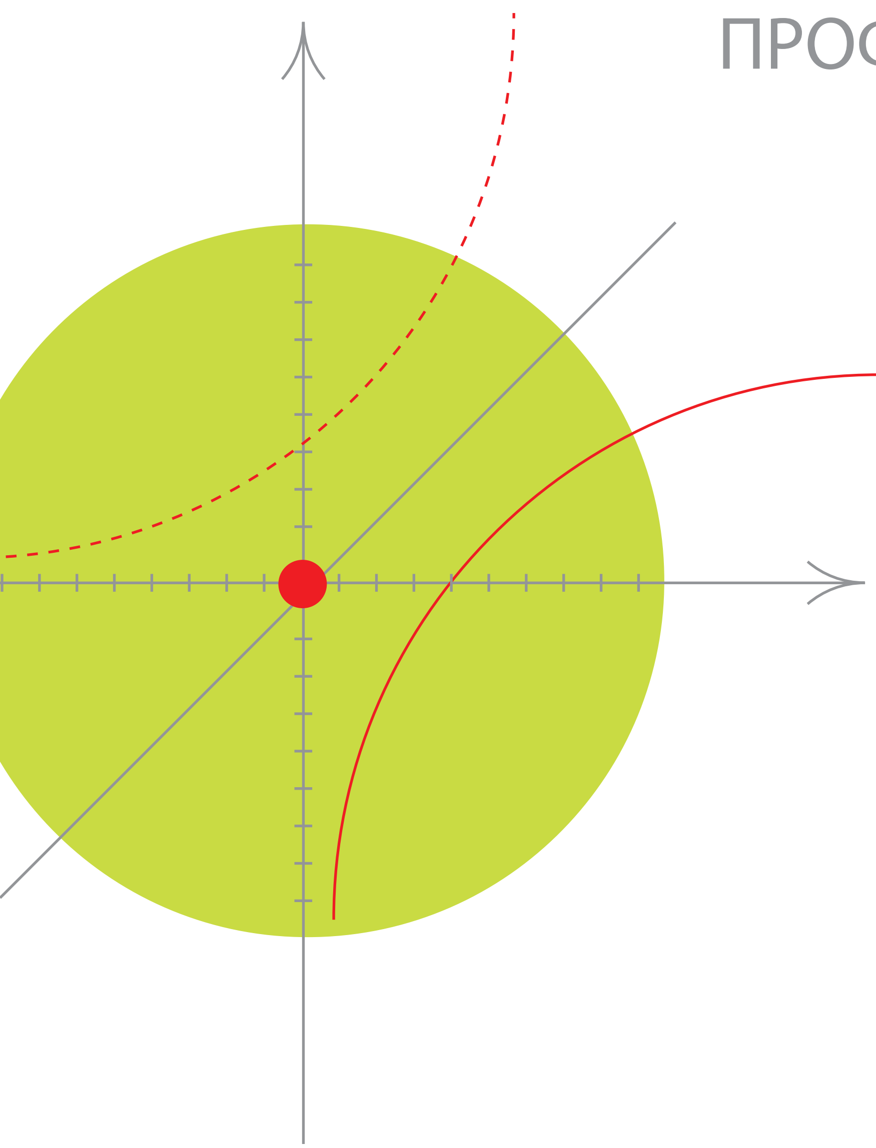
ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

10

Є. П. Нелін

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ



Інтернет-підтримка

Є. П. Нелін

АЛГЕБРА і ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

ПІДРУЧНИК ДЛЯ 10 КЛАСУ
ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

РЕКОМЕНДОВАНО
МІНІСТЕРСТВОМ ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВ
ВИДАВНИЦТВО «РАНОК»
2018

УДК [37.016:512](075.3)
Н49

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 31.05.2018 № 551)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Нелін Є. П.
Н49 Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018. — 272 с. : іл.
ISBN 978-617-09-4357-6

УДК [37.016:512](075.3)

Інтернет-підтримка
Електронні матеріали
до підручника розміщено на сайті
interactive.ranok.com.ua

ISBN 978-617-09-4357-6

Шановні десятикласники і десятикласниці!

Ви починаєте вивчати новий предмет — «Алгебра і початки аналізу», який об'єднує матеріал кількох галузей математичної науки.

Як і в курсі алгебри, значну увагу будемо приділяти розв'язуванню рівнянь та розгляду властивостей функцій. Але поряд із розв'язуванням знайомих завдань, пов'язаних із раціональними дробами, степенями і коренями, у 10 класі ви познайомитеся з новими видами функцій — степеневими і тригонометричними, відповідними рівняннями й нерівностями, а також принципово новими поняттями — похідною та границею функції. Саме вивчення границі та похідної і є одним із завдань математичного аналізу.

Математичний аналіз (або просто аналіз) — галузь математики, що сформувалася у XVIII ст. і відіграла значну роль у розвитку природничих наук завдяки появі нового потужного універсального методу дослідження функцій, які застосовують під час розв'язування різноманітних прикладних задач.

У попередніх класах ви вже починали знайомитися з функцією. У цьому році ви навчитеся досліджувати функції на новому рівні з використанням нових математичних інструментів.

Як користуватися підручником

Підручник має п'ять розділів, кожний із яких складається з параграфів, деякі параграфи — з пунктів. Параграфи і пункти, як правило, містять такі структурні блоки.

Довідкові таблиці наведені на початку більшості параграфів (пунктів) і вміщують основні означення, ознаки та властивості розглядуваних понять теми, систематизацію теоретичного матеріалу та *способів діяльності* з цим матеріалом у формі спеціальних *орієнтирів із розв'язування завдань*. Радимо опрацювати цей матеріал у першу чергу, а вже після цього переходити до наступного блоку.

Пояснення й обґрунтування являють собою докладне викладення теоретичного матеріалу, наведеного в таблицях. Таке подання навчального матеріалу (спочатку структурованого у вигляді таблиць, а потім описаного детально) дозволить кожному з вас вибирати свій власний рівень ознайомлення з обґрунтуваннями, будуючи власну освітню траєкторію.

Приклади розв'язування завдань ознайомлять вас із основними ідеями щодо розв'язування завдань, допоможуть усвідомити й засвоїти способи дій з основними алгебраїчними поняттями, набути необхідних предметних компетентностей. Для того щоб виділити орієнтовні основи діяльності з розв'язування завдань (загальні орієнтири), у прикладах власне розв'язання супроводжуються коментарями, які допоможуть вам скласти план розв'язування аналогічних завдань.

Розв'язання	**Коментар**
Як можна записати розв'язання завдання	Як можна міркувати під час розв'язування такого завдання

За такого подання коментар не заважає сприйняттю основної ідеї розв'язування завдань певного типу і дає змогу за потреби отримати детальну консультацію щодо розв'язування, яка міститься в коментарі.

З метою закріплення, контролю і самооцінювання засвоєння навчального матеріалу наприкінці кожного параграфа запропоновано систему запитань і вправ.

Запитання допоможуть вам пригадати й осмислити вивчене, звернути увагу на головне в параграфі, оцінити рівень засвоєння теоретичного матеріалу параграфа.

Вправи подано за трьома рівнями складності:

- *завдання середнього рівня* мають позначку «°»;
- *завдання достатнього рівня* (дещо складніші) подано без позначки;
- *завдання високого рівня* мають позначку «*».

До більшості вправ наприкінці підручника наведено *відповіді*.

У рубриці **«Виявіть свою компетентність»** наведено задачі практичного змісту та завдання, які для отримання розв'язку вимагають аналізу, узагальнення, систематизації набутих знань.

Зверніть також увагу на запропоновані в тексті параграфів супроводжуючі запитання, що спонукають до більш глибокого самостійного осмислення навчального матеріалу, та завдання, виконання яких, на нашу думку, сприятиме формуванню певних предметних і ключових компетентностей. Ці запитання та завдання мають відповідні позначення.

Інтернет-підпримка підручника дозволить здійснити онлайн-тестування за кожною темою, детальніше ознайомитися з навчальним матеріалом, дізнатися про досягнення видатних учених України та світу, дослідити розвиток алгебри як науки.

Для того щоб підручник допоміг вам у повній мірі, радимо ознайомитися із системою умовних позначень:

● початок обґрунтування твердження;

○ закінчення обґрунтування твердження;

▶ початок розв'язання задачі;

◁ закінчення розв'язання задачі;

? запитання до учнів;

! цікава інформація або така, яку варто обміркувати;

i матеріали, пов'язані з ІКТ та інтернет-підтримкою підручника;

завдання, які вимагають самостійного опрацювання, сприяють активізації розумової діяльності;

U діяльність, розрахована на роботу в команді.

Розділ 1

ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- систематизуєте і узагальните свої знання й уміння, пов’язані з множинами, функціями, рівняннями і нерівностями;
- ознайомитеся із загальними методами розв’язування рівнянь і нерівностей, зокрема з параметрами;
- навчитеся розв’язувати деякі складні рівняння й нерівності, що їх пропонують у завданнях зовнішнього незалежного оцінювання з математики

§ 1 МНОЖИНИ

1.1. Множини та операції над ними

Таблиця 1

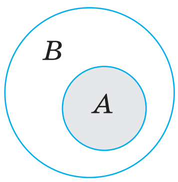
Поняття множини та її елементів

Елемент a належить множині A	$\Leftrightarrow$	$a \in A$
Елемент b не належить множині A	$\Leftrightarrow$	$b \notin A$
У множині немає елементів	$\Leftrightarrow$	$\varnothing$

Множину можна уявити собі як сукупність деяких об'єктів, що об'єднані за якоюсь ознакою. У математиці множини — це одне з основних неозначуваних понять. **Кожний об'єкт, що входить до множини A, називається *елементом* цієї *множини*.**

Множина, що не містить жодного елемента, називається *порожньою* множиною і позначається $\varnothing$

Підмножина ($\subset$)



$A \subset B$ $\Leftrightarrow$ Якщо $x \in A$, то $x \in B$

Якщо кожний елемент однієї множини A є елементом другої множини B, то кажуть, що перша множина A є підмножиною другої множини B, і записують так: $A \subset B$.

