	3	4	5	6	7
M	2	4	1	1	1

$$\sum M = n = 9$$



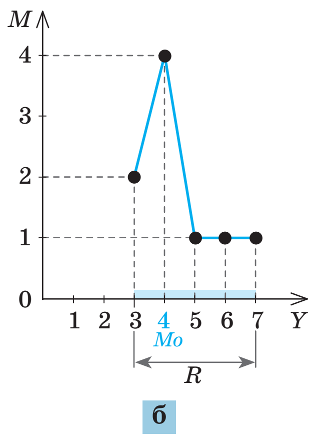


Рис. 13.2.7

Ці розподіли можна проілюструвати також графічно за допомогою полігону частот (рис. 13.2.7, *а*, *б*).

Для порівняння рядів (1) і (2) використовують різні характеристики. Наведемо деякі з них.

Розмахом ряду чисел (позначають R) називають різницю між найбільшим і найменшим із цих чисел. Оскільки ми аналізуємо вибірку деяких величин, то ***розмах вибірки* — це різниця між найбільшим і найменшим значеннями величини у вибірці.**

Для ряду (1) розмах $R=12-3=9$, а для ряду (2) розмах $R=7-3=4$. На графіку розмах — це довжина області визначення полігону частот (рис. 13.2.7).

Однією зі статистичних характеристик ряду даних є його *мода*.

> Мода — від латин. *modus* — міра, правило.

Означення. ***Мода* — це те значення елемента вибірки, яке зустрічається частіше за інші.**

Моду позначають Mo.

Так, у ряді (1) дві моди — числа 3 і 5: $Mo_1=3$, $Mo_2=5$, а в ряді (2) одна мода — число 4: $Mo=4$. На графіку мода — це значення абсциси точки, яка відповідає максимуму полігону частот (рис. 13.2.7). Зазначимо, що моди може й не бути, якщо всі значення ознаки, яка розглядається, зустрічаються однаково часто.

Моду ряду даних зазвичай знаходять тоді, коли хочуть з'ясувати деякий типовий показник. Наприклад, коли вивчаються дані про моделі чоловічих сорочок, які продали в певний день в універмазі, то зручно використати такий показник, як мода, який характеризує модель, що користується найбільшим попитом (власне, цим і пояснюється назва «мода»).

Ще однією статистичною характеристикою ряду даних є його медіана.

> Медіана — від латин. *mediana* — середня.

Означення. ***Медіана* — це так зване серединне значення впорядкованого ряду значень**

Медіану позначають Me.

Медіана поділяє впорядкований ряд даних на дві рівні за кількістю елементів частини.

Якщо кількість чисел у ряді непарна, то медіана — це число, записане посередині.

Наприклад, у ряді (2) непарна кількість елементів $(n=9)$. Тоді його медіаною є число, яке стоїть посередині, тобто на п'ятому місці: $Me=4$.

3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7

4 — медіана

Отже, про хлопців можна сказати, що одна половина з них прочитала не більше

4 книжок, а друга половина — не менше 4 книжок. (Зазначимо, що у випадку непарного n номер середнього члена ряду дорівнює $\frac{n+1}{2}$.)

Якщо кількість чисел у ряді парна, то медіана — це середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині.

Наприклад, у ряді (1) парна кількість елементів $(n=10)$. Тоді його медіаною є число, яке дорівнює середньому арифметичному чисел, які стоять посередині, тобто на п'ятому й шостому місцях: $Me = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$.

3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 8, 12
4,5 — медіана

Отже, про дівчат можна сказати, що одна половина з них прочитала менше 4,5 книжки, а друга половина — більше 4,5 книжки. (Зазначимо, що у випадку парного n номери середніх членів ряду дорівнюють $\frac{n}{2}$ і $\frac{n}{2}+1$.)

3 Середнє значення вибірки

Означення. ***Середнім значенням вибірки*** **називається середнє арифметичне всіх чисел ряду даних вибірки.**

Середнє значення позначають $\bar{X}$.

Якщо в ряді даних записані значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (серед яких можуть бути й однакові), то

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Якщо відомо, що в ряді даних різні значення $x_1, x_2, \ldots, x_k$ зустрічаються відповідно до частот $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (тоді $\sum M = n$), то, замінюючи однакові доданки в чисельнику на відповідні добутки, одержуємо, що середнє арифметичне можна обчислювати за формулою

$$\bar{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}. \qquad (4)$$

Останню формулу зручно використовувати в тих випадках, коли у вибірці розподіл величини за частотами задано у вигляді таблиці. Нагадаємо, що розподіл за частотами M величин: X — число книжок, прочитаних за канікули дівчатами, й Y — число книжок, прочитаних за канікули хлопцями, було задано такими таблицями:

Y	3	4	5	8	12
M	3	2	3	1	1

$$\sum M = n = 10$$

Y	3	4	5	6	7
M	2	4	1	1	1

$$\sum M = n = 9$$

Тоді середні значення заданих вибірок дорівнюють:

$$\bar{X} = \frac{3\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5\cdot 3 + 8\cdot 1 + 12\cdot 1}{10} = \frac{52}{10} = 5{,}2,$$

$$\bar{Y} = \frac{3\cdot 2 + 4\cdot 4 + 5\cdot 1 + 6\cdot 1 + 7\cdot 1}{9} = \frac{40}{9} \approx 4{,}4.$$

Оскільки $\bar{X} > \bar{Y}$, то можна сказати, що за один і той самий проміжок часу дівчата класу читають книжок більше, ніж хлопці.

Зауважимо, що в посібниках зі статистики моду, медіану й середнє значення вибірки об'єднують одним терміном — *міри центральної тенденції*, підкреслюючи тим самим можливість охарактеризувати ряд вибірки одним числом.

Не для кожного ряду даних має сенс формально знаходити центральні тенденції. Наприклад, якщо досліджується ряд

$$5,\ 5,\ 8,\ 110 \qquad (5)$$

річних прибутків чотирьох людей (у тисячах умовних одиниць), то очевидно, що ні мода (5), ні медіана (6,5), ні середнє значення (32) не можуть виступати в ролі єдиної характеристики всіх значень ряду даних. Це пояснюється тим, що розмах ряду (105) є сумірним із найбільшим значенням елемента ряду.

У даному випадку можна шукати центральні тенденції, наприклад, для частини ряду (5):

5, 5, 8,

умовно назвавши його вибіркою річного прибутку низькооплачуваної частини населення.

Якщо у вибірці середнє значення суттєво відрізняється від моди, то його недоречно вибирати як типову характеристику розглянутої сукупності даних (чим більше значення моди відрізняється від середнього значення, тим «більш несиметричним» є полігон частот сукупності).

Запитання

1. Поясніть, що називають полігоном частот ознаки X, яка розглядається. Наведіть приклади побудови полігону частот і полігону відносних частот.

2. На прикладі ряду даних 2, 2, 3, 5, 5, 5, 13 поясніть, що таке розмах, мода, медіана та середнє значення ряду й дайте відповідні означення.

Вправи

13.2.1°. На основі даних таблиці подайте у вигляді стовпчастої і кругової діаграм розподіл значень деякої ознаки X.

1)

X	1	2	3	4
W	0,1	0,3	0,4	0,2

2)

X	1	2	3	4	5
W	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

13.2.2. Побудуйте полігон частот і полігон відносних частот значень деякої ознаки X, розподіл якої подано в таблиці:

1)

X	1	3	5	7	9
M	3	0	5	7	5

2)

X	11	12	13	14	15	16
M	6	5	2	3	1	3

13.2.3. Виміряли зріст 50 старшокласників і результати подали у вигляді таблиці.

149	150	150	151	151	152	152	153	154	154
155	155	155	156	156	157	157	157	158	158
159	159	159	159	161	161	161	162	162	162
162	162	165	166	166	166	167	167	169	170
171	171	173	173	173	175	176	178	180	182

Згрупувавши ці дані за класами 145–149, 150–154, 155–159, 160–164, 165–169, 170–174, 175–179, 180–184, подайте частотний розподіл зросту учнів за цими класами за допомогою: 1) таблиці; 2) полігону частот; 3) стовпчастої діаграми.

13.2.4. Знайдіть розмах, моду, медіану й середнє значення ряду даних деякої величини X:

1) 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5;

2) −3, −2, −2, −1, 0, 2, 2, 2, 3, 5.

Побудуйте полігон частот значень величини X. Укажіть на рисунку розмах, моду й медіану заданого ряду даних.

13.2.5°. На рис. 13.2.8 побудовано полігони, що ілюструють розподіл частоти продажів магазином протягом тижня комп'ютерів (синя лінія) і телевізорів (сіра лінія).

Укажіть два дні, які безпосередньо слідують один за одним, коли:
1) число проданих телевізорів зросло більше, ніж число проданих комп'ютерів;
2) число проданих телевізорів збільшилося, а число проданих комп'ютерів зменшилося;
3) число проданих комп'ютерів зросло, а число проданих телевізорів залишилося тим самим.

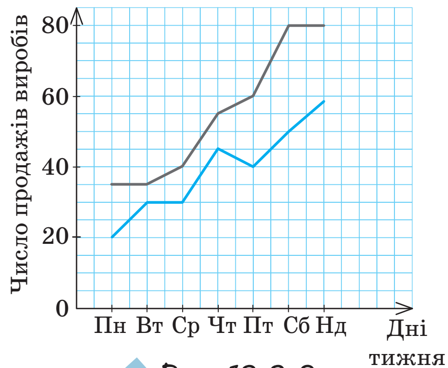


Рис. 13.2.8

13.2.6. Знайдіть розмах, моду, медіану й середнє значення вибірки, заданої таблицею розподілу значень величини X за частотами.

1)

X	2	3	4	5
M	3	4	1	3

2)

X	−1	3	4	5	7
M	2	3	4	4	1

Побудуйте полігон частот значень величини X. Укажіть на рисунку розмах, моду й медіану заданої сукупності даних.

13.2.7. Дівчата 11 класу на уроці фізкультури в стрибках у висоту показали такі результати (у см): 90, 125, 125, 130, 130, 135, 135, 135, 140, 140, 140. Знайдіть моду, медіану й середнє значення цієї сукупності даних. Яке з цих значень найкраще характеризує спортивну підготовку дівчат класу?

Виявіть свою компетентність

13.2.8. За даними Українського центра оцінювання якості освіти учасники ЗНО з математики у 2018 р. отримали такі результати (дані згруповані за класами): з 106 484 учасників 19 806 не подолали поріг, 26 301 учасник отримав від 100 до 120 балів, 17 783 — від 120 до 140 балів, 18 102 — від 140 до 160 балів, 14 695 — від 160 до 180 балів, 9797 — від 180 до 200 балів. Подайте результати тестування за класами у вигляді частотної таблиці, побудуйте полігон частот. Визначте міри центральної тенденції вибірки.

13.2.9. Дослідіть споживання вашою родиною протягом року: 1) свіжих овочів, фруктів та зелені; 2) круп; 3) м'яса та м'ясних продуктів. Побудуйте діаграми, що ілюструють залежність споживання зазначених продуктів від пори року. Зробіть висновки. Скільки ваша родина споживає цих продуктів у середньому на місяць (у розрахунку на одну особу)?

13.2.10. Користуючись таблицею розбудови Київського метрополітену, побудуйте полігон частот кількості станцій за період 1960–2013 рр.

Рік	Кількість станцій	Рік	Кількість станцій	Рік	Кількість станцій
1960	5	1987	28	2010	49
1965	10	1992	35	2011	50
1971	14	2000	40	2012	51
1976	17	2004	43	2013	52
1981	23	2008	46		

13.2.11. Користуючись таблицею статистичних даних щодо кількості медалей, які здобули українські спортсмени на літніх Олімпійських іграх, побудуйте: 1) полігон частот кількості золотих медалей; 2) полігон частот загальної кількості медалей; 3) кругову діаграму розподілу медалей за видами (золоті, срібні та бронзові) на іграх 2008 р.

Рік проведення олімпіади	Кількість здобутих медалей			
	Золоті	Срібні	Бронзові	Усього
1996	9	2	12	23
2000	3	10	10	23
2004	9	5	9	23
2008	7	5	15	27
2012	6	5	8	19
2016	2	5	4	11

13.2.12. У таблиці подано статистичні дані щодо кількості медалей, які здобули українські школярі на Міжнародних математичних олімпіадах у 2013–2018 рр.

Рік проведення олімпіади	Кількість здобутих медалей			
	Золоті	Срібні	Бронзові	Усього
2013	1	3	1	5
2014	2	3	1	6
2015	2	3	1	6
2016	0	2	4	6
2017	1	2	2	5
2018	4	2	0	6

Побудуйте: 1) полігон частот загальної кількості медалей; 2) стовпчасту діаграму розподілу загальної кількості здобутих медалей за роками; 3) полігон частот кількості золотих медалей; 4) кругову діаграму розподілу медалей за видами (золоті, срібні та бронзові) на олімпіаді 2015 р.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 3

1. Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 складено всі можливі п'ятицифрові числа без повторення цифр. Скільки серед цих чисел таких, які починаються записом «423»?

А 2 **Б** 24 **В** 36 **Г** 96 **Д** 118

2. З натуральних чисел від 1 до 30 учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число непарне?

А $\frac{1}{6}$ **Б** $\frac{1}{5}$ **В** $\frac{1}{4}$ **Г** $\frac{1}{3}$ **Д** $\frac{1}{2}$

3. У коробці лежать 60 різнокольорових кульок: червоні, сині і жовті. З'ясуйте, скільки жовтих кульок лежить у коробці, якщо ймовірність вибору випадковим чином жовтої кульки дорівнює $\frac{1}{3}$.

А 10 **Б** 15 **В** 20 **Г** 30 **Д** 40

4. Установіть відповідність між центральними тенденціями (1–3) вибірки та їхніми значеннями (А–Г).

1 Середнє значення вибірки: 10; 11; 10; 9; 8; 10; 8; 9; 9; 10	**А** 9,4
2 Мода вибірки: 10; 11; 10; 9; 8; 10; 8; 9; 9; 10	**Б** 9,5
3 Медіана вибірки: 10; 11; 10; 9; 8; 10; 8; 9; 9; 10	**В** 9,7
	Г 10

5. Гральний кубик підкидають двічі. Знайдіть імовірність того, що випаде різна кількість очок.

6. Розв'яжіть рівняння $C_x^2 + C_{x+1}^2 = 49$.

7. У партії з 10 деталей 8 деталей стандартні. Знайдіть імовірність того, що серед навмання вибраних 3 деталей тільки одна стандартна.

8. Три стрільці зробили по одному пострілу. Ймовірність влучення в ціль першим стрільцем дорівнює 0,8, другим — 0,75, третім — 0,7. Яка ймовірність точно двох влучень?

Пройдіть онлайн-тестування на сайті *interactive.ranok.com.ua*

Теми навчальних проектів

1. Комбінаторика в навколишньому житті.
2. Ймовірність навколо нас.
3. Випадкові величини навколо нас і їх числові характеристики.
4. Частота в статистиці і розв'язування економічних задач.
5. Математична статистика навколо нас.
6. Жінки в математиці — від минулого до сьогодення (дослідження динаміки зміни числа жінок, що займаються математикою, у світі, в Україні).

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

П. Ферма
(1601–1665)

Б. Паскаль
(1623–1662)

Х. Гюйґенс
(1629–1695)

Елементарні задачі, які пізніше були віднесені до стохастики, тобто до комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики, ставилися й розв'язувалися ще за часів Стародавніх Єгипту, Греції та Риму. Цей період так званої передісторії теорії ймовірностей закінчився в XVI ст. працями італійських математиків **Д. Кардано** (1501–1576), **Н. Тарталья** (1499–1557), **Ґ. Ґалілея** (1564–1642). У цих працях уже фігурує поняття ймовірності, використовується теорема про ймовірність добутку незалежних подій, висловлюються деякі міркування щодо так званого закону великих чисел. У XVII–XVIII ст. питаннями теорії ймовірностей цікавилися французькі математики **П. Ферма** (1601–1665) і **Б. Паскаль** (1623–1662), нідерландський математик **Х. Гюйґенс** (1629–1695), швейцарські математики **Я. Бернуллі** (1654–1705), **Н. Бернуллі** (1687–1759), **Д. Бернуллі** (1700–1782) та російський математик **Л. Ейлер** (1707–1788). У своїх працях вони вже використовували теореми додавання і множення ймовірностей, поняття залежних та незалежних подій, математичного сподівання.

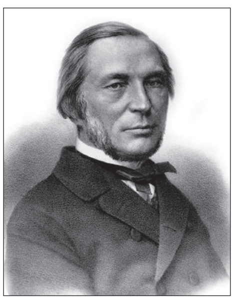
Велику роль у розповсюдженні ідей теорії ймовірностей та математичної статистики відіграли видатні українські математики **В. Я. Буняковський** (1804–1889) та **М. В. Остроградський** (1801–1862).

Подальший розвиток теорії ймовірностей потребував уточнення її основних положень. Велику роботу в цьому напрямку провів видатний російський математик **П. Л. Чебишов** (1821–1894). Його учень **А. А. Марков** (1856–1922) став видатним математиком саме завдяки своїм дослідженням у теорії ймовірностей.

Книжка **А. А. Маркова** «Числення ймовірностей», перше видання якої відбулося в 1900 р., а четверте — у 1924 р., протягом багатьох років була найкращою серед тих, за якими навчалися багато майбутніх математиків.