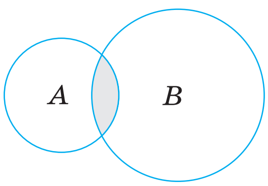
Використовують також запис $A \subseteq B$, якщо множина A або є підмножиною множини B, або дорівнює множині B

Рівність множин

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$$

Дві множини називаються *рівними*, якщо кожний елемент першої множини є елементом другої множини, і навпаки, кожний елемент другої множини є елементом першої множини

Переріз множин ($\bigcap$)

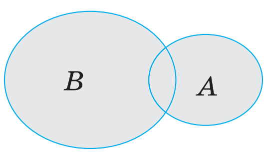


$C = A \bigcap B$

$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ і $x \in B$

***Перерізом множин* A і B називають їх спільну частину, тобто множину C всіх елементів, що належать як множині A, так і множині B**

Об'єднання множин ($\bigcup$)

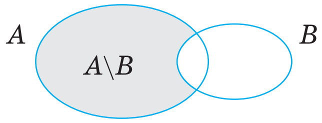


$C = A \bigcup B$

$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ або $x \in B$

***Об'єднанням множин* A і B називають множину C, складену з усіх елементів, що належать хоча б одній із цих множин (A або B)**

Різниця множин (\)

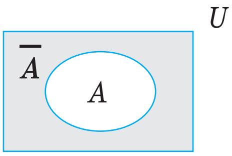


$C = A \setminus B$

$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ і $x \notin B$

Різницею множин** A* **і** *B* **називається множина** *C, що складається з усіх елементів, які належать множині** *A* **і не належать множині** *B*

Доповнення множин



$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$

Якщо всі множини, які ми розглядаємо, є підмножинами якоїсь так званої *універсальної* множини U, то різниця $U \setminus A$ називається *доповненням множини A*. Тобто ***доповненням множини** A* **називається множина, яка складається з усіх елементів, які не належать множині** *A* (але належать універсальній множині U)

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття множини

Одним з основних понять, які використовують у математиці, є поняття *множини*. Для нього не дають означення. Можна пояснити, що *множиною* називають довільну сукупність об'єктів, а самі об'єкти — *елементами* даної *множини*.

Так, можна говорити про множину дітей на гральному майданчику (елементи — діти), множину днів тижня (елементи — дні тижня), множину натуральних дільників числа 6 (елементи — числа 1, 2, 3, 6) тощо. У курсах алгебри та алгебри і початків аналізу найчастіше розглядають множини, елементами яких є числа, і тому їх називають *числовими множинами*.

Як правило, множини позначають великими літерами латинського алфавіту. Наприклад, якщо множина M складається з чисел 1; 2; 3, то її позначають так: $M = \{1; 2; 3\}$. Той факт, що число 2 входить до цієї множини (є елементом даної множини M), записують за допомогою спеціального знака «$\in$» так: $2 \in M$; а те, що число 5 не входить до цієї множини (не є елементом даної множини), записують так: $5 \notin M$.

Можна розглядати також множину, яка не містить жодного елемента, — *порожню множину*.

Наприклад, множина простих дільників числа 1 — порожня множина.

Для деяких множин існують спеціальні позначення. Так, порожню множину позначають символом $\varnothing$, множину всіх натуральних чисел — літерою $\boldsymbol{N}$, множину всіх цілих чисел — літерою $\boldsymbol{Z}$, множину всіх раціональних чисел — літерою $\boldsymbol{Q}$, а множину всіх дійсних чисел — літерою $\boldsymbol{R}$. Множини бувають *скінченні* й *нескінченні* залежно від того, яку кількість елементів вони містять. Так, множини $A = \{7\}$ і $M = \{1; 2; 3\}$ — скінченні, бо містять скінченне число елементів, а множини $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ — нескінченні.

Множини задають або за допомогою переліку їх елементів (лише для скінченних множин), або за допомогою опису, коли задається правило — *характеристична властивість*, — яке дозволяє визначити, чи належить даний об'єкт розглядуваній множині. Наприклад, множина $A = \{-1; 0; 1\}$ задана переліком елементів, а множина B парних цілих чисел — характеристичною властивістю елементів множини. Останню множину записують так:

$B = \{b \mid b$ — парне ціле число$\}$ або так:

$B = \{b \mid b = 2m$, де $m \in \boldsymbol{Z}\}$ — тут після вертикальної риски записано характеристичну властивість*.

У загальному вигляді запис за допомогою характеристичної властивості виглядає так: $A=\{x \mid P(x)\}$, де $P(x)$ — характеристична властивість. Наприклад, $\{x \mid x^2-1=0\}=\{-1,1\}, \{x \mid x\in \boldsymbol{R} \text{ і } x^2+1=0\}=\varnothing$.

2 Рівність множин

Нехай A — множина цифр трицифрового числа 312, тобто $A=\{3;1;2\}$, а B — множина натуральних чисел, менших від 4, тобто $B=\{1;2;3\}$. Оскільки ці множини складаються з одних і тих самих елементів, то їх вважають рівними. Це записують так: $A=B$. Установити рівність нескінченних множин у такий спосіб (порівнюючи всі елементи) неможливо. Тому в загальному випадку рівність множин означають так.

Означення. **Дві множини називаються *рівними*, якщо кожний елемент першої множини є елементом другої множини і, навпаки, кожний елемент другої множини є елементом першої множини.**

Із наведеного означення рівних множин випливає, що у множині однакові елементи не розрізняються. Дійсно, наприклад, $\{1;2;2\}=\{1;2\}$, оскільки кожний елемент першої множини (1 або 2) є елементом другої множини і, навпаки, кожний елемент другої множини (1 або 2) є елементом першої. Тому, записуючи множину, найчастіше кожний її елемент записують тільки один раз і, відповідно, при підрахунку кількості елементів множини кожен елемент рахують тільки один раз, тобто множина $\{1;2;2\}$ містить тільки два елементи.

3 Підмножина

Означення. **Якщо кожний елемент однієї множини A є елементом множини B, то перша множина A називається *підмножиною* множини B.**

Це записують так: $A\subset B$.

Наприклад, $\{1;2\}\subset\{0;1;2;3\}$, $\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Z}$ (оскільки будь-яке натуральне число — ціле), $\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}$ (оскільки будь-яке ціле число — раціональне), $\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}$ (оскільки будь-яке раціональне число — дійсне).

Вважають, що завжди $\varnothing\subset A$, тобто *порожня множина є підмножиною будь-якої множини*.

Інколи замість запису $A\subset B$ використовують також запис $A\subseteq B$, якщо множина A або є підмножиною множини B, або дорівнює множині B. Наприклад, $A\subseteq A$.

Порівняємо означення рівних множин з означенням підмножини. Якщо множини A і B рівні, то:

1) кожний елемент множини A є елементом множини B, отже, A — підмножина B $(A\subseteq B)$;
2) кожний елемент множини B є елементом множини A, отже, B — підмножина A $(B\subseteq A)$.

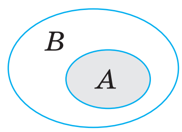
Отже, **дві множини рівні, якщо кожна з них є підмножиною іншої.**

Інколи співвідношення між множинами зручно ілюструвати за допомогою кругів (які часто називають кругами Ейлера — Венна). Наприклад, рис. 1.1.1 ілюструє означення підмножини, а рис. 1.1.2 — співвідношення між множинами ***N, Z, Q, R***.

4 Операції над множинами

Над множинами можна виконувати певні дії: знаходити переріз, об'єднання, різницю множин.

Означення цих операцій та їх ілюстрації за допомогою кругів Ейлера — Венна наведені в табл. 1 та в інтернет-підтримці підручника.



$A\subset B \Leftrightarrow$ Якщо $x\in A$, то $x\in B$

Рис. 1.1.1

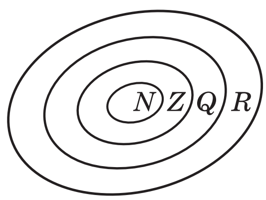


Рис. 1.1.2

* У цьому випадку, а також у записах розв'язків тригонометричних рівнянь і нерівностей у розділі 4 запис $m\in\boldsymbol{Z}$ означає, що m набуває будь-якого цілого значення. Це також можна записати так: $m=0$; ±1; ±2; … .

Запитання

1. Наведіть приклади множин, укажіть декілька елементів кожної множини.
2. Як позначають порожню множину, множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел?
3. Дайте означення рівних множин. Наведіть приклади двох рівних множин.
4. Дайте означення підмножини. Наведіть приклади. Проілюструйте це поняття за допомогою кругів Ейлера — Венна.
5. Дайте означення перерізу, об'єднання, різниці двох множин. Проілюструйте їх за допомогою кругів Ейлера — Венна. Наведіть приклади.
6. Поясніть, що називають доповненням однієї множини до іншої; доповненням множини. Проілюструйте ці поняття за допомогою відповідних рисунків. Наведіть приклади.

Вправи

1.1.1°. Запишіть за допомогою фігурних дужок множину:

1) літер у слові «алгебра»;
2) парних одноцифрових натуральних чисел;
3) непарних одноцифрових натуральних чисел;
4) одноцифрових простих чисел.

1.1.2°. За якою характеристичною властивістю записані такі множини:

1) {понеділок, вівторок, середа, четвер, п'ятниця, субота, неділя};
2) {січень, лютий, березень, квітень, травень, червень, липень, серпень, вересень, жовтень, листопад, грудень};
3) {Австралія, Азія, Америка, Антарктида, Африка, Європа};
4) {до, ре, мі, фа, соль, ля, сі};
5) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}?

1.1.3°. Наведіть приклади порожніх множин.

1.1.4°. Відомо, що A — множина натуральних чисел, розташованих між числами 15 і 35. Запишіть множину A за допомогою фігурних дужок. Які з чисел 18, 28, 36, 40 належать множині A? Відповідь запишіть за допомогою знаків «$\in$» і «$\notin$».

1.1.5°. Запишіть за допомогою фігурних дужок і позначте множину:

1) натуральних дільників числа 12;
2) натуральних дільників числа 30;
3) цілих дільників числа 6;
4) простих дільників числа 12.

1.1.6°. Відомо, що $M=\{1;2;5\}$, $N=\{1;4;5;7;9\}$, $K=\{4;7;9\}$. Запишіть за допомогою фігурних дужок або знака $\varnothing$:

1) переріз M і N;
2) переріз M і K;
3) переріз N і K;
4) об'єднання M і N;
5) об'єднання M і K;
6) об'єднання N і K;
7) різницю M і N;
8) різницю M і K;
9) різницю N і K;
10) доповнення K до N.

1.1.7°. Поясніть, чому виконуються такі рівності:

1) $A\cup\varnothing=A$; 2) $A\cup A=A$; 3) $A\cap\varnothing=\varnothing$; 4) $A\cap A=A$.

1.1.8°. Запишіть множину всіх двоцифрових чисел, які можна записати за допомогою цифр 0, 1, 3.

1.1.9°. Відомо, що A — множина натуральних дільників числа 12, а B — множина цілих дільників числа 6. Запишіть множини:

1) $A\cup B$; 2) $A\cap B$; 3) $A\setminus B$; 4) $B\setminus A$.

1.1.10*. Нехай A і B — деякі множини. Доведіть указані рівності та проілюструйте їх за допомогою кругів Ейлера — Венна:

1) $A\cup B=B\cup A$ — *переставний закон для об'єднання*;

2) $A\cap B=B\cap A$ — *переставний закон для перерізу*.

1.1.11. В одній множині 40 різних елементів, а в іншій — 30. Скільки елементів може бути в їх:

1) перерізі; 2) об'єднанні?

1.1.12*. Нехай A, B, C — деякі множини. Доведіть указані рівності та проілюструйте їх за допомогою кругів Ейлера — Венна:

1) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ — *сполучний закон для об'єднання*,

2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ — *сполучний закон для перерізу*;

3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

4) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

— *розподільні закони;*

5) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

6) $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

— *закони де Моргана.*

1.1.13*. Доведіть рівності та проілюструйте їх за допомогою кругів Ейлера — Венна:

1) $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$; 2) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.

1.1.14*. Запишіть множину всіх правильних дробів $\frac{a}{b}$, де $a\in A$, $b\in B$ і $A=\{2;3;4;6\}$, $B=\{1;3;4;5;6\}$.

1.1.15*. Які трицифрові числа можна записати, якщо: $A=\{3;1;2\}$ — множина цифр для позначення їхніх сотень; $B=\{2;8\}$ — множина цифр для позначення їхніх десятків; $C=\{5;7\}$ — множина цифр для позначення їхніх одиниць? Скільки таких чисел одержимо? Спробуйте сформулювати загальне правило підрахунку кількості таких чисел, якщо множина A містить m елементів $(0\notin A)$, множина B — n елементів, множина C — k елементів.

Виявіть свою компетентність

1.1.16. Кожний учень у класі вивчає англійську або французьку мову. Англійську мову вивчають 25 осіб, французьку — 27, а обидві мови — 18. Скільки учнів у класі?

1.2. Числові множини. Множина дійсних чисел

Таблиця 2

1. Числові множини

Дійсні числа R

Числа, які можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу

Раціональні числа Q

Можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число.

Записують у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу

$$\left(\frac{1}{3}=0{,}333\ldots=0{,}(3)\right)$$

Ірраціональні числа

Не можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число.

Записують у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу

$$\left(\sqrt{2}=1{,}4142135\ldots\right)$$

Цілі числа Z

Включають натуральні числа, числа, їм протилежні, та число 0

Дробові числа

Числа, складені з цілого числа часток одиниці ($\frac{2}{5}$ — звичайний дріб; $1{,}23$ — десятковий дріб: $1{,}23=\frac{123}{100}$)

Натуральні числа N (цілі додатні)

У шкільному курсі математики натуральне число — основне неозначуване поняття

Число 0

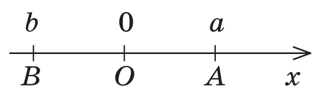
Таке число, що будь-яке число при додаванні до нього не змінюється

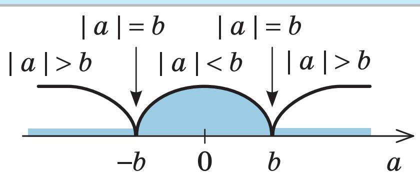
$$(a+0=0+a=a)$$

Цілі від'ємні числа

Числа, протилежні натуральним

2. Модуль дійсного числа та його властивості

Означення	Геометричний зміст модуля
Модулем додатного числа **називається саме це число;** ***модулем від'ємного числа*** **називається число, йому протилежне;** ***модуль нуля*** **дорівнює нулю.** $\lvert a\rvert=\begin{cases}a \text{ при } a>0,\\ 0 \text{ при } a=0,\\ -a \text{ при } a<0\end{cases}$	 $\lvert a\rvert=OA$, $\lvert b\rvert=OB$, $\lvert a-b\rvert=AB$. **На координатній прямій** ***модуль*** **— це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число.** *Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій*

Властивості модуля	
1. $\lvert a\rvert \geqslant 0$	*Модуль будь-якого числа — невід'ємне число*
2. $\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$	*Модулі протилежних чисел рівні*
3. $a \leqslant \lvert a\rvert$, тобто $-\lvert a\rvert \leqslant a \leqslant \lvert a\rvert$	*Величина числа не перевищує величини його модуля*
4. При $b>0$ $\lvert a\rvert \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$ 5. При $b>0$ $\lvert a\rvert \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b$ або $a \geqslant b$	
6. $\lvert a \cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	*Модуль добутку дорівнює добутку модулів множників*
7. $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$ $(b \neq 0)$	*Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю)*
8. $\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n$, $\lvert a\rvert^2 = a^2$, $\lvert a\rvert^{2k} = a^{2k}$	
9. $\lvert a+b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$, $\lvert a_1 + a_2 + \ldots + a_n\rvert \leqslant \lvert a_1\rvert + \lvert a_2\rvert + \ldots + \lvert a_n\rvert$	*Модуль суми не перевищує суми модулів доданків*
10. $\big\lvert \lvert a\rvert - \lvert b\rvert \big\rvert \leqslant \lvert a \pm b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Числові множини

В табл. 2 розглянуто числові множини, відомі з курсу математики 5–9 класів. Більш детальну характеристику цих множин наведено в інтернет-підтримці підручника.

2 Модуль дійсного числа та його властивості

Нагадаємо означення модуля.

Означення. ***Модулем*** **додатного числа називається саме це число, модулем від'ємного числа — число, йому протилежне; модуль нуля дорівнює нулю.**

Це означення можна коротко записати декількома способами:

$$\lvert a\rvert = \begin{cases} a \text{ при } a>0, \\ 0 \text{ при } a=0, \\ -a \text{ при } a<0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \lvert a\rvert = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0, \\ -a \text{ при } a<0, \end{cases}$$

$$\text{або } \lvert a\rvert = \begin{cases} a \text{ при } a>0, \\ -a \text{ при } a \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\text{або } \lvert a\rvert = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0, \\ -a \text{ при } a \leqslant 0. \end{cases}$$

За потреби ми будемо користуватися будь-яким із цих записів означення модуля. Для того щоб знайти $\lvert a\rvert$, за означенням необхідно знати знак числа a і використати відповідну формулу. Наприклад,

$$\lvert 5\rvert = 5, \quad \lvert -3\rvert = -(-3) = 3,$$
$$\lvert \sqrt{3} - 2\rvert = -(\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3}.$$

Геометричний зміст модуля

На координатній прямій модуль числа — це відстань від початку координат до точки, що зображує число.

Дійсно, якщо $a > 0$ (рис. 1.2.1), то відстань $OA = a = |a|$. Якщо $b < 0$, то відстань $OB = -b = |b|$.

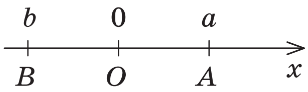


Рис. 1.2.1

Із геометричного змісту модуля випливає така **властивість**.

Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій.

З її доведенням можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Використовуючи означення модуля та його геометричний зміст, можна обґрунтувати властивості модуля, наведені в табл. 2.

Наприклад, ураховуючи, що $|a|$ — це відстань від точки a до точки O (рис. 1.2.2), а відстань може виражатися тільки невід'ємним числом, одержуємо:

$$|a| \geqslant 0,$$

тобто *модуль будь-якого числа є невід'ємним числом.*

Ураховуючи, що точки a і $-a$ розташовані на однаковій відстані від точки O, одержуємо: $|-a| = |a|$, це означає, що *модулі протилежних чисел рівні.*

Інші властивості модуля, зазначені в табл. 2, обґрунтовуються аналогічно. Обґрунтуйте їх самостійно, використовуючи інтернет-підтримку підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Доведіть, що **сума, різниця, добуток, натуральний степінь і частка (якщо дільник не дорівнює нулю) двох раціональних чисел завжди є раціональним числом.**

Приклад 2

Доведіть, що **для будь-якого натурального числа** n **число** $\sqrt{n}$ **або натуральне, або ірраціональне.**

Наприклад, оскільки числа $\sqrt{3}$ і $\sqrt{10}$ не є натуральними числами ($1 < \sqrt{3} < 2$, $3 < \sqrt{10} < 4$), то $\sqrt{3}$ і $\sqrt{10}$ — ірраціональні числа.

Із розв'язаннями прикладів 1, 2 можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника. Спробуйте розв'язати їх самостійно.

Приклад 3*

Доведіть, що сума $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ — число ірраціональне.

Розв'язання	Коментар
▶ Припустимо, що число $\sqrt{3} + \sqrt{5} = r$ — раціональне. Тоді $\sqrt{5} = r - \sqrt{3}$. Піднісши обидві частини останньої рівності до квадрата, маємо: $5 = r^2 - 2r\sqrt{3} + 3$. Звідси $2r\sqrt{3} = r^2 - 2$. Отже, $\sqrt{3} = \dfrac{r^2 - 2}{2r}$. Але права частина цієї рівності — раціональне число (оскільки за припущенням r — раціональне число), а ліва — ірраціональне. Одержана суперечність означає, що наше припущення неправильне і число $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ ірраціональне. ◁	Для доведення твердження задачі можна використати метод від супротивного — припустити, що задане число є раціональним, і отримати суперечність із якимось відомим фактом, наприклад із тим, що $\sqrt{3}$ — ірраціональне число. Аналізуючи одержані вирази, використаємо результат прикладу 1: якщо число r раціональне, то числа $r^2 - 2$ і $2r$ та їх частка теж будуть раціональними. Зазначимо, що знаменник отриманого дробу $2r = 2\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right) \neq 0$.

Приклад 4 Розв’яжіть рівняння* $|2x+5|=7$.

I спосіб

Розв’язання

▶ $2x+5=7$ або $2x+5=-7$;

$2x=2$ або $2x=-12$;

$x=1$ або $x=-6$.

Відповідь: 1; –6. ◁

Коментар

Задане рівняння має вигляд $|t|=7$ (у даному випадку $t=2x+5$). Його зручно розв’язувати, використовуючи геометричний зміст модуля: $|2x+5|$ — це відстань від точки 0 до точки $2x+5$. Але відстань 7 може бути відкладена від 0 як праворуч (одержуємо число 7), так і ліворуч (одержуємо число –7). Отже, рівність $|2x+5|=7$ можлива тоді і тільки тоді, коли $2x+5=7$ або $2x+5=-7$.