У XX ст. теорія ймовірностей поступово перетворилась на строгу аксіоматичну теорію. Це відбулося завдяки працям багатьох математиків. Але дійсно вирішальним етапом розвитку теорії ймовірностей стала праця **А. М. Колмогорова** (1908–1987) «Основні поняття теорії ймовірностей» (видана в 1933 р.), у якій він виклав свою аксіоматику теорії ймовірностей. Завдяки цьому теорія ймовірностей стала нарівні з іншими математичними дисциплінами.

Великі досягнення в теорії ймовірностей та математичній статистиці мали також російські та українські математики **О. Я. Хінчин** (1894–1959), **Є. Є. Слуцький** (1880–1948), **Б. В. Гнєденко** (1911–1995), **Й. І. Гіхман** (1918–1985), **В. С. Михалевич** (1930–1994), **М. Й. Ядренко** (1932–2004), **Ю. М. Єрмольєв** (1936 р. н.), **І. М. Коваленко** (нар. 1935), **В. С. Королюк** (нар. 1925), **А. В. Скороход** (1930–2011), **А. Ф. Турбін** (нар. 1940) та інші.



П. Л. Чебишов
(1821–1894)

А. А. Марков
(1856–1922)

А. М. Колмогоров
(1908–1987)

М. Й. Ядренко
(1932–2004)

Розділ 4

РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- систематизуєте й узагальните свої знання й уміння, пов'язані з загальними методами розв'язування рівнянь і нерівностей, зокрема з параметрами;
- систематизуєте методи розв'язування різних типів рівнянь і нерівностей та їх систем;
- навчитеся розв'язувати деякі складні рівняння й нерівності

§ 14 СИСТЕМАТИЗАЦІЯ Й УЗАГАЛЬНЕННЯ ВІДОМОСТЕЙ ПРО РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ

14.1. Рівняння і нерівності з однією змінною

Таблиця 23

1. Область допустимих значень (ОДЗ)

Означення	Приклад
Областю допустимих значень **(або областю визначення) рівняння (або нерівності) називається спільна область визначення для всіх функцій, що стоять у лівій і правій частинах рівняння (або нерівності).**	Для рівняння $\sqrt{x+2}=x$ ОДЗ: $x+2\geqslant 0$, тобто $x\geqslant -2$, оскільки область визначення функції $f(x)=\sqrt{x+2}$ визначається умовою $x+2\geqslant 0$, а областю визначення функції $g(x)=x$ є множина всіх дійсних чисел.

2. Рівняння-наслідки

Означення й орієнтир	Приклад
Якщо кожний корінь першого рівняння є коренем другого, то друге рівняння називається ***наслідком*** **першого.** **Якщо з правильності першої рівності випливає правильність кожної наступної, одержуємо рівняння-наслідки.** *При цьому можлива поява сторонніх коренів*. **Тому при використанні рівнянь-наслідків перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою розв'язування.**	Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+2}=x$. ▶ Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата: $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2$; $x+2=x^2$; $x^2-x-2=0$; $x_1=2,\ x_2=-1$. *Перевірка:* $x=2$ — корінь; $x=-1$ — сторонній корінь. *Відповідь*: 2. ◁

3. Рівносильні рівняння і нерівності

Означення	Найпростіші теореми
Два рівняння (нерівності) називаються ***рівносильними*** **на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки.** *Тобто кожен розв'язок першого рівняння (нерівності) є розв'язком другого, і навпаки, кожний розв'язок другого є розв'язком першого* (схеми такого розв'язування рівнянь і нерівностей наведено в пп. 4 і 6 цієї таблиці).	**1. Якщо з однієї частини рівняння (нерівності) перенести в другу доданки з протилежним знаком, одержимо рівняння (нерівність), рівносильне заданому (на будь-якій множині).** **2. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля (або на одну й ту саму функцію, що визначена і відмінна від нуля на ОДЗ заданого рівняння), одержимо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого).**

4. Схема пошуку плану розв'язування рівнянь

Розв'язування рівнянь

за допомогою **рівнянь-наслідків**	за допомогою **рівносильних перетворень**
1 ↓ 2 Перетворення, що гарантують збереження правильності рівності	Урахування ОДЗ початкового рівняння
Перевірка коренів підстановкою в початкове рівняння	1 ↓↑ 2 Збереження на ОДЗ правильності рівності при прямих і зворотних перетвореннях

застосуванням властивостей функцій

1 — початкове рівняння;

2 — рівняння, одержане в результаті перетворення початкового;

↓, ↑ — символічне зображення напрямку виконаних перетворень

5. Заміна змінних

Орієнтир	Приклад
Якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз зі змінною позначити однією буквою (новою змінною).	Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$. ▶ Виконаємо заміну $\sin x = t$. $t^2 - 2t - 3 = 0;$ $t_1 = 3,\ t_2 = -1.$ 1. При $t = 3$ маємо $\sin x = 3$ — коренів немає, оскільки $\|3\| > 1$. 2. При $t = -1$ маємо $\sin x = -1$, тоді $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$ *Відповідь:* $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. ◁

6. Схема пошуку плану розв'язування нерівностей

Розв'язування нерівностей

за допомогою **рівносильних перетворень**	за допомогою **методу інтервалів** $(f(x) \gtrless 0)$
Урахування ОДЗ початкової нерівності 1 ↓↑ 2 Збереження на ОДЗ правильності нерівності при прямих і зворотних перетвореннях	1. Знайти ОДЗ. 2. Знайти нулі функції: $f(x) = 0$. 3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції $f(x)$ у кожному проміжку, на які ОДЗ розбивається нулями. 4. Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності.

1 — початкова нерівність;

2 — нерівність, одержана в результаті перетворення початкової;

↓, ↑ — символічне зображення виконаних перетворень (із вказівкою напрямку їх виконання)

7. Метод інтервалів (розв'язування нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$)

План

1. **Знайти ОДЗ.**
2. **Знайти нулі функції: $f(x)=0$.**
3. **Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному проміжку, на які ОДЗ розбивається нулями.**
4. **Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності** (*якщо розв'язуємо нестрогу нерівність, то всі нулі функції слід включити до відповіді* — у наведеному прикладі це числа -2 і 2).

Приклад

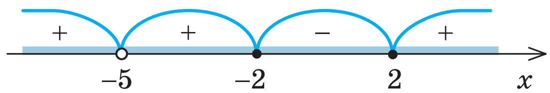
Розв'яжіть нерівність $\dfrac{x^2-4}{(x+5)^2} \geqslant 0$.

Розв'язання

▶ Нехай $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x+5)^2}$.

1. ОДЗ: $(x+5)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -5$.
2. Нулі функції: $f(x)=0$.

$\dfrac{x^2-4}{(x+5)^2}=0$; $x^2-4=0$; $x_1=-2$, $x_2=2$ (входять до ОДЗ).

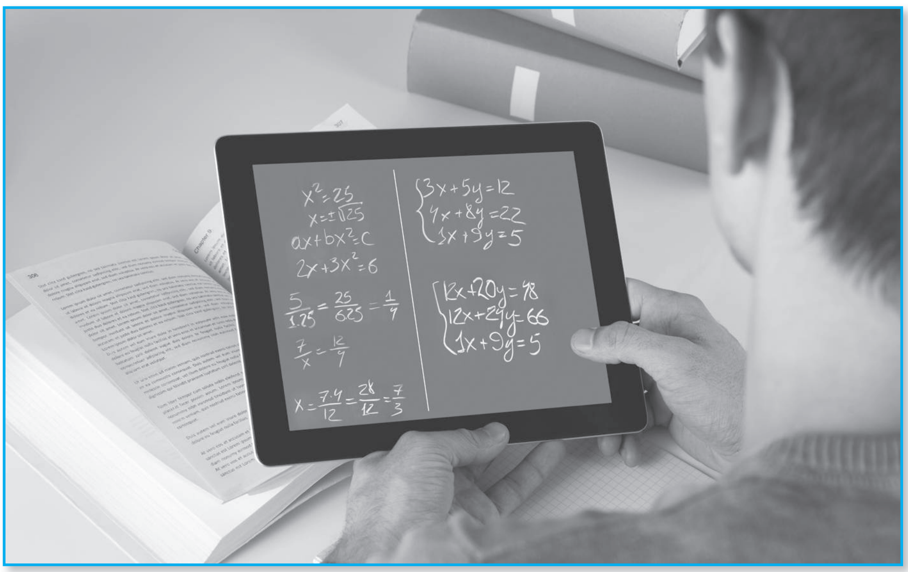
3. 

Відповідь: $(-\infty; -5) \cup (-5; -2] \cup [2; +\infty)$. ◁

8. Теореми про рівносильність нерівностей

1. **Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число** (*або на одну й ту саму функцію, що визначена і додатна на ОДЗ заданої нерівності*), **не змінюючи знак нерівності, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).**

2. **Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число** (*або на одну й ту саму функцію, що визначена і від'ємна на ОДЗ заданої нерівності*) **і змінити знак нерівності на протилежний, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).**



Нагадаємо, як можна розв'язувати рівняння і нерівності, що містять знак модуля.

Таблиця 24

1. Схема розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять знак модуля

Розв'язування

за означенням

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{при } a > 0, \\ 0, & \text{при } a = 0, \\ -a, & \text{при } a < 0 \end{cases}$$

з використанням спеціальних співвідношень

за геометричним змістом

$|a|$ — *відстань на числовій прямій від точки 0 до точки a*

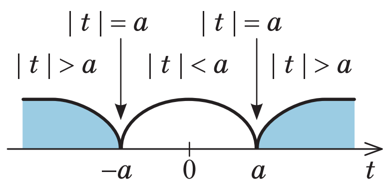
1. $|f(x)| = a$.
2. $|f(x)| = |g(x)|$.
3. $|f(x)| > a$.
4. $|f(x)| < a$

за загальною схемою

1. Знайти ОДЗ.
2. Знайти нулі всіх підмодульних функцій.
3. Позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки.
4. Знайти розв'язок у кожному з проміжків (і перевірити, чи входить цей розв'язок у розглянутий проміжок)

2. Використання геометричного змісту модуля (при $a > 0$)

1. $|f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = a$ або $f(x) = -a$.
2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ або $f(x) = -g(x)$.
3. $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ або $f(x) > a$.
4. $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$



Узагальнення

5. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x) \text{ або } f(x) = -g(x). \end{cases}$
6. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x)$ або $f(x) > g(x)$.
7. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

3. Використання спеціальних співвідношень

1. $|u| = u \Leftrightarrow u \geqslant 0$.
2. $|u| = -u \Leftrightarrow u \leqslant 0$.
3. $|u| = |v| \Leftrightarrow u^2 = v^2$.
4. $|u| > |v| \Leftrightarrow u^2 > v^2$,
   тоді $|u| - |v| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$;
   знак різниці модулів двох виразів збігається зі знаком різниці їх квадратів.
5. $|u| + |v| = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$
6. $|u| + |v| = -u - v \Leftrightarrow \begin{cases} u \leqslant 0, \\ v \leqslant 0. \end{cases}$
7. $|u| + |v| = |u + v| \Leftrightarrow uv \geqslant 0$.
8. $|u| + |v| = |u - v| \Leftrightarrow uv \leqslant 0$.
9. $|x - a| + |x - b| = b - a \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$, де $a < b$.

14.2. Системи рівнянь і нерівностей

Таблиця 25

1. Системи рівнянь і нерівностей

<table>
<tr><th>Поняття системи та її розв'язків</th><th>Приклади</th></tr>
<tr><td>Якщо ставиться завдання знайти всі спільні розв'язки двох (або більше) рівнянь (або нерівностей) з однією або кількома змінними, то кажуть, що потрібно розв'язати систему рівнянь (або нерівностей).
Записують систему рівнянь (нерівностей), об'єднуючи їх фігурною дужкою.
Розв'язком системи називається таке значення змінної або такий упорядкований набір значень змінних (якщо змінних декілька), що задовольняє всі рівняння (чи нерівності) системи.
Розв'язати систему рівнянь (або нерівностей) — значить знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.
Якщо система не має розв'язку, то її називають несумісною.</td><td>$\begin{cases} x-y=4, \\ 2x+y=11 \end{cases}$ — система двох рівнянь із двома змінними.
Пара чисел $(5;1)$, тобто $\begin{cases} x=5, \\ y=1 \end{cases}$ — розв'язок системи.
$\begin{cases} x^2-y+z=0, \\ xy+xz+yz=19, \\ x+y-z=2 \end{cases}$ — система трьох рівнянь із трьома змінними.
Трійка чисел $(1;4;3)$,
тобто $\begin{cases} x=1, \\ y=4, \\ z=3 \end{cases}$ — один із розв'язків системи.</td></tr>
</table>

2. Системи-наслідки

<table>
<tr><th>Означення</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td>Якщо кожний розв'язок першої системи рівнянь є розв'язком другої, то другу систему називають наслідком першої.
При використанні систем-наслідків можлива поява сторонніх розв'язків, тому перевірка підстановкою розв'язку в початкову систему є складовою розв'язування системи.</td><td>Розв'яжіть систему $\begin{cases} \dfrac{y}{x-1}=1, \\ x^2=y+1. \end{cases}$
▶ Із першого рівняння системи: $y=x-1$. Підставляємо y в друге рівняння системи й одержуємо: $x^2=x$; $x_1=0$, $x_2=1$. Тоді $y_1=-1$, $y_2=0$.
Перевірка:
Пара чисел $(0;-1)$ задовольняє обидва рівняння системи і є її розв'язком. Пара чисел $(1;0)$ не задовольняє перше рівняння і не є розв'язком системи. Відповідь: $(0;-1)$. ◁</td></tr>
</table>

3. Рівносильність систем рівнянь і нерівностей

<table>
<tr><td>Дві системи рівнянь (чи нерівностей) називаються рівносильними на деякій множині, якщо на цій множині вони мають однакові розв'язки (тобто кожний розв'язок першої системи на цій множині є розв'язком другої, і навпаки, кожний розв'язок другої системи є розв'язком першої).</td><td>Областю допустимих значень (ОДЗ) системи називають спільну область визначення всіх функцій, що входять до запису цієї системи.
Усі рівносильні перетворення систем виконують на ОДЗ початкової системи.</td></tr>
</table>

Найпростіші властивості рівносильних систем

1. Якщо змінити порядок запису рівнянь (чи нерівностей) заданої системи, одержимо систему, рівносильну заданій.

2. Якщо одне з рівнянь (або нерівностей) системи замінити на рівносильне йому рівняння (нерівність), то одержимо систему, рівносильну заданій.

3. Якщо в системі рівнянь з одного рівняння виразити одну змінну через інші й одержаний вираз підставити замість цієї змінної в усі інші рівняння системи, то одержимо систему, рівносильну заданій (на її ОДЗ).

4. Якщо будь-яке рівняння системи замінити сумою цього рівняння, помноженого на число $\alpha \neq 0$, і якогось іншого рівняння системи, помноженого на число $\beta \neq 0$ (а усі інші рівняння залишити без зміни), то одержимо систему, рівносильну заданій.

4. Основні способи розв'язування систем рівнянь

Спосіб підстановки

Виражаємо з одного рівняння системи одну змінну через іншу (або через інші) та підставляємо одержаний вираз замість відповідної змінної в усі інші рівняння системи (потім розв'язуємо одержане рівняння або систему і підставляємо результат у вираз для першої змінної).

Приклад. Розв'язіть систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

▶ Із першого рівняння системи $y = 2x - 3$. Підставляємо в друге рівняння системи й одержуємо $x + 2x - 3 = 3$. Звідси $x = 2$. Тоді $y = 2x - 3 = 1$.

Відповідь: $(2; 1)$. ◁

Спосіб додавання

Якщо перше рівняння системи замінити сумою першого рівняння, помноженого на число $\alpha \neq 0$, і другого, помноженого на число $\beta \neq 0$ (а всі інші рівняння залишити без зміни), одержимо систему, рівносильну заданій.

Приклад. Розв'язіть систему $\begin{cases} 5x - 3y = 9, \\ 3x + 2y = 13. \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{matrix}$

▶ Помножимо обидві частини першого рівняння системи на 2, а другого — на 3 (щоб одержати як коефіцієнти при змінній y протилежні числа) і почленно додамо отримані рівняння. З останнього одержаного рівняння знаходимо значення x, підставляємо результат у будь-яке рівняння системи і знаходимо значення y.

$$\begin{cases} 10x - 6y = 18, \\ 9x + 6y = 39. \end{cases} \Big| +$$

$$19x = 57,$$

$$x = 3.$$

Тоді $3 \cdot 3 + 2y = 13$; $2y = 4$; $y = 2$.

Відповідь: $(3; 2)$. ◁

Графічне розв'язування систем рівнянь із двома змінними

Виконуємо рівносильні перетворення заданої системи так, щоб було зручно будувати графіки всіх рівнянь, що входять до системи. Потім будуємо відповідні графіки і знаходимо координати точок перетину побудованих ліній: ці координати і є розв'язками системи.