II спосіб

Розв’язання

▶ $|2x-(-5)|=7$;

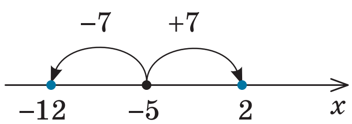


Рис. 1.2.3

$2x=2$ або $2x=-12$;

$x=1$ або $x=-6$.

Відповідь: 1; –6. ◁

Коментар

Виходячи з геометричного змісту модуля, $|a-b|$ — відстань між точками a і b на координатній прямій. Запишемо задане рівняння у вигляді $|2x-(-5)|=7$. Ця рівність означає, що відстань від точки $2x$ до точки –5 дорівнює 7. На відстані 7 від точки –5 розташовані точки 2 і –12 (рис. 1.2.3). Отже, задана рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $2x=2$ або $2x=-12$, тобто задане рівняння рівносильне сукупності цих рівнянь.

Приклад 5 Розв’яжіть нерівність $|x^2-5x|\leqslant 6$.

Розв’язання

▶ $-6\leqslant x^2-5x\leqslant 6$, $\begin{cases} x^2-5x\leqslant 6, \\ x^2-5x\geqslant -6; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-5x-6\leqslant 0, \\ x^2-5x+6\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+1)(x-6)\leqslant 0, \\ (x-2)(x-3)\geqslant 0. \end{cases}$

Розв’язуючи ці нерівності (рис. 1.2.4), отримуємо:

$$\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 6, \\ x\leqslant 2 \text{ або } x\geqslant 3. \end{cases}$$

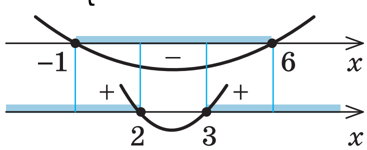


Рис. 1.2.4

Отже, $-1\leqslant x\leqslant 2$ або $3\leqslant x\leqslant 6$.

Відповідь: $[-1;2]\cup[3;6]$. ◁

Коментар

Задана нерівність має вигляд $|t|\leqslant 6$ (у даному випадку $t=x^2-5x$), і її можна розв’язувати, використовуючи геометричний зміст модуля. Виходячи з геометричного змісту модуля, $|t|$ — це відстань від точки 0 до точки t. На відстані 6 від 0 розташовані числа 6 і –6.

Тоді нерівність $|t|\leqslant 6$ задовольняють усі ті й тільки ті точки, які містяться у проміжку $[-6;6]$, тобто $-6\leqslant t\leqslant 6$. Для розв’язування одержаної подвійної нерівності її зручно замінити відповідною системою нерівностей.

---

* Розв’язування рівнянь і нерівностей, що містять знак модуля, розглянуто також в § 8.

Запитання

1. Поясніть, які числа входять до множин цілих, раціональних і дійсних чисел. Наведіть приклади. Зобразіть відповідні точки на координатній прямій.
2. Поясніть, чим відрізняються записи раціонального та ірраціонального чисел у вигляді нескінченного десяткового дробу.
3. Поясніть, як порівнюють дійсні числа.
4. Дайте означення модуля дійсного числа.
   1) Сформулюйте властивості модуля.
   2*) Обґрунтуйте властивості модуля дійсного числа. Використайте відповідний матеріал, наведений в інтернет-підтримці підручника.

Вправи

1.2.1. Поясніть, чому задане дійсне число не може бути раціональним:

1) $1+\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{10}$; 5) $2-\sqrt{5}$.
2) $\sqrt{3}-5$; 4) $\sqrt{7}+3$;

1.2.2*. Доведіть, що сума, різниця, добуток і частка раціонального та ірраціонального чисел завжди є числом ірраціональним (добуток і частка тільки у випадку, коли задане раціональне число не дорівнює нулю).

1.2.3*. Доведіть, що задане дійсне число є ірраціональним:

1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$.

1.2.4. Користуючись геометричним змістом модуля, зобразіть на координатній прямій множину чисел, які задовольняють нерівність:

1°) $|x|\leqslant 2$; 3) $|x-3|\leqslant 0,5$;
2°) $|x|>5$; 4) $|x+1|<0,3$.

1.2.5. Розв'яжіть рівняння:

1) $|3x+1|=4$; 3*) $||x-1|-2|=1$;
2) $|4x-2|=6$; 4*) $||2x+3|-5|=3$.

1.2.6. Розв'яжіть нерівність:

1) $|2x-7|\leqslant 1$; 3*) $||2x-1|+3|\geqslant 5$;
2) $|3x+5|>7$; 4*) $||4x+7|-11|<4$.

Виявіть свою компетентність

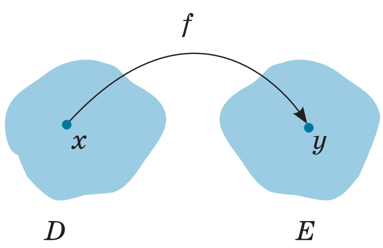
1.2.7. Які значення слова «модуль» вам відомі? Як, на вашу думку, вони пов'язані з математичним поняттям «модуль»? Знайдіть у мережі Інтернет інформацію з цієї теми, обговоріть її з друзями й подругами.

§ 2 ФУНКЦІЇ

2.1. Поняття числової функції. Найпростіші властивості числових функцій

Таблиця 3

1. Поняття числової функції



Числовою функцією з областю визначення D **називається залежність, при якій кожному числу *x* із множини *D* (області визначення) ставиться у відповідність єдине число *y*.**

Записують цю відповідність так: $y = f(x)$.

Позначення і терміни:

$D(f)$ — область визначення;

$E(f)$ — область значень;

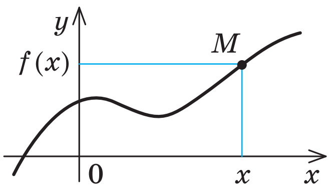
x — аргумент (незалежна змінна);

y — функція (залежна змінна);

f — функція;

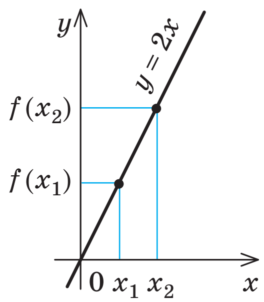
$f(x_0)$ — значення функції f у точці x_0

2. Графік функції



Графіком функції f **називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$,** де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції, а друга координата — це відповідне значення функції f у точці x

3. Зростаючі й спадні функції

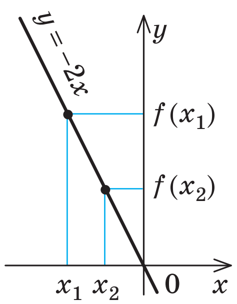


Функція $f(x)$ **зростаюча на множині *P*:**

якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ для всіх $x \in P$,

тобто більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції

(при збільшенні аргумента відповідні точки графіка «піднімаються»)



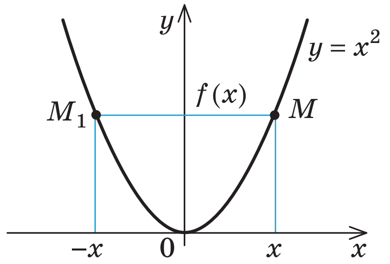
Функція $f(x)$ **спадна на множині *P*:**

якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$ для всіх $x \in P$,

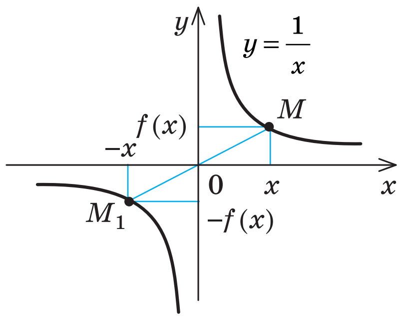
тобто більшому значенню аргумента відповідає менше значення функції

(при збільшенні аргумента відповідні точки графіка «опускаються»)

4. Парні й непарні функції



Функція $f(x)$ **парна:** $f(-x)=f(x)$ для всіх x з області визначення.
Графік парної функції симетричний відносно осі Oy



Функція $f(x)$ **непарна:** $f(-x)=-f(x)$ для всіх x з області визначення.
Графік непарної функції симетричний відносно початку координат — точки O

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття функції

Із поняттям функції ви ознайомилися в курсі алгебри. Нагадаємо, що *залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y.*

Функція — від латин. *function* — виконання, здійснення.

У курсі алгебри і початків аналізу ми будемо користуватися таким означенням числової функції.

Означення. ***Числовою функцією з областю визначення D* називається залежність, при якій кожному числу x із множини D ставиться у відповідність єдине число y.**

Функції позначають латинськими (іноді грецькими) буквами. Розглянемо довільну функцію f. Число y, яке відповідає числу x (на рисунку до п. 1 табл. 3 це показано стрілкою), називають *значенням функції f у точці x* і позначають $f(x)$.

Область визначення функції f — це множина всіх тих значень, яких може набувати аргумент x. Її позначають $D(f)$.

Область значень функції f — це множина, яка складається з усіх чисел $f(x)$, де x належить області визначення. Її позначають $E(f)$.

Найчастіше функцію задають **за допомогою формули.** Якщо немає додаткових обмежень, то *областю визначення функції, заданої формулою, вважають множину всіх значень змінної, при яких ця формула має зміст.*

Наприклад, якщо функція задана формулою $y=\sqrt{x}+1$, то її область визначення $x\geqslant 0$, тобто $D(y)=[0;+\infty)$, а область значень $y\geqslant 1$, тобто $E(y)=[1;+\infty)$.

Іноді функція може задаватися різними формулами на різних множинах значень аргумента. Наприклад,

$$y=|x|=\begin{cases}x \text{ при } x\geqslant 0,\\ -x \text{ при } x<0.\end{cases}$$

Функцію можна задати не тільки за допомогою формули, а й **за допомогою таблиці, графіка** чи **словесного опису.**

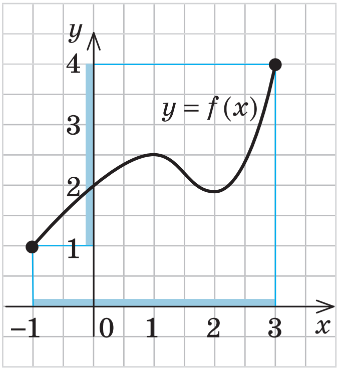


Рис. 2.1.1

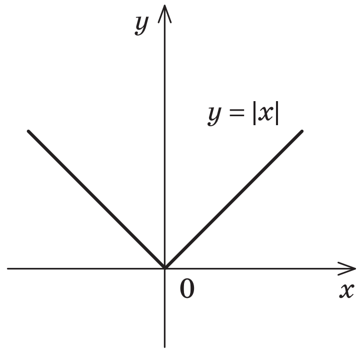


Рис. 2.1.2

Наприклад, на рис. 2.1.1 графічно задано функцію $y=f(x)$ з областю визначення $D(f)=[-1;3]$ і множиною значень $E(f)=[1;4]$.

Означення. ***Найбільшим (найменшим) значенням функції $f(x)$ на множині M, на якій ця функція задана,*** **називається значення функції $f(x)$ у деякій точці x_0 множини M, якщо ні в якій іншій точці множини функція не має більшого (меншого) значення.**

Тобто для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x) \leqslant f(x_0)$ (відповідно $f(x) \geqslant f(x_0)$ для найменшого значення).

Іноді це записують так: $\max\limits_{M} f(x)=f(x_0)$ (відповідно $\min\limits_{M} f(x)=f(x_0)$).

Наприклад, для функції $y=f(x)$, графічно заданої на проміжку $[-1;3]$ на рис. 2.1.1, найменше значення дорівнює 1, а найбільше — 4.

Тобто $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=4$; $\min\limits_{[-1;3]} f(x)=1$.

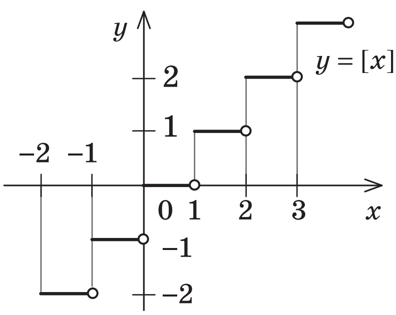


Рис. 2.1.3

2 Графік функції

Нагадаємо означення графіка функції.

Означення. ***Графіком функції $y=f(x)$*** **називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції, а друга координата — це відповідне значення функції f у точці x.**

На рисунках до п. 4 табл. 3 наведено графіки функцій $y=x^2$ та $y=\frac{1}{x}$, а на рис. 2.1.2 — графік функції $y=|x|$.

Наведемо також графік функції $y=[x]$, де $[x]$ — позначення *цілої частини* числа x, тобто найбільшого цілого числа, яке не перевищує x (рис. 2.1.3). Область визначення цієї функції $D(y)=\boldsymbol{R}$ — множина всіх дійсних чисел, а область значень $E(y)=\boldsymbol{Z}$ — множина всіх цілих чисел.

На рис. 2.1.4 наведено графік функції $y=\{x\}$, де $\{x\}$ — позначення *дробової частини* числа x (за означенням $\{x\}=x-[x]$).

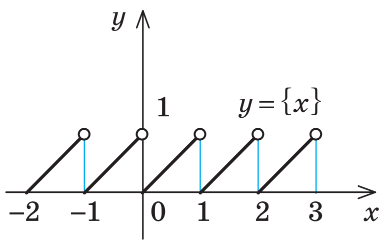
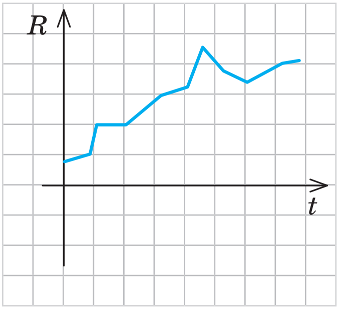
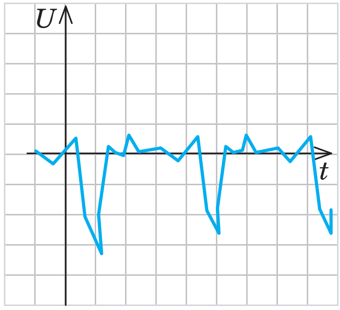


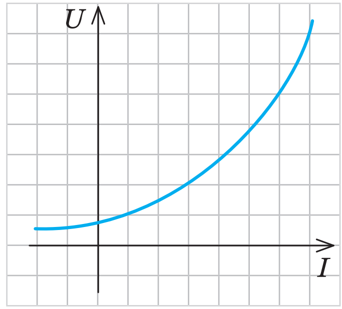
Рис. 2.1.4



А



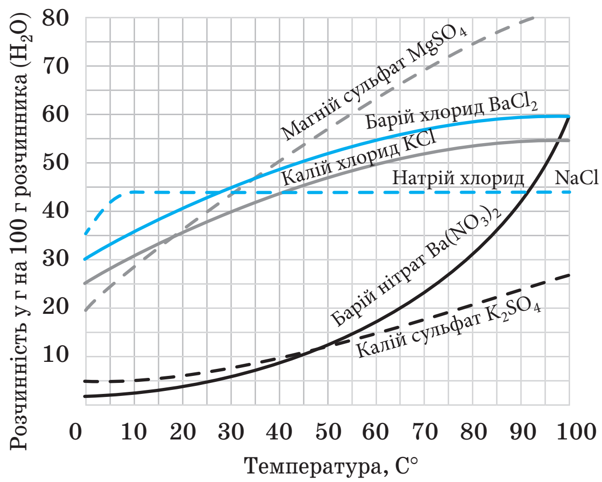
Б



В

Звертаючись до фізики, хімії, економіки, медицини, можемо знайти зразки графіків функцій. Наприклад:

- графік А, що відображує динаміку курсу долара — залежність вартості *R* долара у гривнях від часу *t*;
- фрагмент кардіограми Б — залежність різниці потенціалів *U* на поверхні шкіри пацієнта від часу *t*;
- вольт-амперна характеристика В діода — залежність напруги від сили струму;
- залежність Г розчинності твердих речовин від температури.

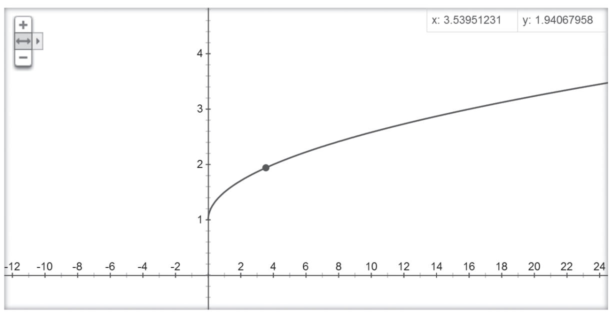


Г

Сьогодні для побудови графіків усе частіше використовують спеціальне програмне забезпечення. Графіки можна будувати за допомогою програм GeoGebra, Graph, Advanced Grapher, Gran тощо.

Чи не найпростішим для користувачів є сервіс Google. За його допомогою можна, зокрема, будувати графіки функцій, заданих аналітично. Для цього в рядок пошуку треба ввести формулу, якою задано функцію, наприклад $1+\mathrm{sqr}(x)/2$, і натиснути клавішу «Enter». (Нагадаємо, що запис формул відбувається певним чином, про це вам відомо з уроків інформатики.) У результаті отримаємо графік функції $y=1+\frac{\sqrt{x}}{2}$ (див. рисунок).

Графік функції 1+sqrt(x)/2



3 Зростаючі та спадні функції

Важливими характеристиками функцій є їх зростання та спадання.

Означення. **Функція $f(x)$ називається *зростаючою на множині P*, якщо більшому значенню аргумента із цієї множини відповідає більше значення функції.**

Тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 із множини P: **якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.**

Наприклад, функція $f(x)=2x$ зростаюча (на всій області визначення, тобто на множині R), оскільки якщо $x_2 > x_1$, то $2x_2 > 2x_1$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$.

Відповідні точки графіка зростаючої функції при збільшенні аргумента «піднімаються» (рис. 2.1.5).

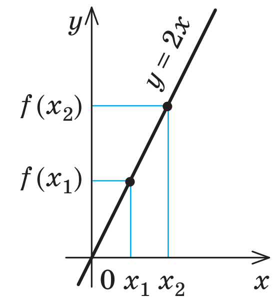


Рис. 2.1.5

На рис. 2.1.6 наведено графік зростаючої функції $y = x^3$. Дійсно, при $x_2 > x_1$ маємо $x_2^3 > x_1^3$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$.

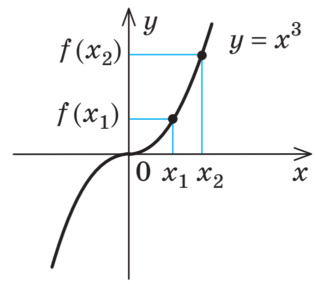


Рис. 2.1.6

Означення. **Функція $f(x)$ називається *спадною на множині P*, якщо більшому значенню аргумента з цієї множини відповідає менше значення функції.**

Тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 із множини P: **якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$.**

Наприклад, функція $f(x) = -2x$ спадна (на всій області визначення, тобто на множині $\boldsymbol{R}$), оскільки якщо $x_2 > x_1$, то $-2x_2 < -2x_1$, тобто $f(x_2) < f(x_1)$. Відповідні точки графіка спадної функції при збільшенні аргумента «опускаються» (рис. 2.1.7).

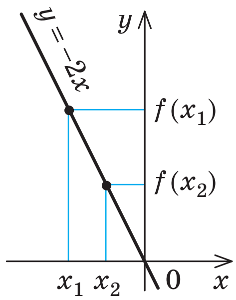


Рис. 2.1.7

Розглядаючи графік функції $y = x^2$ (рис. 2.1.8), бачимо, що на всій області визначення ця функція не є ні зростаючою, ні спадною. Але можна виділити проміжки області визначення, де ця функція зростає і де спадає. Так, на проміжку $[0; +\infty)$ функція $y = x^2$ зростає, а на проміжку $(-\infty; 0]$ спадає.

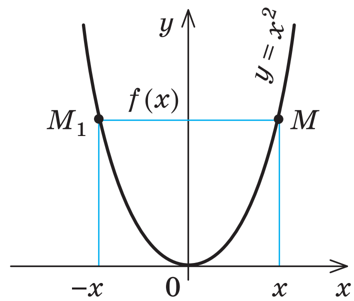


Рис. 2.1.8

Зазначимо, що для зростаючих і спадних функцій виконуються **властивості**, обернені до тверджень, що містяться в означеннях.

Якщо функція зростає, то більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента.

Якщо функція спадає, то більшому значенню функції відповідає менше значення аргумента.