Приклади

1. Розв'яжіть графічно систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

▶ Задана система рівносильна системі

$$\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = 3 - x. \end{cases}$$

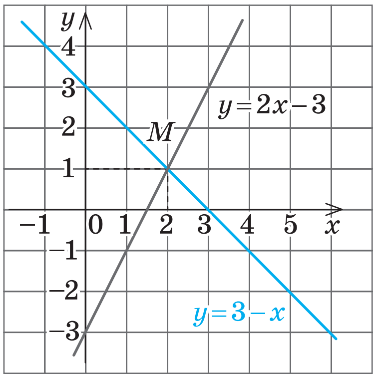
Графіком кожного з рівнянь системи є пряма. Для побудови прямої достатньо побудувати дві її точки. Наприклад,

для $y = 2x - 3$ такі:

x	0	1
y	-3	-1

для $y = 3 - x$ такі:

x	0	1
y	3	2



Графіки перетинаються в точці $M(2; 1)$. Отже, пара чисел $(2; 1)$ — єдиний розв'язок заданої системи.

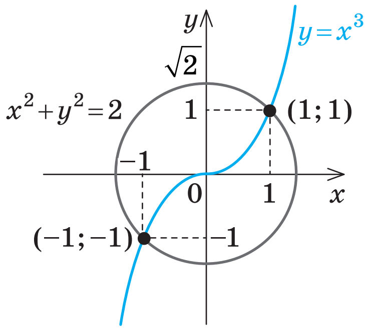
Відповідь: $(2; 1)$. ◁

2. Розв'яжіть графічно систему $\begin{cases} x^2 = 2 - y^2, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$

▶ Задана система рівносильна системі

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^3. \end{cases}$$

Графік першого рівняння системи — коло радіуса $\sqrt{2}$ з центром у початку координат, а графік другого — кубічна парабола $y = x^3$.



Ці два графіки перетинаються у двох точках з координатами $(-1; -1)$ і $(1; 1)$.

Відповідь: $(-1; -1)$, $(1; 1)$ — розв'язки системи. ◁

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Загальні методи розв'язування рівнянь і нерівностей

Ці методи, а також відповідні орієнтири для їх використання, наведені в табл. 23, були детально розібрані в підручнику для 10 класу (§ 3, 4, 7–9, 36). Нагадаємо, що загальні методи, пов'язані із застосуванням властивостей функцій до розв'язування рівнянь, розглянуто також в цьому підручнику в табл. 11 (§ 8).

Усі рівняння і нерівності, розглянуті в підручниках для 10 і 11 класів, ми розв'язували з використанням загальних методів (див., наприклад, § 6). До них за необхідності додавали спеціальні прийоми розв'язування деяких типів рівнянь чи нерівностей (див., наприклад, схему розв'язування показникових рівнянь у табл. 4 в п. 3.2).

Аналогічно можна підійти до вибору способу і складання плану розв'язування рівняння або нерівності.

1. Спочатку *обрати загальний спосіб розв'язування рівняння або нерівності та згадати орієнтири для його реалізації* (див. пп. 4 і 6 табл. 23).

Наприклад, якщо для розв'язування рівняння ви вирішили використати рівняння-наслідки, то в кінці обов'язково доведеться виконати перевірку одержаних коренів (і, оформлюючи розв'язання, записати або саму перевірку, або висновок на кшталт «Перевірка показує, що $x = \dots$ — корінь, а $x = \dots$ — сторонній корінь», який свідчить, що перевірку ви виконали усно).

2. *Для виконання перетворень заданого рівняння (нерівності) використати відповідні формули* (залежно від виду рівняння або нерівності) *чи властивості відповідних функцій або спеціальні орієнтири чи теореми*, які розглядали під час розв'язування рівнянь і нерівностей певного виду (цілі, дробові, ірраціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні).

Нагадаємо, що з означення рівняння-наслідку (*якщо кожний корінь першого рівняння є коренем другого, то друге рівняння називається наслідком першого*) одержуємо **орієнтир:**

для того щоб одержати рівняння-наслідок, достатньо розглянути задане рівняння як правильну числову рівність і гарантувати (тобто мати можливість обґрунтувати), що кожне наступне рівняння буде правильною числовою рівністю.

Справді, якщо дотримуватися цього орієнтира, то, розглядаючи задане рівняння як правильну числову рівність, ми фактично підставляємо в перше рівняння замість змінної його корінь. Друге рівняння теж є правильною числовою рівністю, тоді розглянутий корінь першого рівняння є коренем і другого рівняння. Це означає, що друге рівняння є наслідком першого. Оскільки в **результаті використання рівнянь-наслідків можлива поява сторонніх коренів, то перевірка підстановкою коренів у початкове рівняння є складовою розв'язування** (див. розв'язання рівняння $\sqrt{x+2} = x$ за допомогою рівнянь-наслідків у п. 2 табл. 23).

Аналогічний **орієнтир** для рівносильних перетворень рівнянь і нерівностей застосовували і в курсі 10 класу:

для виконання рівносильних перетворень рівнянь або нерівностей (див. схему в п. 4 табл. 23) достатньо:
1. Урахувати ОДЗ заданого рівняння (нерівності).
2. Стежити за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильної рівності (нерівності).

Міркуючи, як і у випадку орієнтира для рівнянь-наслідків, одержуємо таке. Якщо дотримуватися наведеного орієнтира, то на ОДЗ кожний розв'язок першого рівняння (нерівності) буде розв'язком другого (другої), і навпаки, кожен розв'язок другого рівняння (нерівності) буде розв'язком першого (першої), тобто на ОДЗ розглянуті рівняння (нерівності) будуть рівносильними. (Приклад використання цього орієнтира для розв'язування рівнянь і доведення теорем про рівносильність рівнянь наведено в п. 6.1, а для розв'язування нерівностей — в п. 6.2.)

Іноді зручно виконувати рівносильні перетворення не на всій ОДЗ, а тільки на тій її частині, де містяться корені заданого рівняння (чи розв'язки нерівності).

Наприклад, для розв'язування рівняння

$$\sqrt{x+2} = x \qquad (1)$$

оберемо рівносильні перетворення.

ОДЗ рівняння (1): $x+2 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant -2$. На цій ОДЗ права частина рівняння (1) може бути і додатною, і від'ємною. Тому при піднесенні обох частин рівняння до квадрата ми можемо гарантувати тільки правильність прямих перетворень (якщо числа дорівнюють одне одному, то і квадрати їх обов'язково будуть дорівнювати один одному), а обернених — ні (якщо $a^2=b^2$, то не обов'язково виконується рівність $a=b$, наприклад, $2^2=(-2)^2$, але $2\neq -2$).

Спробуємо розглянути не всю ОДЗ, а тільки ту її частину, де розташовані корені заданого рівняння.

Для всіх коренів рівняння (1) має виконуватися умова $x\geqslant 0$ (при підстановці кореня рівняння (1) перетворюється на правильну рівність, ліва частина якої невід'ємна, отже, для всіх коренів і права частина буде невід'ємною).

За умови $x\geqslant 0$ *обидві частини рівняння* (1) *невід'ємні, і при піднесенні до квадрата ми одержуємо рівносильне рівняння* (для невід'ємних значень аргумента функція $y=t^2$ є зростаючою і кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргумента, тому, якщо $a^2=b^2$ при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, то обов'язково виконується рівність $a=b$):

$$x+2=x^2. \qquad (2)$$

Для всіх коренів рівняння (2) його права частина невід'ємна: $x^2\geqslant 0$, тоді й ліва частина буде невід'ємною: $x+2\geqslant 0$. Це означає, що для всіх коренів рівняння (2) ОДЗ рівняння (1) виконується автоматично і можна не записувати його до розв'язання (але потрібно вміти пояснювати, чому не записали). А записувати і враховувати треба тільки обмеження $x\geqslant 0$.

Тоді $x^2-x-2=0$; $x_1=2$ — корінь (задовольняє умову $x\geqslant 0$), $x_2=-1$ — сторонній корінь (не задовольняє умову $x\geqslant 0$).

Відповідь: 2.

Зауваження 1. Наведене розв'язання можна записати також за допомогою знака рівносильності ($\Leftrightarrow$) так:

$$\sqrt{x+2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x+2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x^2-x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x_1=-1 \text{ або } x_2=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Зауваження 2. У наведених вище міркуваннях щодо розв'язування рівняння (1) ми фактично обґрунтували теорему (наведену й обґрунтовану в підручнику для 10 класу):

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geqslant 0,\\ f(x)=g^2(x),\end{cases} \qquad (3)$$

яку можна використовувати під час розв'язування ірраціональних рівнянь виду $\sqrt{f(x)}=g(x)$.

2 Системи рівнянь і нерівностей

З поняттями системи рівнянь і нерівностей, її розв'язку та з основними методами розв'язування систем рівнянь, поданими в табл. 25, ви знайомі з курсу алгебри 7–9 класів (і використовували їх під час розв'язування систем у 10–11 класах). Нагадаємо, що аналогічно до відповідних понять, пов'язаних з рівняннями або нерівностями, уводять поняття області допустимих значень системи рівнянь або нерівностей (див. п. 3 табл. 25), поняття систем-наслідків для рівнянь (п. 2 табл. 25 та рівносильних систем рівнянь і нерівностей (п. 3 табл. 25).

Усі наведені означення відносяться не тільки до систем рівнянь або систем нерівностей, а й до змішаних систем, до яких входять і рівняння, і нерівності.

З означення *системи-наслідку* для системи рівнянь (*якщо кожний розв'язок першої системи рівнянь є розв'язком другої, то другу систему називають наслідком першої*) випливає такий **орієнтир**.

Для того щоб одержати систему-наслідок, достатньо розглянути задану систему рівнянь як систему правильних числових рівностей і гарантувати (тобто мати можливість обґрунтувати), що кожну наступну систему рівнянь можна одержати як систему правильних числових рівностей.

Справді, якщо дотримуватися цього орієнтира, то кожний розв'язок першої системи перетворює всі рівняння системи на правильні числові рівності. Але тоді друга система теж міститиме всі правильні числові рівності, тобто розглядувані значення змінної (або впорядковані набори декількох змінних) є розв'язками і другої системи, а це й означає, що друга система є наслідком першої. Також слід ураховувати, що при **використанні систем-наслідків можлива поява сторонніх розв'язків, і тому перевірка підстановкою розв'язків у початкову систему є складовою розв'язування** (див. приклад у п. 2 табл. 23).

Аналогічно обґрунтовується, що

при рівносильних перетвореннях систем рівнянь чи нерівностей необхідно враховувати ОДЗ заданої системи і гарантувати для всіх рівнянь збереження правильності рівностей на кожному кроці розв'язування (а для систем нерівностей — збереження правильності нерівностей) як при прямих перетвореннях, так і при зворотних.

Цей **орієнтир** дозволяє обґрунтувати найпростіші властивості рівносильних систем рівнянь і нерівностей, які наведено в п. 3 табл. 25.

Проведіть таке обґрунтування самостійно.

Для розв'язування деяких систем іноді використовують властивості функцій (див., наприклад, табл. 11). Слід також пам'ятати, що для розв'язування деяких рівнянь, нерівностей та їх систем зручно використовувати *заміну змінних* (див., наприклад, розв'язання рівняння в п. 5 табл. 23, нерівності — у п. 3 табл. 5, системи — у прикладі 5 до п. 3.2 підручника).

Іноді під час розв'язування рівнянь і нерівностей доводиться переходити не тільки до рівносильних систем рівнянь чи нерівностей (див., наприклад, формулу (2)), а й до *сукупностей рівнянь або нерівностей* (або їх систем).

Розв'язати сукупність рівнянь, нерівностей чи їх систем — **означає знайти такі значення змінної** або такі набори значень змінних (якщо змінних декілька), **кожне з яких є розв'язком хоча б одного з рівнянь (нерівностей)**, що входять до сукупності, і **при цьому решта рівнянь (нерівностей) визначена, або довести, що таких наборів чисел не існує.**

З цього випливає, що *областю допустимих значень (ОДЗ) сукупності є спільна область визначення для всіх функцій, які входять до запису сукупності*.

Як і у випадку рівнянь, нерівностей або їх систем, **дві сукупності рівнянь, нерівностей або їх систем називаються *рівносильними* на деякій множині, якщо вони на цій множині мають однакові розв'язки.** Інакше кажучи, кожний розв'язок першої сукупності на цій множині є розв'язком другої, і навпаки, кожний розв'язок другої є розв'язком першої.

Сукупність рівнянь, нерівностей чи їх систем записують, користуючись сполучником «або». Можна також використовувати спеціальний знак сукупності «[».

Наприклад, рівняння

$\sqrt{2x+2}\left(x^2+3x-4\right)=0$ на його ОДЗ: $2x+2\geqslant 0$ рівносильне сукупності

$$\sqrt{2x+2}=0 \qquad (4)$$

або

$$x^2+3x-4=0. \qquad (5)$$

Рівняння (4) має корінь $x=-1$, який входить до ОДЗ заданого рівняння (тоді рівняння (5) визначене). А рівняння (5) має корені $x_1=1$ — входить до ОДЗ заданого рівняння (тоді рівняння (4) визначене) і $x_2=-4$ — не входить до ОДЗ заданого рівняння (тоді рівняння (4) не визначене). Отже, розв'язками розглянутої сукупності (тобто і коренями заданого рівняння) є тільки $x=-1$ і $x=1$.

Розглянуте розв'язання можна записувати, використовуючи знаки рівносильності, сукупності та системи. Наведемо декілька можливих способів такого запису (проаналізуйте кожний із цих способів), але таке оформлення запису розв'язання не є обов'язковим.

I спосіб

$$\sqrt{2x+2}\left(x^2+3x-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+2}=0,\\ x^2+3x-4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+2}=0,\\ \left\{\begin{array}{l}x^2+3x-4=0,\\ 2x+2\geqslant 0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1.\end{array}\right.$$

II спосіб

$$\sqrt{2x+2}\left(x^2+3x-4\right)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x+2\geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+2}=0,\\ x^2+3x-4=0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\geqslant -2,\\ \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1,\\ x=-4\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1.\end{array}\right.$$

III спосіб

$$\sqrt{2x+2}\left(x^2+3x-4\right)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x+2\geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+2}=0,\\ x^2+3x-4=0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x+2\geqslant 0,\\ \sqrt{2x+2}=0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+2\geqslant 0,\\ x^2+3x-4=0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ \left\{\begin{array}{l}x\geqslant -2,\\ \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-4\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1.\end{array}\right.$$

3 Рівняння і нерівності з параметрами

Розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами детально розглянуто в курсі 10 класу.

Розв'язуючи завдання з параметрами, часто доводиться розбивати область допустимих значень параметра на проміжки, виходячи з такої умови: метод розв'язування рівняння (нерівності) має залишатися одним і тим самим, поки значення параметра належить одному проміжку. При цьому не змінюється на проміжку й вигляд запису розв'язків рівняння (нерівності) з використанням параметра.

Методи розв'язування завдань з параметрами такі самі, як і методи розв'язування аналогічних рівнянь, нерівностей або їх систем без параметрів. Нагадаємо **орієнтир**, який ми використовували для розбиття ОДЗ параметра на проміжки.

Будь-яке рівняння (нерівність) з параметрами розв'язують як звичайне рівняння (нерівність) доти, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язання, можливо виконати однозначно. Якщо якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язування потрібно розбити на кілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно.

Приклад

Розв'яжіть рівняння $ax+1=\dfrac{4a+2}{x}$, де x — змінна.

Розв'язання	Коментар
▶ ОДЗ: $x\neq 0$. $ax^2+x-(4a+2)=0$. 1) Якщо $a=0$, одержуємо лінійне рівняння $x-2=0$. Звідси $x=2$. 2) Якщо $a\neq 0$, розв'язуємо квадратне рівняння: $D=1+4a(4a+2)=16a^2+8a+1=(4a+1)^2$; $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm(4a+1)}{2a}$.	Вирази в обох частинах рівняння існують тоді й тільки тоді, коли знаменник дробу відмінний від нуля. Помножимо обидві частини заданого рівняння на вираз x — спільний знаменник дробів — і одержимо ціле рівняння, яке за умови $x\neq 0$ (тобто на ОДЗ даного рівняння) рівносильне заданому. При $a=0$ задане рівняння не є квадратним.

Тоді $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{2a+1}{a}$.

Ураховуємо ОДЗ: $x_1 = 2$ — корінь (входить до ОДЗ) при будь-яких значеннях a.

Оскільки $x_2 = 0$ при $a = -\frac{1}{2}$, то при цьому значенні параметра $x_2 = 0$ не є коренем заданого рівняння (проте його коренем є $x_1 = 2$).

При $a \neq -\frac{1}{2}$ (і $a \neq 0$) значення $x_2 = -\frac{2a+1}{a}$ є коренем рівняння.

Відповідь: 1) якщо $a = 0$ або $a = -\frac{1}{2}$, то $x = 2$;

2) якщо $a \neq 0$ і $a \neq -\frac{1}{2}$, то $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{2a+1}{a}$. ◁

Підставляємо $a = 0$ в задане рівняння і розв'язуємо одержане рівняння (з урахуванням ОДЗ).

При $a \neq 0$ маємо квадратне рівняння. Знаходимо його дискримінант. Для обчислення доцільно записати загальну формулу для двох коренів (у цьому випадку знак модуля можна не записувати).

Перш ніж записати відповідь, слід обов'язково з'ясувати, чи входять одержані значення коренів до ОДЗ заданого рівняння.

Для кореня x_2 спочатку слід визначити, при яких значеннях параметра a його значення потрапляють до «заборонених» $(x = 0)$. Потім можна записати відповідь для знайденого значення $a = -\frac{1}{2}$ і для всіх інших значень a (урахувавши, що при $a = 0$ одержали такий самий розв'язок, як і при $a = -\frac{1}{2}$).