● Обґрунтуємо першу із цих властивостей методом від супротивного. Нехай функція $f(x)$ зростає і $f(x_2) > f(x_1)$. Припустимо, що аргумент x_2 не більший за аргумент x_1, тобто $x_2 \leqslant x_1$. Із цього припущення одержуємо: якщо $x_2 \leqslant x_1$ і $f(x)$ зростає, то $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, що суперечить умові $f(x_2) > f(x_1)$. Отже, наше припущення неправильне і, якщо $f(x_2) > f(x_1)$, то $x_2 > x_1$, що і потрібно було довести.

Аналогічно можна обґрунтувати і другу властивість. ○

Наприклад, якщо $x^3 > 8$, тобто $x^3 > 2^3$, то, ураховуючи зростання функції $f(x) = x^3$, одержуємо $x > 2$.

4 Парні й непарні функції

Розглянемо функції, області визначення яких симетричні відносно початку координат, тобто разом із кожним числом x містять і число $-x$. Для таких функцій визначено поняття парності й непарності.

Означення. **Функція f називається *парною*, якщо для будь-якого x з її області визначення $f(-x) = f(x)$.**

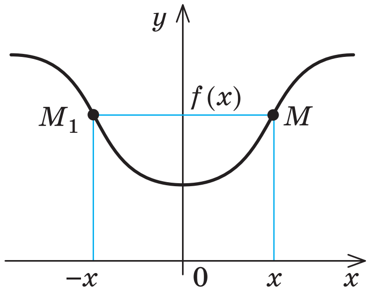


Рис. 2.1.9

Наприклад, функція $y=x^2$ (тобто функція $f(x)=x^2$) парна, оскільки $\boldsymbol{f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)}$.

Якщо функція $f(x)$ парна, то до її графіка разом із кожною точкою M із координатами $(x; y)=(x; f(x))$ входить також і точка M_1 із координатами $(-x;\ y)=(-x;\ f(-x))=(-x;\ f(x))$. Точки M і M_1 розміщені симетрично відносно осі Oy (рис. 2.1.9), тому й **графік парної функції розміщений симетрично відносно осі *Oy***.

Наприклад, графік парної функції $y=x^2$ (див. рис. 2.1.8) симетричний відносно осі Oy.

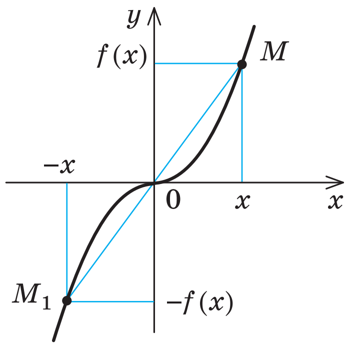


Рис. 2.1.10

Означення. **Функція f називається *непарною*, якщо для будь-якого x з її області визначення $f(-x)=-f(x)$.**

Наприклад, функція $y=\frac{1}{x}$ (тобто функція $f(x)=\frac{1}{x}$) непарна, оскільки $\boldsymbol{f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)}$.

Якщо функція $f(x)$ непарна, то до її графіка разом із кожною точкою M із координатами $(x; y)=(x; f(x))$ входить також і точка M_1 із координатами $(-x;\ y)=(-x;\ -f(x))$. Точки M і M_1 розміщені симетрично відносно початку координат (рис. 2.1.10), тому й **графік непарної функції розміщений симетрично відносно початку координат**.

Наприклад, графік непарної функції $y=\frac{1}{x}$ (див. п. 4 табл. 3) симетричний відносно початку координат, тобто відносно точки O.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Знайдіть область визначення функції:

1) $y=x^2+x$; 2) $y=\frac{x}{x^2+x}$; 3) $y=\sqrt{x+5}$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ Обмежень для знаходження значень виразу x^2+x немає, отже, $D(y)=\boldsymbol{R}$. ◁ 2) ▶ Область визначення функції $y=\frac{x}{x^2+x}$ задана обмеженням $x^2+x\neq 0$, оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю. З'ясуємо, коли $x^2+x=0$. Маємо: $x(x+1)=0$, якщо $x=0$ або $x=-1$. Тоді область визначення можна задати обмеженнями $x\neq 0$, $x\neq -1$ або записати так: $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty)$. ◁	Оскільки всі функції задано формулами, то їхні області визначення — це множини всіх значень змінної x, при яких має зміст відповідна формула, тобто вираз, який стоїть у правій частині формули $y=f(x)$. У курсі алгебри зустрічалися тільки два *обмеження*, які необхідно враховувати *під час знаходження області визначення*: 1) *якщо вираз записано у вигляді дробу* $\frac{A}{B}$, *то знаменник* $B\neq 0$; 2) *якщо запис виразу містить квадратний корінь* $\sqrt{A}$, *то підкореневий* вираз $A\geqslant 0$.

3) ▶ Область визначення функції $y=\sqrt{x+5}$ задана обмеженням $x+5\geqslant 0$, тобто $x\geqslant -5$, оскільки під знаком квадратного кореня повинен стояти невід'ємний вираз. Отже, $D(y)=[-5;+\infty)$. ◁

У всіх інших випадках, які вам доводилося розглядати, областю визначення виразу були всі дійсні числа*.

Приклад 2* Знайдіть область значень функції $y=x^2-3$.

Розв'язання	Коментар
▶ Складаємо рівняння $x^2-3=a$. Воно рівносильне рівнянню $x^2=a+3$, яке має розв'язки, якщо $a+3\geqslant 0$, тобто при $a\geqslant -3$. Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, область значень заданої функції $E(f)=[-3;+\infty)$ (тобто $y\geqslant -3$). ◁	Позначимо значення заданої функції $f(x)$ (тобто x^2-3) через a і з'ясуємо, для яких a можна знайти відповідне значення x (тобто таке значення x, при якому значення $f(x)=a$). Тоді всі числа a, для яких існує хоча б один корінь рівняння $f(x)=a$, увійдуть до області значень функції $f(x)$. Множина всіх таких a і складе область значень функції $f(x)$.

Корисно пам'ятати, що ***область значень функції $y=f(x)$ збігається з множиною тих значень a, при яких рівняння $f(x)=a$ має розв'язки.***

Приклад 3* Доведіть, що **при $k\neq 0$ областю значень лінійної функції $y=kx+b$ є множина всіх дійсних чисел.**

Розв'язання	Коментар
▶ Якщо $kx+b=a$ (де $k\neq 0$), то розв'язок цього рівняння $x=\frac{a-b}{k}$ існує для будь-якого $a\in \boldsymbol{R}$ ($k\neq 0$ за умовою). Таким чином, значенням заданої функції може бути будь–яке дійсне число, отже, її область значень $E(f)=\boldsymbol{R}$. ◁	Позначимо значення заданої функції $f(x)$ (тобто $kx+b$) через a і з'ясуємо, для яких a можна знайти відповідне значення x таке, що $f(x)=a$. Множина всіх таких значень a і буде складати область значень функції $f(x)$.

Приклад 4* Доведіть, що **лінійна функція $y=kx+b$ при $k>0$ є зростаючою, а при $k<0$ — спадною.**

Коментар

Задана функція $f(x)=kx+b$ буде зростаючою, якщо з нерівності $x_2>x_1$ випливатиме нерівність $f(x_2)>f(x_1)$, а для доведення останньої нерівності достатньо знайти знак різниці $f(x_2)-f(x_1)$. Аналогічно обґрунтовують і спадання функції.

* Надалі в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу ми розглядатимемо нові вирази з обмеженнями: $\operatorname{tg}a$, $\operatorname{ctg}a$, $\arcsin a$, $\arccos a$, $\sqrt[n]{a}$, a^{α} (де α — неціле число).

Розв'язання

▶ Нехай $x_2 > x_1$, тоді $x_2 - x_1 > 0$. Розглянемо різницю $f(x_2)-f(x_1)=kx_2+b-(kx_1+b)=$ $=k(x_2-x_1)$. Оскільки $x_2-x_1>0$, то при $k>0$ маємо $f(x_2)-f(x_1)>0$, отже, $f(x_2)>f(x_1)$ — функція зростає. При $k<0$ маємо $f(x_2)-f(x_1)<0$, отже, $f(x_2)<f(x_1)$ — функція спадає. ◁

Обґрунтовуючи зростання або спадання функції, корисно пам'ятати, що *для доведення нерівності* $f(x_2)>f(x_1)$ *чи* $f(x_2)<f(x_1)$ *достатньо знайти знак різниці* $f(x_2)-f(x_1)$.

Приклад 5*

Доведіть, що:

1) **сума двох зростаючих на множині P функцій завжди є зростаючою функцією на цій множині;**
2) **сума двох спадних на множині P функцій завжди є спадною функцією на цій множині.**

Розв'язання	Коментар
1) ▶ Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючими на одній і тій самій множині P. Якщо $x_2>x_1$, то $f(x_2)>f(x_1)$ і $g(x_2)>g(x_1)$. Додаючи почленно останні нерівності, одержуємо $$f(x_2)+g(x_2)>f(x_1)+g(x_1).$$ Це й означає, що сума функцій $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючою функцією на множині P. ◁	Для доведення зростання суми двох зростаючих функцій $f(x)$ і $g(x)$ достатньо довести, що на множині P з нерівності $x_2>x_1$ випливає нерівність $$f(x_2)+g(x_2)>f(x_1)+g(x_1).$$
2) ▶ Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ є спадними на множині P. Тоді з нерівності $x_2>x_1$ маємо: $f(x_2)<f(x_1)$ і $g(x_2)<g(x_1)$. Після почленного додавання останніх нерівностей одержуємо: $f(x_2)+g(x_2)<f(x_1)+g(x_1)$, а це й означає, що сума функцій $f(x)$ і $g(x)$ є спадною функцією на множині P. ◁	Аналогічно для доведення того, що сума двох спадних функцій є спадною функцією, достатньо довести: якщо $x_2>x_1$, то $$f(x_2)+g(x_2)<f(x_1)+g(x_1).$$

Приклад 6

Доведіть, що **зростаюча або спадна функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.**

Коментар

Доведемо це твердження методом від супротивного. Для цього достатньо припустити, що виконується протилежне твердження (функція може набувати одного й того самого значення принаймні у двох точках), і одержати суперечність. Це означатиме, що наше припущення неправильне, а правильним є задане твердження.

Розв'язання

▶ Нехай функція $f(x)$ є зростаючою і
$$f(x_1)=f(x_2). \quad (1)$$

Припустимо, що $x_1 \ne x_2$.

Якщо $x_1 \ne x_2$, то або $x_1 > x_2$, або $x_1 < x_2$.