У дослідницьких завданнях з параметрами розв'язування заданих рівнянь або нерівностей часто буває дуже складним або неможливим. У таких випадках корисно пам'ятати деякі спеціальні **прийоми дослідження завдань з параметрами** (табл. 26).

Таблиця 26

1. Дослідження кількості розв'язків рівнянь з параметрами

Орієнтир

Якщо в завданні з параметрами йдеться про кількість розв'язків рівняння (нерівності або системи), то для аналізу даної ситуації буває зручним використати графічну ілюстрацію розв'язування.

Особливості використання орієнтира

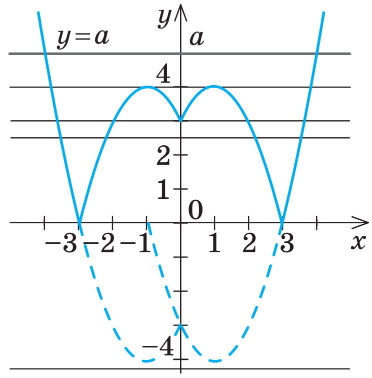
Дослідження є простим у тому разі, коли задане рівняння можна подати у вигляді $f(x) = a$, оскільки графік функції $y = a$ — це пряма, яка паралельна осі Ox і перетинає вісь Oy у точці a.

Замінюючи задане рівняння рівнянням $f(x) = a$, потрібно слідкувати за рівносильністю виконаних перетворень, щоб одержане рівняння мало ті самі корені, що й дане. Тоді й кількість коренів у них буде однаковою.

Для того щоб визначити, скільки коренів має рівняння $f(x) = a$, достатньо знайти, скільки точок перетину має графік функції $y = f(x)$ з прямою $y = a$ при різних значеннях параметра a. (Для цього на відповідному рисунку доцільно зобразити всі характерні положення прямої.)

Приклад

Скільки коренів має рівняння $\left|x^2-2|x|-3\right|=a$ залежно від значення параметра a?

План	Розв'язання
1. Будуємо графік функції $$y=\left|x^2-2|x|-3\right|$$ (ураховуючи, що $x^2=|x|^2$), наприклад, так: $y=x^2-2x-3\to y=|x|^2-2|x|-3\to$ $\to y=\left|x^2-2|x|-3\right|$. 2. Будуємо графік функції $y=a$. 3. Аналізуємо взаємне розташування одержаних графіків: *кількість коренів рівняння* $f(x)=a$ *дорівнює кількості точок перетину графіка функції* $y=f(x)$ *із прямою* $y=a$. 4. Записуємо відповідь.	 *Відповідь*: 1) при $a<0$ немає коренів; 2) при $a=0$ і $a>4$ два корені; 3) при $a<0<3$ і $a=4$ чотири корені; 4) при $a=3$ п'ять коренів; 5) при $3<0<4$ шість коренів.

2. Використання парності функцій, що входять до запису рівняння

Орієнтир

Якщо в рівнянні $f(x)=0$ функція $f(x)$ є парною або непарною, то разом із будь-яким коренем α можна вказати ще один корінь цього рівняння $-\alpha$.

Приклад

Знайдіть усі значення параметра a, при яких має єдиний корінь рівняння

$$a^2\cos 2x-x^4-a=0. \qquad (1)$$

Розв'язання	Коментар
▶ Функція $f(x)=a^2\cos 2x-x^4-a$ є парною ($D(f)=\boldsymbol{R}$, $f(-x)=f(x)$). Отже, єдиним коренем даного рівняння може бути тільки $x=0$. Якщо $x=0$, то з рівняння (1) одержуємо $a^2-a=0$, тобто $a(a-1)=0$. Звідси $$a=0 \text{ або } a=1.$$ При $a=0$ рівняння (1) перетворюється на рівняння $x^4=0$, яке має єдиний корінь $x=0$. Отже, $a=0$ задовольняє умову задачі. При $a=1$ маємо рівняння $\cos 2x-x^4-1=0$, тобто $$\cos 2x=1+x^4. \qquad (2)$$	Помічаємо, що в лівій частині рівняння (1) стоїть парна функція, і використовуємо орієнтир. Дійсно, якщо $x=\alpha$ — корінь рівняння $f(x)=a$, то $f(\alpha)=0$ — правильна числова рівність. Ураховуючи парність функції $f(x)$, маємо: $f(-\alpha)=f(\alpha)=0$. Отже, $x=-\alpha$ також є коренем рівняння $f(x)=0$. Єдиний корінь у цього рівняння може бути тільки тоді, коли корені α і $-\alpha$ збігаються. Звідси $x=\alpha=-\alpha=0$. З'ясуємо, чи існують такі значення параметра a, при яких $x=0$ є коренем рівняння (1). Це $a=0$ і $a=1$. Оскільки значення

Оскільки $\cos 2x \leqslant 1$, а $1+x^4 \geqslant 1$, то рівняння (2) рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases}\cos 2x = 1,\\ 1+x^4 = 1.\end{cases}$$

З другого рівняння системи одержуємо $x=0$, що задовольняє і перше рівняння. Отже, ця система, а значить, і рівняння (2) мають єдиний розв'язок $x=0$. Маємо: $a=1$ також задовольняє умову задачі.

Відповідь: $a=0$, $a=1$. ◁

$a=0$ і $a=1$ ми одержали за умови, що $x=0$ — корінь рівняння (1), то необхідно перевірити, чи дійсно при цих значеннях a задане рівняння матиме єдиний корінь.

Щоб розв'язати рівняння (2), оцінимо значення його лівої і правої частин:

$h(x)=\cos 2x$, $g(x)=1+x^4$.

$$\underbrace{\cos 2x}_{\boxed{-1\leqslant h(x)\leqslant 1}} = \underbrace{1+x^4}_{\boxed{g(x)\geqslant 1}} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x = 1,\\ 1+x^4 = 1.\end{cases}$$

Запитання

1. Що називають розв'язком:

1) рівняння;
2) нерівності;
3) системи рівнянь або нерівностей;
4) сукупності рівнянь або нерівностей?

Наведіть приклади.

2. Сформулюйте означення ОДЗ:

1) рівняння;
2) нерівності;
3) системи рівнянь або нерівностей;
4) сукупності рівнянь або нерівностей.

3. Сформулюйте означення рівняння-наслідку даного рівняння та системи-наслідку даної системи рівнянь. Наведіть приклади.

4. Сформулюйте означення рівносильності:

1) рівнянь;
2) нерівностей;
3) систем рівнянь або нерівностей;
4) сукупностей рівнянь або нерівностей.

Наведіть приклади рівносильних перетворень. Поясніть, чому виконані перетворення є рівносильними.

5. Назвіть основні методи розв'язування:

1) рівнянь;
2) нерівностей;
3) систем рівнянь та нерівностей і наведіть приклади їх використання.

Вправи

У завданнях 14.1–14.8 розв'яжіть рівняння.

14.1. 1) $x=\sqrt{3x+40}$; 2) $x=\sqrt{10x+24}$; 3) $x=\sqrt{5x+36}$; 4) $x=\sqrt{3x+28}$.

14.2. 1) $\sqrt{10-x}=4-x$; 2) $\sqrt{x-1}=x-3$; 3) $\sqrt{1+x}=2x-4$; 4) $\sqrt{x+7}=4x-5$; 5) $x+3\sqrt{x-5}=5$; 6) $x+2\sqrt{x-6}=6$; 7) $\sqrt{x^4-3x-1}=x^2-1$; 8) $\sqrt{x^4+x-9}=x^2-1$; 9) $\sqrt{x(x-2)(x+3)}=3-x$; 10) $\sqrt{x(x+4)(x-3)}=6-x$.

14.3. 1) $\sqrt{3x+3}=2x-3$; 2) $\sqrt{3x+2}=2x-4$; 3) $x+1=2-\sqrt{x-1}$; 4) $1-\sqrt{x-2}=x-1$.

14.4. 1) $x^2-13x+30=\left(\sqrt{3x-18}\right)^2$; 2) $x^2-9x+13=\left(\sqrt{5x-35}\right)^2$; 3) $x^2-8x+10=\left(\sqrt{7x-40}\right)^2$; 4) $x^2-15x+55=\left(\sqrt{x-8}\right)^2$.

14.5. 1) $\sqrt{3x-5}=3-2x$;
2) $\sqrt{4x^2+4x+1}=x^2+x-1$;
3) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$;
4*) $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$.

14.6. 1) $\sqrt{y-1}=6-y$; 2) $\sqrt{x+1}=4-x$; 3) $\sqrt{2x^2-8x+5}=x-2$; 4) $\sqrt{2x^2-8x+6}=x-2$.

14.7. 1) $5\sqrt{x-2}+3\sqrt{x+1}+2x=17$; 2) $\sqrt{3x-2}+2\sqrt{x-1}+5x=14$.

14.8. 1) $\sin 2x=\sqrt{3}\cos x$; 2) $\sin 2x=\sqrt{2}\cos x$.

14.9. Укажіть усі корені рівняння:
1) $\sin 2x+\sqrt{2}\sin x=0$, які належать відрізку $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$;
2) $\sin 2x+\sqrt{3}\cos x=0$, які належать відрізку $[-\pi;2\pi]$.

У завданнях 14.10–14.14 розв'яжіть рівняння.

14.10. 1) $\sin(0{,}5\pi+x)+\sin 2x=0$; 2) $\cos(0{,}5\pi+x)+\sin 2x=0$.

14.11. 1) $\sin 4x+\sqrt{3}\sin 3x+\sin 2x=0$; 2) $\cos 3x+\sin 5x=\sin x$.

14.12*. 1) $\sin 2x+\operatorname{tg} x=2$; 2) $\sin x+\sin 3x=4\cos^2 x$; 3) $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^2 x=16\cos 2x$.

14.13. 1) $\sin 2x = \cos x$; 2) $\cos 2x = \sin x$.

14.14. 1) $\sqrt{3}\sin^2 x + 0{,}5\sin(\pi + 2x) = 0$;

2) $\sqrt{3}\cos^2 x - 0{,}5\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = 0$.

14.15*. Знайдіть усі розв'язки рівняння:

1) $\cos 2x = 2\,\mathrm{tg}^2\, x - \cos^2 x$, які задовольняють нерівність $\cos x < \frac{1}{2}$;

2) $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2\,\mathrm{ctg}^2\, x$, які задовольняють нерівність $\cos x < -\frac{1}{2}$.

14.16. Знайдіть усі розв'язки рівняння:

1) $\cos x + \cos 5x - \cos 2x = 0$, які належать відрізку $[-\pi; \pi]$;

2) $\frac{\mathrm{ctg}\, 2x}{\mathrm{ctg}\, x} + \frac{\mathrm{ctg}\, x}{\mathrm{ctg}\, 2x} + 2 = 0$, які належать відрізку $[0; 2\pi]$.

У завданнях 14.17–14.31 розв'яжіть рівняння.

14.17. 1) $3\cos 2x + 4\sin x = 1$;

2) $\cos x - \cos 2x - \sin 2x = 1$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right]$;

3) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin x$.

14.18. 1) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2}$; 3) $\cos x + \cos 3x = \sqrt{3}\cos 2x$.

2) $\sin x = 2\,\mathrm{ctg}\, x$;

14.19. 1) $\left|x - \frac{3}{7}\right| = \frac{2}{7}$; 2) $\left|x - \frac{5}{8}\right| = \frac{3}{5}$.

14.20. 1) $|14 - x| = x^2 - 196$; 3) $|19 - x| = x^2 - 361$;

2) $|16 - x| = x^2 - 256$; 4) $|17 - x| = x^2 - 289$.

14.21. 1) $x^2 + 1 + |x - 1| = 2|x|$; 2) $x^2 + 1 + |x + 1| = 2|x|$.

14.22. 1) $x^2 - 6|x| - 2 = 0$; 4) $|x^2 - 2x - 1| + x - 4 = 0$;

2) $x^2 + 4|x| - 1 = 0$; 5) $\frac{x}{|x|} + x = x^2 + 1$;

3) $|x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0$; 6) $\frac{|x|}{x} + 2x = x^2 + 1$.

14.23. 1) $|x^2 - 8x + 15| = |15 - x^2|$; 2) $|2x + 3| = x^2$.

14.24*. 1) $\left|\cos x - \frac{1}{2}\right| = \sin x - \frac{1}{2}$; 3) $|\cos x| - \sqrt{3}\sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 1$.

2) $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| = \cos x - \frac{1}{2}$;

14.25*. 1) $\sqrt{|2x+1|}=1-2|x|$; 2) $\sqrt{|1-3x|}=1-3|x|$.

14.26. 1) $(2x-7)\sqrt{3x^2-5x-2}=0$; 3) $(3x^2-8x-11)\sqrt{3x-5}=0$;
2) $(2x-3)\sqrt{4x^2-5x-9}=0$; 4) $(4x^2+3x-22)\sqrt{3x-15}=0$.

14.27. 1) $(7\sin x-4\sqrt{3})(7\sin x-5\sqrt{2})=0$;
2) $(5\cos x-3\sqrt{3})(5\cos x-2\sqrt{6})=0$.

14.28*. 1) $(\sin x+\cos x-\sqrt{2})\sqrt{-11x-x^2-30}=0$;
2) $(\cos x+\sin x+\sqrt{2})\sqrt{-x^2-7x-12}=0$.

14.29*. 1) $(2\sin^2 x-3\sin x+1)\sqrt{\operatorname{tg} x}=0$;
2) $(2\cos^2 x-\cos x-1)\sqrt{\operatorname{ctg} x}=0$;
3) $\sqrt{4x-x^2-3}\left(\sqrt{2}\cos x-\sqrt{1+\cos 2x}\right)=0$.

14.30*. 1) $\arcsin\frac{6x-7}{2x-3}=2\pi-\pi x$; 2) $x^2-\cos 2x^2+1=0$.

14.31*. 1) $\log_{\sin x}(3\sin x-\cos x)=0$; 2) $\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}}-\sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}}=1$.

14.32*. Знайдіть найбільший корінь рівняння:
1) $\left(\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$;
2) $(2\sqrt{3}-2)^x+2^{x+1}=2(\sqrt{3}+1)^x$.

У завданнях 14.33–14.57 розв'яжіть нерівність.

14.33. 1) $3x^2+2x+1\geqslant 0$; 2) $-x^2+2x-3>0$.

14.34. 1) $x^3-3x-2<0$; 2) $x^3-3x^2+4>0$.

14.35. 1) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}<0$; 2) $\frac{x^2-6x+18}{-x^2+8x-12}>0$.

14.36. 1) $\frac{3}{x-2}\geqslant x$; 3) $\frac{x^2-1}{x+5}<1$;
2) $x\geqslant\frac{2}{x-1}$; 4) $\frac{2x-1}{x-3}<x+3$.

14.37. 1) $\frac{5}{2-x}>1+\frac{3}{x+2}$; 3) $\frac{2}{3-x}>1-\frac{3}{x+2}$;
2) $\frac{5}{x+4}<1+\frac{1}{4-x}$; 4) $\frac{7}{x+5}<1+\frac{2}{5-x}$.

14.38. 1) $\sqrt{12x-11}<\sqrt{10x-9}$; 3) $\sqrt{10x-7}<\sqrt{9x-5}$;
2) $\sqrt{11x-9}<\sqrt{9x-7}$; 4) $\sqrt{10x-9}<\sqrt{8x-7}$.

14.39. 1) $\sqrt{x^2-9}<14-2x$;
2) $\sqrt{x^2-6x}<8+2x$;
3) $2-3x<\sqrt{4+9x-9x^2}$;
4) $4-5x<\sqrt{16+30x-25x^2}$.

14.40*. 1) $\sqrt{3-x}>x-2$;
2) $\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}>2$.

14.41*. 1) $\frac{5x-3}{\sqrt{7x-4}}<1$;
2) $\frac{3x-2}{\sqrt{5x-2}}<1$;
3) $\sqrt{x^2-8x+12}\geqslant x-5$.

14.42. 1) $3\log_8(3x+2)<2$;
2) $4\log_{16}(4x+3)<3$;
3) $\log_{\frac{\sqrt{10}}{3}}(1-3x)>2$;
4) $\log_{\frac{\sqrt{6}}{3}}(2x-1)>2$;
5) $\log_{0,5}(3-2x)>-\log_{0,5}3$;
6) $\log_2(2x-5)<-\log_2 3$.

14.43. 1) $\log_{0,4}(3,5-5x)>2\log_{0,4}0,2-1$;
2) $1+2\log_2 0,3>\log_2(1,5-3x)$.

14.44*. 1) $\log_{\sqrt{2}}(5^{x+1}-25^x)\leqslant 4$;
2) $\log_{\sqrt{6}}(7^{x+1}-49^x)\leqslant 2$;
3) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant -2$;
4) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2^{x+2}-4^x)\geqslant -2$.

14.45. 1) $\operatorname{tg}3x>0$;
2) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<1$;
3) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$;
4) $\operatorname{ctg}2x\leqslant 0$;
5) $\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)>\sqrt{3}$;
6) $\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 1$.

14.46*. 1) $5\sin x-\sin 2x>0$;
2) $5\cos x+\sin 2x<0$.