Ураховуючи зростання функції $f(x)$, у випадку $x_1 > x_2$ маємо $f(x_1) > f(x_2)$, що суперечить рівності (1).

У випадку $x_1 < x_2$ маємо $f(x_1) < f(x_2)$, що також суперечить рівності (1). Отже, наше припущення неправильне і рівність $f(x_1) = f(x_2)$ можлива тільки при $x_1 = x_2$. Тобто зростаюча функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.

Аналогічно доводиться твердження і для спадної функції. ◁

Приклад 7

Дослідіть, чи є задана функція парною, непарною або ні парною, ні непарною:

1) $y = \frac{1}{x+1}$; 2) $y = x^4$; 3) $y = x^3 + x$.

Розв'язання

1) ▶ Область визначення функції $y = \frac{1}{x+1}$: $x \neq -1$, тобто вона не симетрична відносно точки O (точка $x = 1$ входить до області визначення, а $x = -1$ не входить — див. рис. 2.1.11).

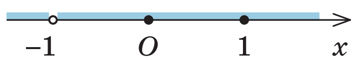


Рис. 2.1.11

Отже, задана функція не може бути ні парною, ні непарною. ◁

2) ▶ Область визначення функції $y = x^4$: $D(y) = \boldsymbol{R}$, тобто вона симетрична відносно точки O.

$f(-x) = (-x)^4 = f(x)$, отже, функція парна. ◁

3) ▶ Область визначення функції $y = x^3 + x$: $D(y) = \boldsymbol{R}$, отже, вона симетрична відносно точки O.

$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$, отже, функція непарна. ◁

Коментар

Для дослідження функції $y = f(x)$ на парність чи непарність достатньо, по–перше, упевнитися, що область визначення цієї функції симетрична відносно точки O (разом із кожною точкою x містить і точку $-x$), і, по–друге, порівняти значення $f(-x)$ і $f(x)$.

Запитання

1. Сформулюйте означення числової функції. Наведіть приклади таких функцій.
2. На прикладах поясніть, що таке область визначення функції, область значень функції, найбільше і найменше значення функції на множині M. Які обмеження необхідно врахувати, щоб знайти область визначення функції $y = \frac{\sqrt{x}}{x}$? Знайдіть її область визначення.
3. Що називається графіком функції $y = f(x)$? Наведіть приклади.
4. Яка функція називається зростаючою? Наведіть приклади.
5. Яка функція називається спадною? Наведіть приклади.
6. Яка функція називається парною? Наведіть приклади. Як розміщено графік парної функції на координатній площині? Наведіть приклади.
7. Яка функція називається непарною? Наведіть приклади. Як розміщено графік непарної функції на координатній площині? Наведіть приклади.

Вправи

2.1.1°. Знайдіть значення функції в указаних точках:

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ у точках 2; −1; 3; a $(a\neq 0)$;

2) $g(x)=x^2-3$ у точках 0; 1; −2; b;

3) $\varphi(x)=\sqrt{x+1}$ у точках 0; 3; −1; m $(m>0)$.

2.1.2. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

1°) $y=2x+3$;

2°) $y=\sqrt{x+3}$;

3°) $y=\dfrac{1}{x+1}$;

4) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$;

5) $y=\sqrt{x^2-1}$;

6) $y=\sqrt{x^2+1}$;

7) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$;

8) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$;

9*) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$;

10*) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x+1}$;

11*) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{|x|-2}$;

12*) $y=\sqrt{x^2+x+1}$.

2.1.3°. Для функцій, які задано графіками (рис. 2.1.12), укажіть область визначення, область значень, найбільше і найменше значення на всій області визначення, проміжки зростання і спадання та значення кожної функції при $x=1$.

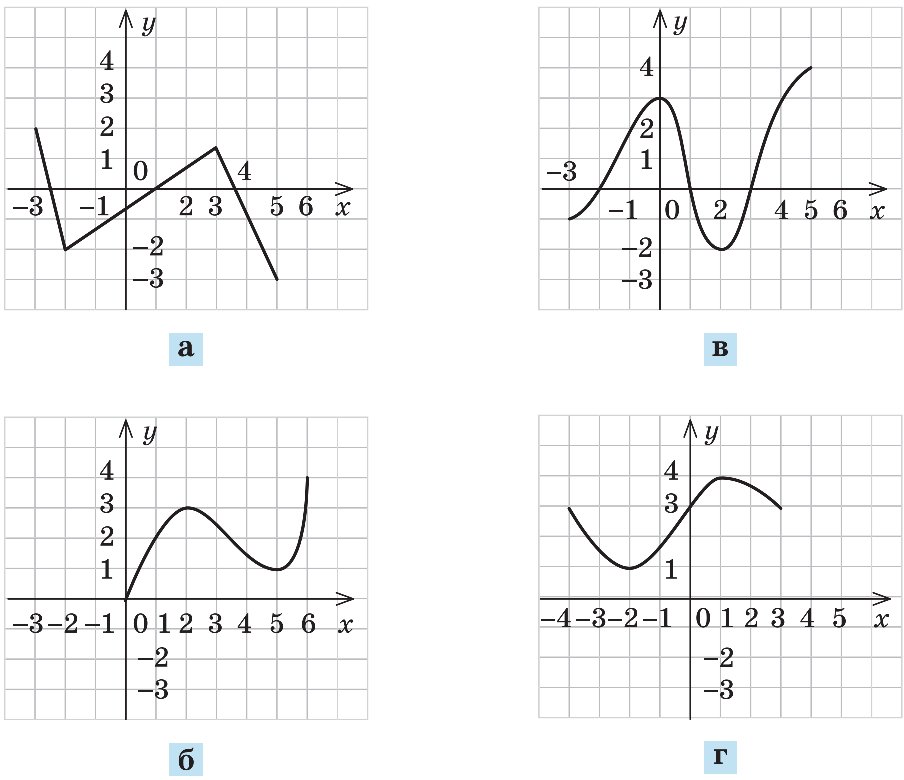


Рис. 2.1.12

2.1.4. Знайдіть область значень функції, заданої формулою:

1) $f(x)=5$; 3) $f(x)=x^2$; 5*) $y=-3x+1$;

2) $f(x)=x$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$; 6*) $y=x^2-5$;

2.1.5. Обґрунтуйте, що задана функція є зростаючою (на її області визначення):

1) $y=3x$; 2) $y=x+5$; 3*) $y=x^3$; 4*) $y=x^5$.

2.1.6*. Доведіть, що на заданому проміжку функція зростає:

1) $y=-\frac{2}{x}$, де $x>0$; 2) $y=-\frac{1}{x}$, де $x<0$.

2.1.7. Обґрунтуйте, що задана функція є спадною (на її області визначення):

1) $y=-3x$; 2) $y=-x-1$; 3*) $y=-x^3$; 4*) $y=-x^5$.

2.1.8*. Доведіть, що на заданому проміжку функція спадає:

1) $y=\frac{3}{x}$, де $x<0$; 2) $y=\frac{5}{x}$, де $x>0$.

2.1.9*. Доведіть, що функція $y=x^2$ на проміжку $[0;+\infty)$ зростає, а на проміжку $(-\infty;0]$ спадає.

2.1.10*. Користуючись твердженнями, доведеними у прикладі 5 до п. 2.1, визначте, чи є задана функція зростаючою або спадною.

1) $y=x^3+x$; 2) $y=-x-x^5$; 3) $y=x+\sqrt{x}$; 4) $y=-x^3-x^5$.

2.1.11*. Користуючись твердженнями, доведеними у прикладі 6 до п. 2.1:

1) обґрунтуйте, що рівняння $x^3+x=10$ має єдиний корінь $x=2$;

2) підберіть корінь рівняння $\sqrt{x}+x=6$ і доведіть, що інших коренів це рівняння не має.

2.1.12. Обґрунтуйте, що задана функція є парною:

1) $y=x^6$; 3) $y=\sqrt{x^2+1}$;

2) $y=\frac{1}{x^2}+1$; 4) $y=\sqrt{|x|+x^4}$.

2.1.13. Обґрунтуйте, що задана функція є непарною:

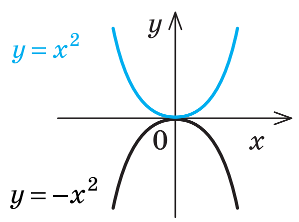
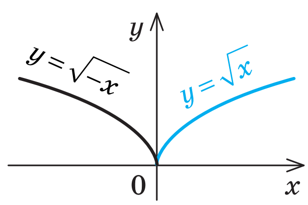
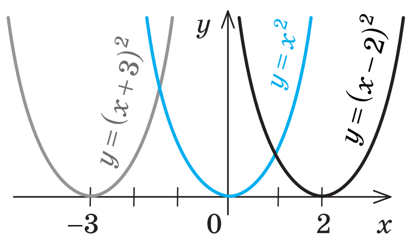
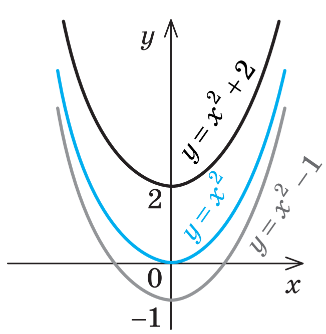
1) $y=x^5$; 2) $y=-\frac{1}{x^3}$; 3) $y=x|x|$; 4) $y=x^3-x$.

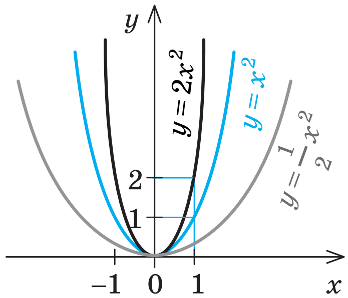
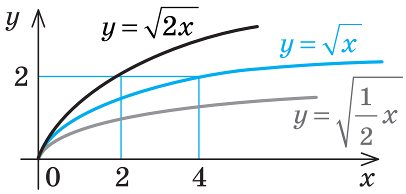
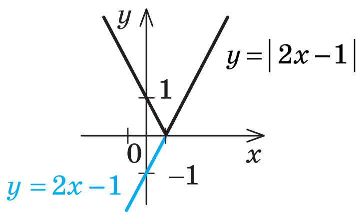
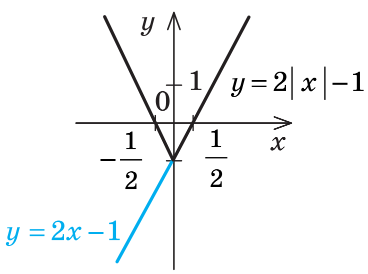
Виявіть свою компетентність

2.1.14. Медичними працівниками встановлено, що дитина віком a років ($a<18$) для нормального розвитку повинна спати протягом t год на добу, де t визначається за формулою $t=16-\frac{a}{2}$. Знайдіть $t(16)$, $t(15)$, $t(14)$.