14.47*. 1) $2\sin x-1\leqslant\sqrt{6\sin^2 x-6\sin x-12}$;
2) $16\sin^2 x-\operatorname{ctg}^2 x\leqslant 7$;
3) $16\sin^2 x+9\operatorname{ctg}^2 x\leqslant 15$.

14.48. 1) $2x>|x|+1$;
2) $x^2-6\geqslant|x|$;
3) $\frac{4}{|x+2|}\geqslant 3-x$;
4) $\frac{3}{|x-1|}\geqslant 2x+5$.

14.49*. 1) $\frac{4|2-x|}{4|x|}-|x-2|\leqslant 0$;
2) $|1-x|+\frac{4|1-x|}{|x|-3}\geqslant 0$;
3) $|x^2-8x+15|\leqslant|15-x^2|$.

14.50*. 1) $\dfrac{4^{\frac{1}{x}}-4}{2+x}<0$; 2) $\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-2}{x-2}>0$; 3) $\dfrac{2^{-\frac{1}{x}}-2}{x+2}<0$.

14.51. 1) $(x^2-9)\sqrt{x+6}>0$; 3) $\sqrt{x^2-9}\,(x+8)>0$;

2) $(16-x^2)\sqrt{8-x}<0$; 4) $(x-4)\sqrt{x^2-4}<0$.

14.52. 1) $(x-2)(x-3)\sqrt{x-1}\leqslant 0$; 3) $(x-4)(x+3)\sqrt{x}\geqslant 0$;

2) $(x+2)(x+3)\sqrt{x+11}\leqslant 0$; 4) $(x-8)(x+7)\sqrt{x}\geqslant 0$.

14.53. 1) $\dfrac{\sqrt{6+5x-x^2}}{x-2}<0$; 4) $\dfrac{1-x}{\sqrt{2+x-x^2}}<0$;

2) $\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x-2}<0$; 5) $\dfrac{3x+2}{\sqrt{2-x-x^2}}>0$;

3) $\dfrac{\sqrt{4-3x-x^2}}{x+3}>0$; 6) $\dfrac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}<0$.

14.54. 1) $\dfrac{|x-4|-\sqrt{x-2}}{4\sqrt{10-x}+x-13}\geqslant 0$; 3) $\dfrac{|x-5|-\sqrt{x-3}}{2\sqrt{11-x}+x-12}\geqslant 0$;

2) $\dfrac{x-11+5\sqrt{7-x}}{|x-1|-\sqrt{x+1}}\leqslant 0$; 4) $\dfrac{x+2-7\sqrt{6-x}}{|x-3|-\sqrt{x+3}}\leqslant 0$.

14.55*. 1) $2^x+2^{|x|}\geqslant 2\sqrt{2}$; 3) $3\cdot 4^{\sqrt{2-x}}+3<10\cdot 2^{\sqrt{2-x}}$;

2) $3^x+3^{|x|}\leqslant 3$; 4) $2\cdot 9^{\sqrt{3-x}}+2<5\cdot 3^{\sqrt{3-x}}$.

14.56*. 1) $\dfrac{\lg(8-x)}{\lg(x-2)^2}\leqslant 1$; 3) $\dfrac{\lg\left(\frac{x}{2}+9\right)}{\lg\left(\frac{x}{2}+3\right)^2}\leqslant 1$;

2) $\dfrac{\lg(2x+9)}{\lg(2x+3)^2}\leqslant 1$; 4) $\dfrac{\lg\left(\frac{x}{3}+5\right)}{\lg\left(\frac{x}{3}-1\right)^2}\leqslant 1$.

14.57*. 1) $\dfrac{\log_2 x-3}{6\log_x 2-1}\leqslant 2$; 2) $\log_{(x-2)} x\leqslant \log_{(x-2)} 4$.

У завданнях 14.58–14.62 розв'яжіть систему рівнянь.

14.58. 1) $\begin{cases} x-3y^2=8,\\ x+4y^2=15; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-7y^2=9,\\ x+2y^2=18; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-5y^2=10,\\ x+3y^2=18; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-2y^2=12,\\ x+7y^2=21. \end{cases}$

14.59. 1) $\begin{cases} 4^{2y}+3^{2x}=82, \\ 3^x-4^y=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^y+5^{2x}=26, \\ 5^x-3^{0,5y}=4. \end{cases}$

14.60. 1) $\begin{cases} 3^{x^2-2xy}=1, \\ 2\log_3(y+2)=\log_3(5x-2); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{y^2-3xy}=1, \\ 2\log_2(x+1)=\log_2(3y-5). \end{cases}$

14.61. 1) $\begin{cases} 2^{y-3}=8^{x-2}, \\ 2\log_3(y-x)-\log_3 x=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^y=4^{x-3}, \\ 2\log_2(x-y)-\log_2 y=1. \end{cases}$

14.62*. 1) $\begin{cases} \dfrac{xy}{2}+\dfrac{5}{2x+y-xy}=5, \\ 2x+y+\dfrac{10}{xy}=4+xy; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 9\cdot 2^x\cdot 5^y-5\cdot 3^{y+x}=3^x\cdot 5^y, \\ 2^{x-2}\cdot 3^{y-x+1}\cdot 5^{1-y}=1. \end{cases}$

У завданнях 14.63–14.71 розв'яжіть задачі з параметрами.

14.63. При яких значеннях $c\in\boldsymbol{R}$ для дійсних коренів x_1 і x_2 рівняння $x^2+(4c-c^2-1)x+2c^2-1=0$ виконується рівність $x_1+x_2=6$?

14.64. Побудуйте графік квадратного тричлена:

1) $y=x^2+3x+a$, якщо відомо, що його корені пов'язані співвідношенням $x_1^2+x_2^2=5$;

2) $y=x^2-x-a$, якщо відомо, що його корені пов'язані співвідношенням $x_1^3+x_2^3=4$.

14.65*. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння:

1) $2|x+1|-2|x-2|+|x-6|=x+3a$ має рівно один корінь;

2) $2|x+3|-2|x-2|+|x-4|=x+2a$ має рівно два корені;

3) $|x^2-8x-a|=4x$ має рівно один корінь, менший від 1, і хоча б один корінь, більший за 11,5;

4) $|x^2-4x+a|=x$ має рівно один корінь, менший від 1, і хоча б один корінь, більший за 4.

14.66. Для кожного значення параметра b знайдіть число коренів рівняння:

1) $2x^2+10x+|6x+30|=b$;

2) $6x^2+18x+|12x+36|=b$;

3) $4x^2+12x+|8x+24|=b$;

4) $4x^2+8x+|24x+48|=b$.

14.67*. Для кожного значення параметра c розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{\frac{x}{4}+2}=c+\sqrt{\frac{x}{4}-3}$;

2) $\sqrt{x^2-4x+4}=c-\sqrt{x^2+6x+9}$;

3) $\sin\left(c\sqrt{x-1}+\frac{\pi}{6}\right)=0{,}5$;

4) $\left(2^{-x}+4+3c\right)\left(5-c-2^{-x}\right)=0$.

14.68. Знайдіть усі значення параметра p, при кожному з яких рівняння $8+4p(x-2)=\left(x-|x|\right)x$ має єдиний розв'язок. Знайдіть усі розв'язки при кожному значенні p.

14.69*. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $144^{-|2x-1|}-2\cdot 12^{-|2x-1|}+12a=0$ має хоча б один корінь.

14.70. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $|2x+a|\leqslant x+2$; 2) $3(2x-a)+5a\sqrt{2x-a}-2a^2>0$.

14.71. При яких значеннях параметра a рівняння $|2x+6|+|2x-8|=ax+12$ має єдиний розв'язок?

У завданнях 14.72–14.93 розв'яжіть задачу.

14.72. Яку кількість води потрібно додати до 1 л 10%-го водного розчину спирту, щоб одержати 6%-й розчин?

14.73. Є 1 л 6%-го розчину спирту. Скільки літрів 3%-го розчину спирту потрібно додати в перший розчин, щоб одержати 5%-й розчин?

14.74. Із пункту прокату виїхав електроскутер зі швидкістю 25 км/год. За годину слідом за ним одночасно виїхали електробайк і звичайний мотоцикл. Швидкість електробайка постійна і становить $\frac{3}{4}$ швидкості мотоцикла. Знайдіть швидкість електробайка, якщо відомо, що він наздогнав електроскутер на 10 хв пізніше, ніж мотоцикл.

14.75. Від пристані по водосховищу зі швидкістю 10 км/год почала рухатися яхта. Через 1,5 год від тієї самої пристані за яхтою вирушили два катери з постійними швидкостями, причому швидкість першого катера становила $\frac{4}{3}$ швидкості другого. Знайдіть швидкість першого катера, якщо відомо, що він наздогнав яхту на 15 хв раніше, ніж другий.

14.76. Два монтажники виконали певну роботу за 20 днів. За скільки днів виконав би цю роботу кожний із них, працюючи окремо, якщо відомо, що першому довелося б працювати на 9 днів більше, ніж другому?

14.77. Двоє художниць, працюючи разом, виконали всю роботу за 5 днів. Якби перша художниця працювала у два рази швидше, а друга — у два рази повільніше, то всю роботу вони виконали б за 4 дні. За скільки днів виконала б усю роботу перша художниця?

14.78. Заповнення басейну в аквапарку через першу трубу вимагає на 3 год менше часу, ніж його звільнення через другу. За який час заповнюється басейн через першу трубу, якщо відомо, що в разі відкриття обох труб басейн заповнюється за 18 год?

14.79. Рефрижератор затримався в дорозі від ферми до магазину на 12 хв, а потім на відстані 60 км надолужив утрачений час, збільшивши швидкість на 15 км/год. Знайдіть початкову швидкість рефрижератора.

14.80. Протягом 7 год 20 хв прогулянковий катер пройшов вгору по річці 35 км до водоспаду і повернувся. Швидкість течії дорівнює 4 км/год. З якою швидкістю катер ішов за течією?

14.81. Потяг вийшов із пункту A в пункт B, відстань між якими 230 км. За годину назустріч йому вийшов із пункту B другий потяг, швидкість якого на 15 км/год більше, ніж першого. Визначте швидкості потягів, якщо відомо, що вони зустрілися на відстані 120 км від пункту A.

14.82. Змішали 20%-й і 40%-й розчини кислоти й одержали 25%-й розчин. Знайдіть відношення мас початкових розчинів.

14.83. Є два сплави, в одному з яких міститься 20 %, а в другому — 30 % олова. Скільки потрібно взяти першого і другого сплавів, щоб одержати з них 10 кг нового сплаву, що містить 27 % олова?

14.84. У кафе випікають булочки із суміші пшеничної та житньої муки, у якій міститься 55 % житньої. За новим рецептом до цієї суміші додали ще 36 кг житньої муки, щоб її вміст у суміші досягнув 75 %. Знайдіть масу початкової суміші.

14.85. В акваріумі було 60 кг морської води, яка містить за масою 5 % солі. Скільки кілограмів прісної води потрібно додати до морської, щоб уміст солі в ній становив 3 %, як вимагають правила утримання рибок?

14.86. Свіжі гриби містять за масою 90 % води, а сухі — 12 %. Скільки кілограмів сухих грибів можна отримати з 22 кг свіжих?

14.87. У траві волога становить $\frac{7}{10}$ загальної маси, а в сіні — $\frac{1}{10}$. Скільки тонн трави потрібно скосити фермеру, щоб заготовити 1 т сіна?

14.88*. Задано двоцифрове натуральне число, у якого число десятків на одиницю більше числа одиниць, а добуток його цифр на 45 більше потрійного числа його десятків. Знайдіть це число.

14.89*. Директору фірми зараз 40 років. Він учетверо старший, ніж була його помічниця тоді, коли директорові було стільки ж років, скільки помічниці зараз. Який вік помічниці?

14.90*. У двох будинках більше ніж 31 квартира. Число квартир у першому будинку, збільшене на 21, більш ніж у три рази перевищує число квартир у другому. Подвоєне число квартир у першому будинку менше потроєного числа квартир у другому будинку, збільшеного на одиницю. Скільки квартир у кожному будинку?

14.91*. Є три сплави. Перший містить $30\,\%$ нікелю і $70\,\%$ марганцю, другий — $10\,\%$ марганцю і $90\,\%$ міді, третій — $15\,\%$ нікелю, $25\,\%$ марганцю і $60\,\%$ міді. З них виготовили сплав, маса якого 15 кг і який містить $40\,\%$ міді та $42\,\%$ марганцю. Яку кількість першого, другого і третього сплавів узяли для цього?

14.92*. Рідину налили в бутлі місткістю по 40 л, при цьому один із бутлів виявився не зовсім повним. Якщо цю рідину перелити в бутлі місткістю по 50 л, то такі бутлі будуть заповнені повністю, але при цьому знадобиться на 5 бутлів менше. Якщо ж цю рідину розлити в бутлі місткістю по 70 л, то знадобиться ще менше на 4 бутлі. При цьому знову один бутель буде не зовсім повним. Скільки було літрів рідини?

14.93*. Технічну реконструкцію підприємства провели в чотири етапи. Кожний етап продовжувався ціле число місяців і супроводжувався падінням обсягу виробництва. Щомісячне падіння обсягу виробництва склало на першому етапі $4\,\%$, на другому — $6\frac{2}{3}\,\%$, на третьому — $6\frac{1}{4}\,\%$ і на четвертому — $14\frac{2}{7}\,\%$ на місяць. Після закінчення реконструкції початковий обсяг виробництва на підприємстві скоротився на $37\,\%$. Визначте тривалість періоду реконструкції.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 4

1. Скільки коренів має рівняння $\lg(2-x)\left(x^2-9\right)=0$?

А Жодного **Б** Один **В** Два **Г** Три **Д** Безліч

2. Знайдіть суму всіх цілих значень з області визначення функції $y=\log_{5-x}\frac{8-x}{2+x}$.

А 2 **Б** 3 **В** 4 **Г** 5 **Д** 6

3. Розв'яжіть нерівність $|2x+6|-9\leqslant 1$.

А $(-\infty;2]$ **Б** $[-8;2]$ **В** $[-5;5]$ **Г** $[-5;2]$ **Д** $[-8;+\infty)$

4. Розв'яжіть рівняння $7^{1-4x}=\frac{1}{49}$.

А $\frac{1}{4}$ **Б** $-\frac{1}{4}$ **В** $-\frac{3}{4}$ **Г** $\frac{3}{4}$ **Д** 1

5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{18+x}=2-x$. Якщо воно має декілька коренів, знайдіть їх суму.

А 5 **Б** -2 **В** 7 **Г** $-2{,}1$ **Д** -5

6. Установіть відповідність між системами рівнянь (1–3) та кількістю їх розв'язків (А–Г).

1 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=2^x \end{cases}$	**А** Жодного
2 $\begin{cases} y=x^2, \\ y=\ln x \end{cases}$	**Б** Один
3 $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=-\lvert x\rvert+2 \end{cases}$	**В** Два
	Г Три

7. Розв'яжіть нерівність $9^x-12\cdot 3^{x-1}\geqslant -3$.

8. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5}\left(x^2+3x\right)\geqslant -2$.

9. Розв'яжіть нерівність $\frac{\log_a x}{x^2-2ax}\geqslant 0$ залежно від значення параметра a.

Пройдіть онлайн-тестування на сайті *interactive.ranok.com.ua*

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Аналізуючи історію розвитку математики, пригадаємо також імена українських жінок, які займалися математичною наукою, популяризацією математики, збереженням пам'яті українських математиків, навчали математики молодь. Розкажемо про них докладніше.

К. Я. Латишева (1897–1956)

Клавдія Яківна Латишева (1897–1956) народилася 14 березня 1897 р. в Києві. Середню освіту вона здобула в Другій жіночій гімназії (1916 р.), у 1921 р. закінчила жіночі вищі педагогічні курси (фізико-математичний відділ), стала першою в Україні жінкою, яка захистила дисертацію на здобуття ступеня кандидата фізико-математичних наук (за темою «Наближене розв'язування за допомогою способу моментів лінійних диференціальних рівнянь, що мають особливості в коефіцієнтах» (1936 р.)), а потім — докторську дисертацію (за темою «Нормальні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь із поліноміальними коефіцієнтами» (1952 р.)). Серед важливого наукового доробку Латишевої — наукові дослідження в галузі аналітичної теорії диференціальних рівнянь, теорії крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, зокрема метод Фробеніуса — Латишевої для розв'язування систем диференціальних рівнянь з частинними похідними. У 1936 р. в Інституті математики відбулася спільна доповідь К. Я. Латишевої та М. Кравчука. Багато уваги Клавдія Яківна приділяла методиці викладання математики. Була вона й у числі організаторів Першої всеукраїнської математичної олімпіади, яка пройшла в Київському університеті в 1936 р.

Г. П. Матвієвська (нар. 1930)

Галина Павлівна Матвієвська (нар. 1930) народилася 13 липня 1930 р. в м. Дніпропетровськ (тепер Дніпро), дитинство провела в Харкові, а в 1948 р. закінчила школу з золотою медаллю, у 1954 р. — Ленінградський (тепер Санкт-Петербург) університет, у 1958 р. захистила дисертацію на здобуття ступеня кандидата фізико-математичних наук за результатами вивчення неопублікованих архівних рукописів Леонарда Ейлера з теорії чисел. У 1959 р. Г. П. Матвієвська переїхала до Узбекистану, на батьківщину чоловіка, і зайнялася історією східної математики, опанувавши для цього арабську мову. У 1968 р. в Ташкенті дослідниця захистила докторську дисертацію за темою «Вчення про число в середні віки». Згодом вона стала членом-кореспондентом Академії наук Узбекистану, заслуженим діячем науки, лауреатом державної премії ім. Беруні. Основні напрямки її досліджень — історія математики і математичної астрономії в країнах середньовічного Сходу, історія теорії чисел, рукописи Л. Ейлера.

Ольга Арсенівна Олійник (1925–2001) народилася 2 липня 1925 р. в селі Матусів, а шкільні роки провела в містечку Сміла (тепер Черкаська обл.). У роки війни родина Олійник евакуювалася до м. Перм (Росія), де дівчина закінчила школу і вступила на фізико-математичний факультет Пермського державного університету. Водночас вона відвідувала семінар професора Московського університету Софії Яновської, яка й порадила Ользі продовжити навчання в Московському державному університеті

О. А. Олійник (1925–2001)

ім. Ломоносова. Ольга Арсенівна в 1947 р. з відзнакою закінчила механіко-математичний факультет університету, в 1950 р. вона захистила дисертацію на здобуття ступеня кандидата фізико-математичних наук за темою «Про топологію дійсних алгебраїчних кривих на алгебраїчній поверхні», а в 1954 р. — докторську дисертацію за темою («Крайові задачі для рівнянь з частинними похідними з малим параметром при старших похідних і задача Коші для нелинійних рівнянь у цілому», невдовзі стала професором і академіком. Напрямок її наукової діяльності — застосування диференціальних рівнянь до нестаціонарної фільтрації рідин і газів у пористих середовищах; до розподілу тепла в тілах, що перебувають у різних фазових станах одночасно (плавлення металу або танення снігу); до ударних хвиль газової динаміки; до математичної теорії пружності й топології; до руху в'язкої рідини. Праця українки, яка першою у світі (на той час) стала доктором фізико-математичних наук у 29 років, була гідно оцінена. О. А. Олійник отримала премію ім. М. Г. Чеботарьова (1952 р.), премію ім. М. В. Ломоносова за наукові роботи (I ступінь, 1964), іменну медаль Колеж де Франс (Франція), медаль I ступеня Карлова університету Праги (Чехія); була обрана іноземним членом Італійської Академії наук у Палермо (1967 р.), почесним членом Единбурзького королівського товариства Великої Британії (1984 р.).

Г. М. Сита (нар. 1940)

Галина Миколаївна Сита (нар. 1940) народилася 29 січня 1940 р. в м. Харків. Після закінчення в 1962 р. механіко-математичного факультету Київського університету вона успішно займалася в Інституті математики Академії наук України граничними теоремами теорії випадкових процесів та асимптотичними оцінками мір у функціональних просторах; стала кандидатом фізико-математичних наук (1965 р.), опублікувала низку відомих математичних праць. Та більш відома її робота зі збереження пам'яті про українських математиків і повернення Україні імен власних математиків світового рівня, зокрема Георгія Вороного, Михайла Остроградського, Михайла Кравчука, Миколи Чайковського, Віктора Буняковського. Справа почалася із впорядкування могил Г. Вороного (у 1982 р. в с. Журавка на Чернігівщині було встановлено гранітний обеліск) і М. Остроградського (у 1985 р. в с. Хорішки на Полтавщині — гранітний знак із барельєфом вченого). Далі Г. М. Сита працювала над організацією музеїв, спорудженням пам'ятників, створенням фільмів, випуском іменних грошових і поштових знаків, організацією міжнародних наукових конференцій, виданням книжок. До речі, вона була не тільки співредактором цих книжок, а й автором архівних досліджень. Вона — автор понад півсотні праць з історії математики. У 2001 р. саме Галину Ситу Кабінет Міністрів України затвердив секретарем Організаційного комітету з відзначення 200-ліття Михайла Остроградського.

Зінаїда Іванівна Слєпкань (1931–2008) народилася 16 квітня 1931 р. в с. Печенжиці на Вологодщині (Росія), куди в 1930 р. із Запорізької області було вислано її родину. В 1949 р. дівчина разом із батьками повернулася до України — до міста Мелітополь, де в 1953 р. з відзнакою закінчила фізико-математичний факультет Мелітопольського педагогічного інституту. В 1962 р. Зінаїда Іванівна захистила дисертацію на здобуття ступеня

З. І. Слєпкань (1931–2008)

кандидата педагогічних наук із методики викладання математики («Культура тригонометричних обчислень у восьмирічній і середній школах»). У 1987 р. першою серед жінок тодішнього СРСР стала доктором педагогічних наук із методики навчання математики. В основу дисертації був покладений зміст її посібника «Психолого-педагогічні основи навчання математики». З. І. Слєпкань — професор, одна із засновниць української наукової школи з теорії та методики навчання математики в середніх і вищих закладах освіти, автор багатьох програм і підручників для вищої і середньої школи. Усі українські школи протягом десяти років працювали за підручником «Алгебра і початки аналізу 10–11», написаним З. І. Слєпкань у співавторстві з М. І. Шкілем та О. С. Дубинчук.

К. Л. Ющенко (1919–2001)

Катерина Логвинівна Ющенко (Рвачова) (1919–2001) народилася в учительській родині (молодший брат також став академіком) 8 грудня 1919 р. в містечку Чигирин (тепер Черкаська обл.). Закінчила в 1942 р. Середньоазійський університет. У 1966 р. вона захистила докторську дисертацію за темою «Деякі питання теорії алгоритмічних мов і автоматизація програмування», стала доктором фізико-математичних наук, професором Київського університету (1969 р.), членом-кореспондентом Академії наук України (1976 р.), членом міжнародної Академії комп'ютерних наук і систем (1993 р.). Катерина Логвинівна Ющенко — автор першої у світі мови програмування високого рівня («Адресної мови програмування»), вчений-кібернетик, заслужений діяч науки, дійсний член Міжнародної академії комп'ютерних наук, лауреат премії імені В. М. Глушкова, нагороджена орденом княгині Ольги.

Н. О. Вірченко (нар. 1930)

Ніна Опанасівна Вірченко (нар. 1930) — українська вчена, математик, доктор фізико-математичних наук, професор, академік-секретар відділення математики АН вищої школи України (АН ВШУ), віце-президент АН ВШУ, член Українського, Американського, Австралійського, Бельгійського, Единбурзького, Лондонського математичних товариств, голова Науково-методичної ради Всеукраїнського товариства політв'язнів та репресованих.

Н. О. Вірченко вивчала теорію узагальнених аналітичних функцій, теорію змішаних крайових задач, сингулярні диференціальні рівняння з частинними похідними, інтегральні рівняння, спеціальні функції, інтегральні перетворення, історію та методику математики тощо. Але головною справою життя Ніни Вірченко, якою вона займається понад 45 років, стало дослідження життя і математичної спадщини Михайла Кравчука. Ще в 1965 р., працюючи в Київському університеті над питаннями математичної фізики, Ніна не раз натрапляла в науковій літературі на згадки про Михайла Кравчука і зрозуміла, що академік М. Кравчук — непересічний, великий математик. Дівчина стала шукати його праці і виявила, що вони були практично вилучені з бібліотечних фондів, а далі дізналася, що вчений загинув на Колимі. Це ще дужче привернуло її увагу до Кравчука — науковця, особистості з трагічною долею.

Н. О. Вірченко — Заслужений працівник освіти України, авторка понад 500 наукових і науково-методичних праць, зокрема 20 книжок, виданих українською, російською, англійською та японською мовами.

ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ

Розділ 1

§ 1. 1.2. 1) $(0;+\infty)$; 2) $[0;+\infty)$; 3) $(-\infty;2)$; 4) $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; 5) $[0;+\infty)$. **1.3.** 1) 125; 2) 2; 3) 7. **1.4.** 1) $8a^{\sqrt{2}}$; 2) $a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{3}}$; 3) $a^{\sqrt{7}}$.

1.5. 1) $2^{\frac{1}{\sqrt{7}}}$; 2) -3; 3) Коренів немає; 4) $6+3^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$. **1.6.** *Вказівка*. Врахуйте область визначення заданих функцій: 1) $[0;+\infty)$; 2) $(0;+\infty)$; 3) $[0;+\infty)$.

1.7. 3993 грн.

§ 2. 2.4. 1) $(1;+\infty)$; 2) $(-\infty;0)$; 3) $(-2;+\infty)$; 4) $(-\infty;0)$. **2.10.** 1) «–»; 2) «–»; 3) «+»; 4) «+». **2.12.** 1) Приблизно у 2,8 разу, приблизно у 5,6 разу, у 8 разів, у 16 разів; 2) приблизно 1,3 доби, приблизно 1,6 доби, 2 доби.

§ 3. 3.1.1. 1) $\frac{3}{2}$; 2) 2; 3) 0; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $2\pm\sqrt{6}$; 7) -3; 2; 8) 0; 9) 2; 10) 4; 11) коренів немає; 12) 5; 13) коренів немає; 14) 0; 15) 1; 16) 2; 17) 1; 18) 2; 3; 19) 1; 20) 1; 21) 2; 22) 2. **3.1.2.** 1) 1; 2) 1; 3) 3. **3.1.3.** 1) -4; 2; 2) -2; 3; 3) -2; 4; 4) -1; 3; 5) $\pm\sqrt{3}$. **3.1.4.** 1) 1; 2) 1; 3) 3; 4) -1; 5) 2; 6) 0; 7) -2; 8) 2. **3.1.5.** 1) R; 2) R при $a=0$; при $a\neq 0$ $x=1$; 3) при $a=0$ $x\in \boldsymbol{R}$, $x\neq 0$; при $a>0$ $x=0,5$ (при $a<0$ рівняння не визначене). **3.2.1.** 1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1. **3.2.2.** 1) 1; 2) 1; 3) 0; 2; 4) 0; 2; 5) 3; 6) 0,5; 7) ±1; 8) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **3.2.3.** 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 0; 5) 0; 6) 1,5. **3.2.4.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 1; 5) 0; 1. **3.2.5.** 1) 2; 2) ±1; 3) 0; 4) 0; 1,5. **3.2.7.** *Вказівка*. Скористайтеся теоремою про корені рівняння (якщо в рівнянні $f(x)=g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку) і врахуйте, що всі функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на $\boldsymbol{R}$.
3.2.8. 1) $(3;-1)$; 2) $(-2;-3)$; 3) $(1;2)$; $(2;1)$; 4) $(3;1)$; 5) $(4;2)$; 6) $(4;2)$. **3.3.1.** 1) $(0;+\infty)$; 2) $(-1;+\infty)$; 3) R; 4) розв'язків немає; 5) $(-\infty;-2]$; 6) $(-\infty;5]$; 7) $[2,5;+\infty)$; 8) $(0;+\infty)$; 9) $[1;3)\cup[6;+\infty)$; 10) $[1;4)\cup[8;+\infty)$. **3.3.2.** 1) $(-\infty;0)$; 2) $(-\infty;1)$; 3) $[-1;+\infty)$; 4) $(-\infty;1]$; 5) $(2;+\infty)$; 6) $[1;2]$. **3.3.3.** 1) $(-\infty;0)$; 2) $(-\infty;1]$; 3) $(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$; 4) $[0;1]$.
3.3.4. 1) -2; $[3;+\infty)$; 2) $(-\infty;-2]$, 4; 3) $(0;1)$; 4) $(0;1)$.

§ 4. 4.2. 1) 2; 2) 3; 3) -2; 4) 0,5; 5) $-1,5$; 6) 0; 7) $\frac{1}{3}$; 8) $\frac{1}{4}$; 9) -1; 10) -1.
4.3. 1) $\log_4 9$; 6) $\ln 3$. **4.4.** 5) 14; 6) 54.
4.5. 2) $2\lg a+5\lg b-7\lg c-1$; 5) $2+7\log_3 a+\frac{1}{3}\log_3 b$.
4.6. 1) $3\lg|a|+5\lg|b|+8\lg|c|$; 2) $\frac{1}{3}\lg|a|+\frac{1}{3}\lg|b|-2\lg|c|$; 3) $4\lg|c|-\frac{2}{5}\lg|a|-\frac{2}{5}\lg|b|$; 4) $2+\frac{1}{5}\lg|a|+\frac{1}{5}\lg|b|+\frac{2}{5}\lg|c|$. **4.7.** 1) $b+1$; 2) $2a+b$; 3) $a+b+1$; 4) $3a+2b$. **4.8.** 1) 3; 2) 1,5; 3) 2; 4) 2,5; 5) -2; 6) -1.
4.9. 1) $7=5^{\log_5 7}$; 2) $13=10^{\lg 13}$.
4.10. 1) $3=\log_5 5^3=\log_5 125$; 2) $-2=\log_{0,2} 25$; 3) $\frac{1}{3}=\log_8 2$; 4) $0,5=\lg\sqrt{10}$. **4.11.** 1) $\frac{40}{9}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{5a}\cdot c^5}{b^2}$; 3) $\frac{m^3\cdot\sqrt[7]{n^2}}{\sqrt[5]{p}}$; 4) $\frac{1}{1600}$.
4.12. 1) $-\log_3 a$; 2) $0,5\log_3 a$; 3) $-0,5\log_3 a$; 4) $2\log_3 a$; 5) $\frac{\log_3 a}{\log_3 2}$. **4.13.** 1) 24; 2) 10; 3) 2,5; 4) 1,5; 5) 19; 6) 12. **4.14.** 1) $\frac{2(2a-1)}{3(2-a)}$; 2) $\frac{2+a}{2(2-a)}$; 3) $\frac{b(3-2a)}{ab+2}$; 4) $\frac{b(a+4)}{3(1+ab)}$.

4.15. 1) -40; 2) $5\sqrt{3}$; 3) 7; 4) 20. **4.16.** 1) 1000; 2) 27. **4.17.** 1) 1; 2) 1. **4.18.** 1) 9; 2) 19.

§ 5. 5.1. 1) $(-3;+\infty)$; 2) $(3;+\infty)$; 3) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; 4) $(0;3)$; 5) $\boldsymbol{R}$; 6) $\boldsymbol{R}$; 7) $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$; 8) $(2;3)\cup(3;+\infty)$; 9) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; 10) $(0;1)\cup(1;2)$; 11) $(1{,}5;2)\cup(2;5)$. **5.9.** 1) 3 і 4; 2) -2 і -1; 3) 0 і 1; 4) 1 і 2; 5) 0 і 1; 6) -3 і -2. **5.10.** 1) 3 і -2; 4) 2 і 0; 5) 0 і -1; 6) -1 і -2. **5.11.** 1) 1; 2) 2; 3) 0. **5.12.** 1) 3; 2) -2; 3) 0. **5.13.** 1) $[-2;+\infty)$; 2) $[-1;+\infty)$. **5.14.** 1) $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$; 2) $(0;1)\cup(1;+\infty)$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 4) $(-3;-2)\cup(-2;+\infty)$. **5.15.** 1) $(-\infty;1]$; 2) $(-1;5)$; 3) $[0{,}5;1]$; 4) $[2;4]$. **5.17.** 1) Непарна; 2) непарна. *Вказівка*. Після запису $y(-x)$ домножте і поділіть вираз під знаком логарифма на спряжений вираз.

§ 6. 6.1.1. 1) 16; 2) 5; 3) 2; 4) 100. **6.1.2.** 1) 5; 2) 6; 3) -3; 1; 4) 2,9. **6.1.3.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4; 4) 5. **6.1.4.** 1) 3; 27; 2) 10; 3) $\frac{1}{81}$; 9; 4) 0,1; 1; 10. **6.1.5.** 1) 1; 2) 2; 4; 3) 0; 4) $\log_3 4$. **6.1.7.** *Вказівка*. Скористайтеся теоремою про корені рівняння (якщо в рівнянні $f(x)=g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку) і врахуйте, що всі функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на $\boldsymbol{R}$. **6.1.8.** 1) $(100;10)$; $(10;100)$; 2) $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};\sqrt{17}\right)$; 3) $(4;1)$; $(1;4)$; 4) $(0{,}25;64)$; $(8;2)$. **6.1.9.** 1) 3; 9; 2) 3; $3\sqrt{3}$; 3) 10^9; 4) 0,0001; 10. **6.1.10.** 1) 10; $10^{-4{,}5}$; 2) 3; $\frac{1}{81}$; 3) 4; $2^{-\frac{3}{2}}$; 4) $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$. **6.1.11.** 1) 6; 2) 25; 3) 512; 4) ±3. **6.1.12.** 1) 2; 1024; 2) 23; $-1\frac{4}{5}$; 3) 4; $\sqrt{2}$; 4) 8; $2^{-\frac{2}{3}}$. **6.1.13.** 1) 1; 2) 0; 3) 5; 4) 2. **6.1.14.** 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 1; 2. **6.1.15.** 1) $2^{\log_6 3}$; 2) 3; 3) -4; 4) 3; $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **6.1.16.** 1) 4; 2) 9; $\frac{1}{9}$; 3) 2; $\frac{1}{6}$; 4) 3; 1. **6.1.17.** 1) $[-1;0)$; 2) $[25;+\infty)$. **6.1.18.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **6.2.1.** 1) $(9;+\infty)$; 2) $(0;5)$; 3) $(0{,}5;+\infty)$; 4) $(0;100)$. **6.2.2.** 1) $(2;+\infty)$; 2) $(0{,}2;2)$; 3) $\left(\frac{2}{3};9\right)$; 4) $(-0{,}5;1{,}5)$. **6.2.3.** 1) $(3;+\infty)$; 2) $\left(-\frac{1}{3};1\right)$; 3) $(2;3)$; 4) $(0{,}5;4]$. **6.2.4.** 1) $(0;3)\cup(9;+\infty)$; 2) $(0{,}1;10)\cup(10;1000)$; 3) $\left[\frac{1}{9};9\right]$; 4) $(0;0{,}5]\cup[4;+\infty)$. **6.2.5.** 1) $(10;+\infty)$; 2) $[6;+\infty)$; 3) $(-4;-3)\cup(4;5)$; 4) $[1;+\infty)$. **6.2.6.** 1) $(0;0{,}25]$; 2) $(1;4)$; 3) $(0;1)\cup[\sqrt{2};4]$; 4) $(-2;0{,}5)$. **6.2.7.** 1) Графік функції $y=-x^2+2x+3$, де $|x|<\sqrt{3}$; 2) графік функції $y=|x|$ з «виколотою» точкою $(0;0)$; 3) для $x<0$ — частина площини вище за графік функції $y=-x$, для $0<x<1$ — частина площини нижче від графіка функції $y=-x$; 4) частина площини вище за графік функції $y=x^2$, де $x\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. **6.2.8.** 1) $(0;1)\cup[2;4]$; 2) $\left(-\frac{3}{4};0\right)\cup(3;+\infty)$; 3) $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)\cup\left(1;\frac{5}{2}\right)$; 4) $(0;625)$. **6.2.9.** 1) $(2+\sqrt{2};\ 4)$; 2) $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{11}{3};10\right)$; 3) $(\sqrt{5};3)$; 4) $(1;4)$. **6.2.10.** 1) $\left(-2;\frac{1}{2}\right)$; 2) $(-2;0)\cup(0;2)$; 3) $(-4;0)\cup(0;4)$; 4) $(4;64]$. **6.2.11.** 1) $\left(-1;\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\right)$;

2) $\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$; 3) $(-11;1]\cup(2;2,5)$;
4) $(0;0,001)\cup(1;100)$. **6.2.12.** 1) $(3\log_3 2;\ 2]$;
2) $(-\infty;0]\cup[\log_6 5;\ 1)$; 3) $(-\infty;0)\cup(1;2)$;
4) $(-\infty;1]$. **6.2.13.** 1) $(-\infty;0)\cup(1;2)$;
2) $\{1\}\cup(\sqrt{2};+\infty)$; 3) $\{1\}\cup(\sqrt{3};+\infty)$;
4) $(-\infty;-5)\cup(-1;+\infty)$.
6.2.14. 1) $[-1;0)\cup(3;4]$; 2) $[2;3]$;
3) $\left(-\frac{1}{3};0\right]\cup(4;+\infty)$; 4) $(-1;0]\cup(1;+\infty)$.
6.2.15. 1) $(-1;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup[2;+\infty)$;
2) $(-3;-2,5)\cup(1;4,5]$;
3) $(0;0,5)\cup(1;2)\cup(2,5;+\infty)$;
4) $[4;5)\cup(5;6)\cup(6;+\infty)$.
6.2.16. 1) $\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{6}\right)$;
2) $\left(-\frac{1}{5};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{12}\right)$; 3) $\left(-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup(3;+\infty)$;
4) $(0;1)\cup(1,5;2,5)\cup(7,5;+\infty)$.

§ 7. 7.1. 1) $3e^x$; 2) $e^x-\frac{1}{x}$; 3) $-e^{-x}+5x^4$;
4) $\frac{2}{2x-1}$. **7.2.** 1) $e^{5x}(5\cos x-\sin x)$;
2) $\frac{1-\ln x}{x^2}$; 3) $\frac{\lg x}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln 10}$;
4) $x^2\left(3\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}\right)$. **7.3.** 1) $(0,5\ln 0,5;+\infty)$;
2) $(-\infty;0)\cup(0,5;+\infty)$; 3) $\left(\frac{1}{e};+\infty\right)$;
4) $(1,5;+\infty)$. **7.4.** 1) а) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right)$;
в) $\left(0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; 2) а) 1; б) $(1;+\infty)$; в) $(0;1)$;
3) а) e; б) $(0;e)$; в) $(e;+\infty)$; 4) а) e^{-2};
б) $(e^{-2};+\infty)$; в) $(0;e^{-2})$.
7.5. 1) $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}$; 2) $y=4x+1-\frac{\pi}{2}$;
3) $y=2$; 4) $y=-1$. **7.6.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$;
2) 1; 3) 0. **7.7.** $y=5x+2$. **7.8.** $y=3x-1$.
7.9. 2) $f_{\max}=\ln 2+5$, $f_{\min}=\ln 4-2$.
7.10. 1) зростає на $[0;+\infty)$, спадає на $(-\infty;0]$; $x_{\min}=0$; 2) зростає на $[1;+\infty)$, спадає на $(0;1]$; $x_{\max}=1$; 3) зростає на $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$, спадає на $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$; $x_{\min}=-\frac{1}{2}$;
4) зростає на $[2;+\infty)$, спадає на $(-\infty;1)$ і на $(1;2]$; $x_{\min}=2$; 5) зростає на $[1;+\infty)$, спадає на $(0;1]$; $x_{\min}=1$; 6) зростає на $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$, спадає на $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$; $x_{\max}=\frac{1}{2}$.
7.11. 1) Рис. 1; 2) рис. 2; 3) рис. 3;

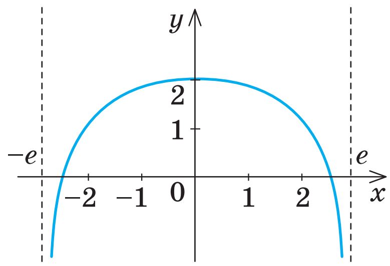


Рис. 1

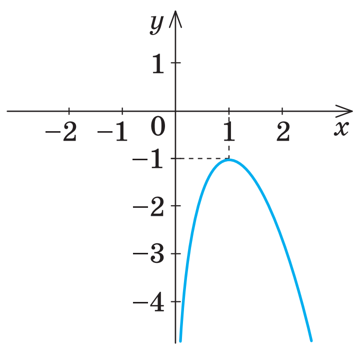


Рис. 2

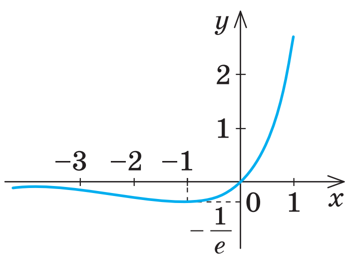


Рис. 3

4) рис. 4; 5) рис. 5; 6) рис. 6.

7.12. 1) а) Рис. 7; б) $E(f)=\left[-\frac{2}{e};+\infty\right)$;
в) при $a<-\frac{2}{e}$ розв'язків немає;
при $a=-\frac{2}{e}$ і $a\geqslant 0$ — один розв'язок;

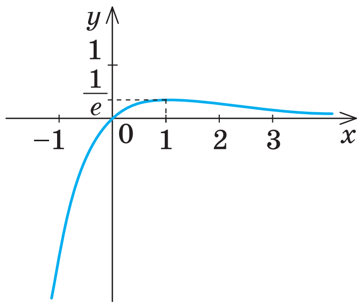


Рис. 4

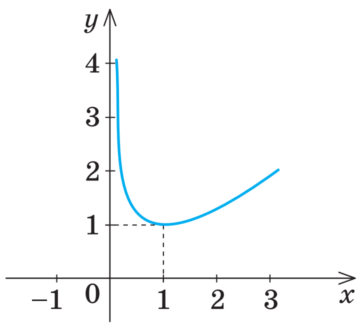


Рис. 5

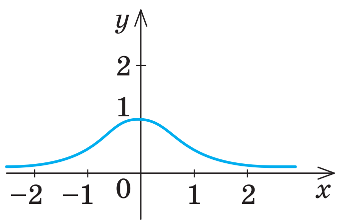


Рис. 6

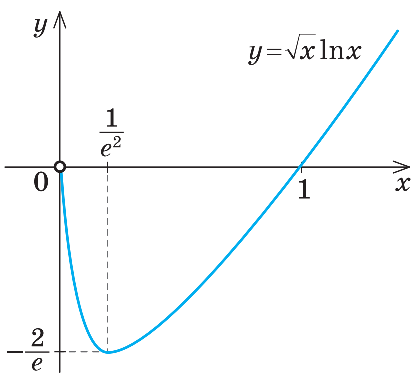


Рис. 7

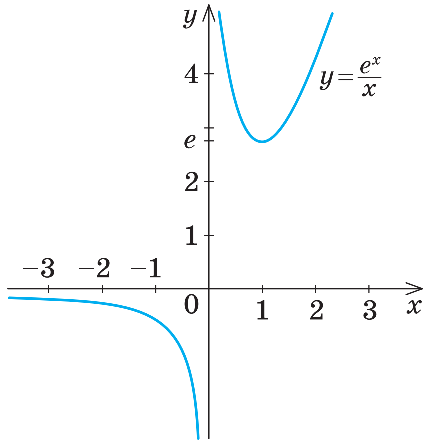


Рис. 8

при $-\frac{2}{e}<a<0$ — два розв'язки; 2) а) рис. 8;
б) $E(f)=(-\infty;0)\cup[e;+\infty)$; в) при $a<0$, $a=e$ — один розв'язок; при $0\leqslant a<e$ розв'язків немає; при $a>e$ — два розв'язки. **7.13.** $\left(\frac{a}{6}\right)^6$. **7.14.** 1) 0; 2) 1. **7.15.** 1) 0. 3) 1. *Вказівка*. При $x<0$ виконайте оцінку значень лівої і правої частин рівняння. **7.16.** 1) 1; 2; 2) 1; 3; 3) −2; 0. **7.17.** 1) 0; 1; 3; 2) 0; 1; 2; 3) 0; ±1; 4) 1. **7.18.** *Вказівка*. Використайте похідну. Дослідіть функцію, яка є різницею лівої і правої частин нерівності.
7.19. 1) $1000^{1001}>1001^{1000}$;
2) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$; 3) $(\lg 5)^3<3^{\lg 5}$.
7.20. При $a<1$ коренів немає, при $a=1$ єдиний корінь, при $a>1$ два корені.
7.21. $a\in(-\infty;0]\cup\left\{\frac{1}{2e}\right\}$. **7.22.** $a\in[0;+\infty)$.
7.23. $a\in(-\infty;0]$. **7.24.** $a\in[0;+\infty)$.
7.25. $a\in(-\infty;1]$. **7.26.** $a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.
7.27. $a\in(-\infty;0]$.

§ 8. 8.1. 1) 1; 2) 1; 3) 2; 4) 0; 5) 4; 6) коренів немає; 7) ±2; 8) 1. *Вказівка*. Запишіть рівняння у вигляді

$\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2x-x^2$ і врахуйте, що при $x>0$ $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$; 9) 1. **8.2.** 1) ± 2; 2) ± 2; 3) 2. *Вказівка*. Поділіть обидві частини рівняння на 2^x і врахуйте, що функція, одержана у лівій частині, є спадною. **8.3.** 1) 0,25; 2; 2) 1; 3; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1,5. **8.4.** 1) -3; $[-1;+\infty)$; 2) $[25;+\infty)$.

8.5. 1) При $a\geqslant 11$ $x=\log_5\frac{a-1\pm\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$; при $a<-1{,}5$ $x=\log_5\frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$; при $-1{,}5\leqslant a<11$ коренів немає; 2) при $-1<a\leqslant 3-2\sqrt{2}$ або $3<a\leqslant 3+2\sqrt{2}$ $x=\log_2\frac{a^2-1}{2(a-3)}$; при $a\leqslant -1$ або $3-2\sqrt{2}<a\leqslant 3$, або $a>3+2\sqrt{2}$ коренів немає. **8.6.** 1) 1; 1000; 2) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 10; 3) $\frac{1}{16}$; 8;4) 3; 5) -1; 0; 2; 6) а) 1; 4; б) 0; 1; 4; 7) 3; 8) 0,25; 4; 9) 2. **8.7.** 1) $(-5;-5)$; $(2;2)$; 2) $(3;3)$. **8.8.** 1) $(25;5)$; $(5;25)$; 2) $(0{,}5;0{,}125)$; $(8;2)$. **8.9.** $-1<a\leqslant 0$. **8.10.** $a\geqslant 1$. **8.11.** $a=-4$. *Вказівка*. Зведіть рівняння до виду $f(x)=0$ і врахуйте, що функція $f(x)$ парна. **8.12.** $a\leqslant 0$, $a=0{,}25$. **8.13.** При $a<0$ коренів немає; при $a=0$ один корінь; при $a>0$ два корені. **8.14.** При $a\leqslant -1$ або $a\geqslant 7$ один корінь; при $-1<a<7$ два корені. **8.15.** $a\geqslant -2{,}25$. **8.16.** 1) $-2{,}5$; 2) 0,6; 3) 1,75; 4) 3. **8.17.** 1) -2; 2) 16; 4) 64. **8.18.** $-2<a<2$. *Вказівка*. Запишіть задані вирази як степені з однаковою основою 5.

Тест 1. **1.** В. **2.** Д. **3.** Б. **4.** 1 – Г, 2 – Б, 3 – А. **5.** 1 – Б, 2 – А, 3 – Г. **6.** Д. **7.** В. **8.** $(0;1]\cup[10;+\infty)$. **9.** $D(y)=(0;+\infty)$, функція зростає на проміжку $(0;1]$ і спадає на проміжку $[1;+\infty)$, $x_{\max}=1$, $y_{\max}=-1$, вертикальна асимптота $x=0$.

Розділ 2

§ 9. **9.4.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. **9.5.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) так.

9.6. 1) $2x-\frac{x^5}{5}+C$; 2) $\frac{x^2}{2}+\sin x+C$; 3) $2x^2+C$; 4) $-8x+C$; 5) $\frac{x^7}{7}+C$; 6) $-\frac{1}{2x^2}-2x+C$; 7) $x+\frac{1}{3x^3}+C$; 8) $\frac{x^4}{4}+C$. **9.7.** 1) $2x-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2x^2}+C$; 2) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^4}+\sin x+C$; 3) $-\frac{1}{x}+\cos x+C$; 4) $\frac{5}{3}x^3-x+C$; 5) $\frac{1}{12}(2x-8)^6+C$; 6) $-\frac{3}{2}\cos 2x+C$; 7) $-\frac{1}{40}(4-5x)^8+C$; 8) $-\frac{1}{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$; 9) $\frac{1}{15(x-15x)^3}+C$; 10) $-2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+C$; 11) $-\frac{4}{3(3x-1)}+C$; 12) $\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x-1)+C$.

9.8. 1) $x-\frac{1}{3}\sin 3x+2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+C$; 2) $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}4x-2\sqrt{2-x}-x^3+C$; 3) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x+1)-3\cos(4-x)+x^2+C$; 4) $\frac{1}{4(3-2x)^2}+\frac{6}{5}\sqrt{5x-2}+2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+C$.

9.9. 1) $-\frac{1}{x}-10$; 2) $\operatorname{tg}x-1$; 3) $\frac{x^4}{4}+1\frac{3}{4}$; 4) $-\cos x-2$. **9.10.** 1) x^2+x; 2) x^3-x^2+4; 3) $\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-4\frac{1}{3}$.

9.11. 1) $2\sin x+3$; 2) $x-\frac{x^3}{3}+3$;

3) $-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$; 4) $-\frac{1}{3x^3}+5\frac{2}{3}$.

9.12. 1) $2x^2-\frac{1}{x}+1$; 2) $\frac{x^4}{4}+2x+3$;

3) $x-x^2+8$; 4) $-\frac{1}{x}-2x^5+3x+5$.

9.17. $F(x)=2x^4-x^2-28$. Нуль: -2.

9.18. $F(x)=x^3-2x^2-3x$. Нулі: -1; 0.

9.19. $F(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+11$ або

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$.

9.20. $F(x)=2x^2-\frac{1}{3}x^3+3\frac{2}{3}$ або

$F(x)=2x^2-\frac{1}{3}x^3-32\frac{1}{3}$. **9.21.** x^3-x^4+7.

9.22. $2x^2-x^5-35$. **9.23.** $\frac{t^3}{3}+t^2-t$.

9.24. $4\sin\frac{t}{2}+2$. **9.25.** t^4+2t^2+2t+7.

9.26. 1) $x=-\frac{1}{2}t^3+t^2+3{,}5t-9$;

2) $x=-2\sin t+3$; 3) $x=-5\cos t-3t+4+\frac{3\pi}{2}$;

4) $x=\frac{1}{3}t^3+t^2+t-1\frac{2}{3}$.

§ 10. **10.1.1.** 1) 6,6; 2) 1; 3) 20; 4) 1;

5) $\frac{1}{15}$; 6) 6; 7) 0,9; 8) 0,5. **10.1.2.** 1) 3; 2) 2;

3) $9\sqrt{3}$; 4) 4; 5) $\frac{2\pi}{3}+1$; 6) 78; 7) $\frac{\pi+3}{12}$;

8) 9,5. **10.1.4.** 1) 0,4; 2) $9\frac{1}{3}$; 3) 1,6; 4) $10\frac{2}{3}$.

10.1.5. 1) 0,75; 2) 2; 3) $7\frac{1}{3}$; 4) $5\frac{1}{3}$.

10.1.6. 1) 4,25; 2) $2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$; 3) $2\frac{2}{3}$;

4) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **10.1.7.** 1) 2π; 2) $6{,}25\pi$; 3) $4{,}5\pi$;

4) 2,5. **10.1.8.** 1) 2π; 2) $12{,}5\pi$; 3) 5; 4) 8,5.

10.1.9. 0,1 Дж. **10.2.7.** $5\frac{1}{3}$. **10.2.8.** 4,5.

10.2.9. 2) $\frac{15\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{16\pi}{15}$.

10.2.10. 1) $\frac{2\pi}{5}$; 2) 11π; 3) $\frac{50\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{6}$.

10.2.21. 5 і -5. **10.2.22.** 4 і -4.

10.2.23. 4 банки. **10.3.1.** 1) 68 м; 2) $21\frac{1}{3}$.

Тест 2. **1.** Г. **2.** Д. **3.** Д. **4.** В. **5.** 1 – Г, 2 – В, 3 – Б. **6.** 10. **7.** $x+\frac{x^2}{2}-2\sqrt{1-x}+C$. **8.** 0,5. **9.** 0,75.

Розділ 3

§ 11. **11.1.1.** 12. **11.1.2.** 1) 16; 2) 60. **11.1.3.** 2052; яблуко. **11.1.4.** 1680. *Вказівка*. Доцільно за місця вибрати екзамени і розміщувати по них задані дні. **11.1.5.** 24. **11.1.6.** 870. **11.1.7.** 336. **11.1.8.** 210. **11.1.9.** 2730. **11.1.10.** $26\cdot25\cdot24\cdot23\cdot22$. **11.1.11.** 120. **11.1.12.** 96. **11.1.13.** 544 320. **11.1.14.** 1) 24; 2) 12. **11.1.15.** 1) 5; 2) 6. **11.1.16.** $A_{30}^5\cdot A_{25}^5\cdot A_{20}^5\cdot A_{15}^5\cdot A_{10}^5\cdot A_5^5$. **11.2.1.** 24. **11.2.2.** 5040. **11.2.3.** 120. **11.2.4.** 6. **11.2.5.** 1) 720; 2) 600. **11.2.6.** 1) 6; 2) 6. **11.2.7.** 384. **11.2.8.** 240. **11.2.9.** $5!\cdot8!$. **11.2.10.** 10!; $(5!)^2$. **11.3.1.** 21. **11.3.2.** 56. **11.3.3.** 210. **11.3.4.** 1) 55; 2) 165. **11.3.5.** 400 400. **11.3.16.** 15 120. **11.3.20.** 6. **11.3.23.** 1) 10; 2) 15; 3) 8; 4) 8. **11.3.24.** 1) 7; 2) 9; 3) 10; 4) 9. **11.3.25.** 1) $(7;3)$; 2) $(6;3)$; 3) $(18;8)$; 4) $(12;5)$.

§ 12. **12.1.1.** 1 — Випадкова;
2 — неможлива; 3 — випадкова;
4 — неможлива; 5 — випадкова;
6 — неможлива; 7 — випадкова;
8 — неможлива; 9 — вірогідна;
10 — випадкова; 11 — випадкова.
12.1.3. 0,03. **12.1.4.** 0,002. **12.1.5.** 0,998. **12.1.6.** 0. **12.1.7.** 1. **12.1.8.** 1; 0. **12.1.9.** $\frac{1}{24}$. **12.1.10.** $\frac{1}{1250}$. **12.1.11.** 0,04. **12.1.12.** 0,75. **12.1.13.** $\frac{1}{12}$. **12.1.14.** 0,95. **12.1.15.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) $\frac{2}{3}$. **12.1.16.** Виграші рівноможливі. **12.1.17.** Ні.

12.1.18. 1) червоне; 2) а) 1; б) 0; в) 0,4; г) 0,52. **12.1.19.** Будь-яку.
12.1.20. 1 червона, 5 жовтих.
12.1.21. Зелена, $p=\frac{1}{6}$. **12.1.22.** 1) а) $\frac{4}{15}$; б) 0; в) $\frac{1}{3}$; 2) 11. **12.1.23.** $(2;1)$.
12.1.24. $\frac{2}{3}$. **12.1.25.** $\frac{1}{120}$. **12.2.3.** 1) U — вірогідна подія; $A+U$ — «відбувається подія A або подія U»; U — «відбувається подія U»; отже, якщо відбудеться U, то «A або U» буде справедливим;
2) $A+A$ — «відбувається подія A або A»; A — «відбувається подія A»; отже, якщо відбудеться A, то «A або A» буде справедливим; 3) подія «A відбувається або A не відбувається» є вірогідною;
4) одночасно подія A відбуватися і не відбуватися не може, тому добуток цих подій — неможлива подія;
5) A — «відбувається подія A», отже, справедливим є «відбувається подія A або неможлива подія»; 6) $A\cdot\varnothing$ — «обов'язково відбудеться неможлива подія», $\varnothing$ — відбудеться неможлива подія, отже, $A\cdot\varnothing=\varnothing$. **12.2.4.** 1) $A_1\cdot A_2\cdot A_3$; 2) $\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3$; 3) $A_1+A_2+A_3$; 4) $A_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3$; 5) $\bar{A}_1\cdot A_2\cdot A_3$.
12.2.5. A і B; A і C; B і M; C і D; C і M; C і T; D і K; D і M; D і T. **12.2.6.** A і B; C і D; C і M; D і M; K і M. **12.2.7.** $\frac{7}{16}$. **12.2.8.** $\frac{4}{13}$.
12.3.2. 1) 0,42; 2) 0,51; 3) 0,49.
12.3.3. 1) 0,43; 2) 0,1; 3) 0,9. **12.3.6.** 1) 0,71; 2) 0,71; 3) 0,51; 4) 0,49; 5) 0,96; 6) 1.
12.3.7. 1) 0,53; 2) 0,9; 3) 0,47; 4) 0,76.
12.4.1. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{2}{15}$; 4) $\frac{1}{3}$.
12.4.2. 1) 0,5; 2) 0,625. **12.4.3.** 0,2375.
12.4.4. 0,2. **12.4.5.** $\frac{8}{203}$. **12.5.1.** 0,64.
12.5.2. $\frac{1}{12}$. **12.5.3.** 0,0012. **12.5.5.** 1) 0,42; 2) 0,985; 3) 0,14; 4) 0,425. **12.5.6.** 0,714.
12.5.7. 0,126. **13.5.8.** 0,5. **12.5.9.** $n\geqslant 4$.

12.6.1.

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

12.6.2.

X	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Y	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Z	1	2
P	0,5	0,5

12.6.3.

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

12.6.4.

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

12.6.6. 3,5. **12.6.8.** Гра несправедлива.
12.6.10. Гра несправедлива. **12.6.11.** 2:1.
12.6.12. Перший гравець: повинен одержати 157,5 ліврів, другий — 52,5.
12.6.13. 11:5.

§ 13. **13.1.2.** 240. **13.1.3.**

Колір	чорний	черво-ний	синій	сірий	білий	жовтий	зеле-ний
Кількість бейсболок	9600	6000	4800	4200	3300	1500	600

13.1.4.

Жирність	0	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5
Кількість літрів	400	240	160	200	480	280	240

13.2.4. 1) $R=4$; $Mo=2$; $Me=2$; $\bar{X}=2\frac{2}{3}$
2) $R=8$; $Mo=2$; $Me=1$; $\bar{X}=0{,}6$.
13.2.6. 1) $R=3$; $Mo=3$; $Me=3$; $\bar{X}=3\frac{4}{11}$;

2) $R=8$; $Mo_1=4$; $Mo_2=5$; $Me=4$; $\bar{X}=3\frac{4}{7}$. **13.2.7.** $Mo_1=135$; $Mo_2=140$; $Me=135$; $\bar{X}=129\frac{6}{11}$.

Тест 3. **1.** А. **2.** Д. **3.** В. **4.** 1 – А, 2 – Г, 3 – Б. **5.** $\frac{5}{6}$. **6.** 7. **7.** $\frac{1}{15}$. **8.** 0,425.

Розділ 4

§ 14. **14.1.** 1) 8; 2) 12; 3) 9; 4) 7. **14.2.** 1) 1; 2) 5; 3) 3; 4) 2; 5) 5; 6) 6; 7) 2; 8) −2,5; 2; 9) $\sqrt[3]{9}$; 10) $\sqrt[3]{36}$.

14.3. 1) $\frac{15+\sqrt{129}}{8}$; 2) $\frac{19+\sqrt{137}}{8}$; 3) 1; 4) 2. **14.4.** 1) 12; 2) 8. **14.5.** 1) Коренів немає; 2) −3; 2; 3) −1; 0; 4) 4.

14.6. 1) $\frac{13-\sqrt{21}}{2}$; 2) $\frac{9-\sqrt{21}}{2}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $2+\sqrt{2}$. **14.7.** 1) 3; 2) 2.

14.8. 1) $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **14.9.** 1) 0; $\pm\pi$; $\pm\frac{3\pi}{4}$; $\pm\frac{5\pi}{4}$; 2) $\pm\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$.

14.10. 1) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **14.11.** 1) $\frac{\pi k}{3}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

14.15. $\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+2\pi$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **14.21.** 1) 1; 2) −1.

14.23. 1) 0; $\frac{15}{4}$; 4; 2) −1; 3. **14.24.** 1) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\pm\arccos\frac{-1}{\sqrt{3}+1}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

14.28. 1) $-\frac{7\pi}{4}$; −6; −5; 2) −4; $\frac{5\pi}{4}$; −3.

14.29. 1) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; πn, $n\in\boldsymbol{Z}$.

14.30. 1) 1,5; 2) 0. **14.32.** 1) 3; 2) 1.

14.38. 1) $\left[\frac{11}{12};1\right)$; 2) $\left[\frac{9}{11};1\right)$.

14.41. 1) $\left(\frac{4}{7};\frac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$; 2) $\left(\frac{2}{5};\frac{17+\sqrt{73}}{18}\right)$; 3) $(-\infty;2]\cup[6,5;+\infty)$. **14.43.** 1) $(0,58;0,6)$; 2) $(0,44;0,5)$. **14.46.** $(\pi k;\pi+\pi k)$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

14.50. 2) $(-\infty;0)\cup(1;2)$. **14.62.** 1) $(1;5)$; 2) $(2;1)$. **14.63.** $c=-1$. **14.69.** $\left(0;\frac{1}{12}\right]$.

14.72. $\frac{2}{3}$ л. **14.73.** 0,5 л. **14.74.** 75 км/год. **14.75.** 40 км/год. **14.76.** 45 і 36 днів. **14.77.** 10 днів. **14.78.** 6 годин. **14.79.** 60 км/год. **14.80.** 15 км/год. **14.81.** 40 км/год і 55 км/год. **14.82.** 3:1. **14.83.** 3 кг і 7 кг. **14.84.** 45 кг. **14.85.** 40 кг. **14.86.** 2,5 кг. **14.87.** 3 тонни. **14.88.** 98. **14.89.** 25 років. **14.90.** 19 і 13 квартир. **14.91.** 7 кг; 4 кг; 4 кг. **14.92.** 850 л. **14.93.** 6 місяців.

Тест 4. **1.** В. **2.** Г. **3.** Б. **4.** Г. **5.** Б. **6.** 1 – В, 2 – А, 3 – Г. **7.** $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$. **8.** $[-4;-3)\cup(0;1]$. **9.** 1) При $0<a<\frac{1}{2}$ $x\in(2a;1]$; 2) при $a=\frac{1}{2}$ $\varnothing$; 3) при $\frac{1}{2}<a<1$ $x\in[1;2a)$; 4) при $a>1$ $x\in(0;1]\cup(2a;+\infty)$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аксіоми теорії ймовірностей 166

Варіаційний ряд 191
Вибірка 185
Випадкова величина 178
Відносна частота випадкової події 164
Властивості визначених інтегралів 113
— ймовірностей подій 159
— логарифмів 38
— степенів із дійсними показниками 7
— функції логарифмічної 47
— — показникової 12

Генеральна сукупність 185
Геометричний зміст визначеного інтеграла 112

Добуток (переріз) подій 158

Інтеграл визначений 112
— невизначений 101

Ймовірність події 150

Комбінаторика 132
Комбінація без повторень 142
Криволінійна трапеція 111

Логарифм числа 37
— — десятковий 37
— — натуральний 38

Математичне сподівання випадкової величини 180
Медіана 194
Метод заміни змінних 25, 203
— інтервалів 31, 204
Мода 194

Об'єм вибірки 185
Обчислення об'ємів тіл за допомогою інтеграла 121
— площ фігур за допомогою інтеграла 120
Операції над подіями 158
Основна властивість первісної 100
— логарифмічна тотожність 38

Первісна 100
Первісних таблиця 99
Перестановка 139
Події незалежні 174
— несумісні 149
— протилежні 158
— рівноможливі 149
Подія випадкова 148
— вірогідна 149
— неможлива 149
Полігон частот 191
Похідна логарифмічної функції 71
— показникової функції 71
Правила інтегрування 101
Правило добутку 134
— суми 134

Рівносильні рівняння і нерівності 19, 30, 53, 202
Рівняння-наслідки 53, 202
Рівняння показникове 20
Розв'язування логарифмічних рівнянь 53, 82
— — нерівностей 64, 82
— нерівностей 203
— показникових рівнянь 19, 24, 82
— — нерівностей 30, 82, 203
— рівнянь 203
— — і нерівностей з параметрами 212
— — — що містять знак модуля 205
— систем рівнянь і нерівностей 206, 210
Розмах вибірки 194
Розміщення 135

Середнє значення вибірки 195
Статистика 184
Сума (об'єднання) подій 158

Теорія ймовірностей 147

Умовна ймовірність 170

Формула Ньютона — Лейбніца 112
— переходу до логарифмів з іншою основою 39
Функція логарифмічна 46
— показникова 10

Частота події 163

ЗМІСТ

Шановні одинадцятикласники і одинадцятикласниці! 3
Як користуватися підручником 3

Розділ 1. Показникова та логарифмічна функції

§ 1. Узагальнення поняття степеня. Степінь із дійсним показником 6
§ 2. Показникова функція, її властивості та графік 10
§ 3. Розв’язування показникових рівнянь та нерівностей 19
§ 4. Логарифм числа. Властивості логарифмів 36
§ 5. Логарифмічна функція, її властивості та графік 46
§ 6. Розв’язування логарифмічних рівнянь та нерівностей 53
§ 7. Похідні показникової та логарифмічної функцій 71
§ 8. Показникові та логарифмічні рівняння й нерівності 82
Теми навчальних проектів 94
Завдання для підготовки до оцінювання. Тест № 1 95
Відомості з історії 96

Розділ 2. Інтеграл та його застосування

§ 9. Первісна та її властивості 98
§ 10. Визначений інтеграл та його застосування 109
Відомості з історії 128
Теми навчальних проектів 129
Завдання для підготовки до оцінювання. Тест № 2 130

Розділ 3. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей

§ 11. Елементи комбінаторики 132

§ 12. Основні поняття теорії ймовірностей 146

§ 13. Поняття про статистику. Характеристики рядів даних 184

Завдання для підготовки до оцінювання. Тест № 3 199

Теми навчальних проектів 199

Відомості з історії 200

Розділ 4. Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення та систематизація

§ 14. Систематизація й узагальнення відомостей про рівняння, нерівності та їх системи 202

Завдання для підготовки до оцінювання. Тест № 4 225

Відомості з історії 226

Відповіді до вправ 229

Предметний покажчик 237

Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім'я учня / учениці	Навчальний рік	Стан підручника	
			на початку року	в кінці року
1				
2				
3				
4				
5				

Навчальне видання

НЕЛІН Євген Петрович
ДОЛГОВА Оксана Євгенівна

«АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ (ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ)»
підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Редактор *О. В. Костіна*. Технічний редактор *А. В. Плиско*. Художнє оформлення *В. І. Труфена*.
Комп'ютерна верстка *О. М. Правдюк*. Коректор *Н. В. Красна*.

Окремі зображення, що використані в оформленні підручника,
розміщені в мережі Інтернет для вільного використання

Підписано до друку 30.05.2019. Формат 84×108/16.
Папір офсетний. Гарнітура Шкільна. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 25,20. Обл.-вид. арк. 35,3. Тираж 7113 прим. Зам. № 12505-2019.

ТОВ Видавництво «Ранок»,
вул. Кібальчича, 27, к. 135, Харків, 61071.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5215 від 22.09.2016.
Адреса редакції: вул. Космічна, 21а, Харків, 61145.
E-mail: office@ranok.com.ua. Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.

Підручник надруковано на папері українського виробництва

Надруковано у друкарні ТОВ «ТРІАДА-ПАК»,
пров. Сімферопольський, 6, Харків, 61052.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5340 від 15.05.2017.
Тел. +38 (057) 712-20-00. E-mail: sale@triada.kharkov.ua

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 11

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

Особливості підручника:

- узагальнюючі таблиці в кожному параграфі
- приклади розв'язування завдань з коментарями
- різнорівневі запитання і вправи
- завдання, які сприяють формуванню й розвитку предметних і ключових компетентностей

Інтернет-підтримка дозволить:

- здійснити онлайн-тестування за кожною темою
- детальніше ознайомитися з навчальним матеріалом
- скористатися презентаціями за темами курсу

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

ISBN 978-617-09-5232-5

Інтернет-підтримка
interactive.ranok.com.ua