2.2. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій

Таблиця 4

Перетворення графіка функції $y=f(x)$			
№	**Формула залежності**	**Приклад**	**Перетворення**
1	$t=-f(x)$		Симетрія відносно осі Ox
2	$y=f(-x)$		Симетрія відносно осі Oy
3	$y=f(x-a)$		Паралельне перенесення графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць
4	$y=f(x)+c$		Паралельне перенесення графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Oy на c одиниць

№	Формула залежності	Приклад	Перетворення
5	$y=kf(x)$ $(k>0)$		Розтяг або стиск графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Oy (при $k>1$ розтяг, при $0<k<1$ стиск)
6	$y=f(\alpha x)$ $(\alpha>0)$		Розтяг або стиск графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Ox (при $\alpha>1$ стиск, при $0<\alpha<1$ розтяг)
7	$y=\lvert f(x)\rvert$		Вище від осі Ox (і на самій осі) графік функції $y=f(x)$ — без зміни, нижче від осі Ox — симетрія відносно осі Ox
8	$y=f(\lvert x\rvert)$		Праворуч від осі Oy (і на самій осі) графік функції $y=f(x)$ — без зміни і та сама частина графіка — симетрія відносно осі Oy

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Розглянемо способи побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій.

Побудова графіка функції $y=-f(x)$

Порівняємо графіки функцій $y=x^2$ та $y=-x^2$ (див. перший рядок табл. 4). Очевидно, що графік функції $y=-x^2$ можна одержати з графіка функції $y=x^2$ симетричним відображенням його відносно осі Ox. Покажемо, що графік функції $y=-f(x)$ завжди можна одержати з графіка функції $y=f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Ox.

Дійсно, за означенням графік функції $y=f(x)$ складається з усіх точок M коор-

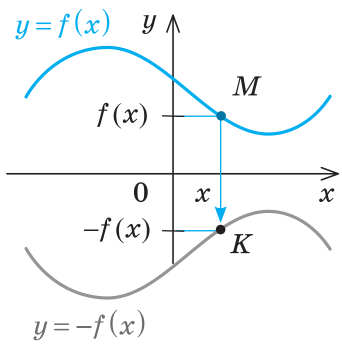


Рис. 2.2.1

динатної площини, які мають координати $(x;y)=(x;f(x))$. Тоді графік функції $y=-f(x)$ складається з усіх точок K координатної площини, які мають координати $(x;y)=(x;-f(x))$.

Точки $M(x;f(x))$ і $K(x;-f(x))$ розміщені на координатній площині симетрично відносно осі Ox (рис. 2.2.1). Отже, кожна точка K графіка функції $y=-f(x)$ одержується симетричним відображенням відносно осі Ox деякої точки M графіка функції $y=f(x)$. Тому ***графік функції $y=-f(x)$ можна одержати з графіка функції $y=f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Ox.***

Ця властивість дозволяє легко обґрунтувати побудову графіка функції $y=|f(x)|$. Маємо:

$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) \text{ при } f(x)\geqslant 0 \\ (\text{графік не змінюється}); \\ -f(x) \text{ при } f(x)<0 \\ (\text{симетрія відносно осі } Ox). \end{cases}$$

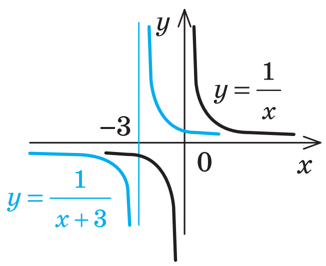
Отже, ***графік функції $y=|f(x)|$ може бути побудований так: частина графіка функції $y=f(x)$, яка лежить вище від осі Ox (і на самій осі), залишається без зміни, а та частина, яка лежить нижче від осі Ox, відображується симетрично відносно цієї осі.***

Наприклад, в табл. 4 (сьомий рядок) зображено графік функції $y=|2x-1|$, побудований із використанням цього правила.

Аналогічно обґрунтовуються інші геометричні перетворення графіка функції $y=f(x)$, наведені в табл. 4 (див. інтернет-підтримку підручника).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Побудуйте графік функції $y=\dfrac{1}{x+3}$.

Розв'язання	Коментар
▶  ◁	Ми можемо побудувати графік функції $y=f(x)=\dfrac{1}{x}$. Тоді графік функції $y=\dfrac{1}{x+3}=f(x+3)=f(x-(-3))$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Ox на -3 одиниці (тобто вліво).

Приклад 2* Побудуйте графік функції $y=\sqrt{4-|x|}$.

Коментар

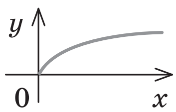
Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції. (Для того щоб можна було скористатися перетвореннями графіків, наведеними в табл. 4, підкореневий вираз функції запишемо так: $y=\sqrt{-(|x|-4)}$.)

1. Ми можемо побудувати графік функції $y=f(x)=\sqrt{x}$.
2. Потім можна побудувати графік функції $y=g(x)=\sqrt{-x}=f(-x)$ (симетрія графіка функції $f(x)$ відносно осі Oy).
3. Після цього можна побудувати графік функції $y=\varphi(x)=\sqrt{-(x-4)}=g(x-4)$ (паралельне перенесення графіка функції $g(x)$ уздовж осі Ox на 4 одиниці).
4. Потім уже можна побудувати графік заданої функції $y=\sqrt{-(|x|-4)}=\varphi(|x|)=\sqrt{4-|x|}$ (праворуч від осі Oy відповідна частина графіка функції $y=\varphi(x)$ залишається без зміни, і та сама частина відображується симетрично відносно осі Oy).

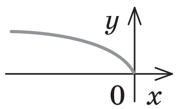
Розв'язання

▶ Запишемо рівняння заданої функції так: $y=\sqrt{4-|x|}=\sqrt{-(|x|-4)}$.
Послідовно будуємо графіки:

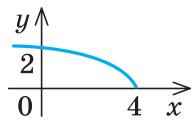
1. $y=\sqrt{x}$



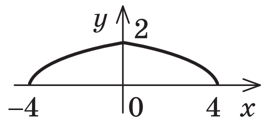
2. $y=\sqrt{-x}$



3. $y=\sqrt{-(x-4)}$



4. $y=\sqrt{-(|x|-4)}$



◁

Запитання

1. На прикладах поясніть, як можна з графіка функції $y=f(x)$ одержати графік функції:

1) $y=-f(x)$;
2) $y=f(-x)$;
3) $y=f(x-a)$;
4) $y=f(x)+c$;
5) $y=kf(x)$, де $k>0$;
6) $y=f(\alpha x)$, де $\alpha>0$;
7) $y=|f(x)|$;
8) $y=f(|x|)$.

2*. Обґрунтуйте геометричні перетворення, за допомогою яких із графіка функції $y=f(x)$ можна одержати графіки вказаних вище функцій.

Вправи

У завданнях 2.2.1–2.2.7 побудуйте графіки функцій та рівнянь.

2.2.1. 1) $y=|x-5|$; 2) $y=|x|-5$; 3) $y=||x|-5|$; 4*) $|y|=x-5$.

2.2.2. 1°) $y=x^2-9$; 2) $y=|x^2-9|$; 3) $y=|x^2|-9$; 4*) $|y|=x^2-9$.

2.2.3. 1°) $y=(x+1)^2$; 2) $y=(|x|+1)^2$; 3) $y=(x+1)^2-3$; 4) $y=|(x+1)^2-3|$.

2.2.4. 1°) $y=\frac{1}{x+2}$; 2) $y=\left|\frac{1}{x+2}\right|$; 3) $y=\frac{1}{|x|+2}$; 4*) $|y|=\frac{1}{x+2}$..

2.2.5. 1°) $y=-\frac{2}{x}$; 2°) $y=3-\frac{2}{x}$; 3) $y=-\frac{2}{x-1}$; 4) $y=-\frac{2}{|x|}$.

2.2.6. 1°) $y=\sqrt{x-3}$; 3) $y=\sqrt{|x|-3}$; 5*) $y=\left|\sqrt{|x|}-3\right|$;

2°) $y=\sqrt{x}-3$ 4) $y=\left|\sqrt{x}-3\right|$; 6*) $|y|=\sqrt{x-3}$.

2.2.7. 1°) $y=-\sqrt{x}$; 2°) $y=-\sqrt{x}+4$; 3) $y=-\sqrt{|x|}$; 4) $y=-\sqrt{x-1}$.

2.2.8. Функція $y=f(x)$ задана на проміжку $[0;14]$, її графік зображений на рис. 2.2.2. Побудуйте графік функції або рівняння:

1) $y=-f(x)$; 6*) $y=f(2x)$;

2) $y=f(-x)$; 7*) $y=\frac{1}{2}f(x)$;

3) $y=|f(x)|$; 8*) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$;

4) $y=f(|x|)$; 9*) $|y|=f(x)$;

5*) $y=2f(x)$; 10*) $|y|=f(|x|)$.

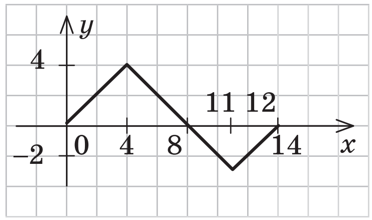


Рис. 2.2.2

2.2.9. Виконайте завдання вправи 2.2.8 для функції $y=f(x)$, заданої на проміжку $[-14;0]$, графік якої зображено на рис. 2.2.3.

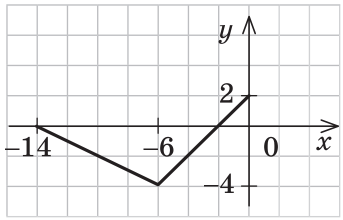


Рис. 2.2.3

2.3. Обернена функція

Таблиця 5

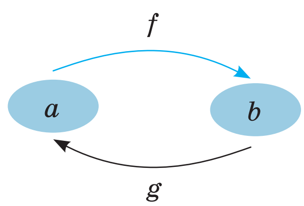
1. Поняття оберненої функції

Якщо функція $y=f(x)$ набуває кожного свого значення в єдиній точці її області визначення, то можна задати функцію $y=g(x)$, яка називається *оберненою до функції* $y=f(x)$:

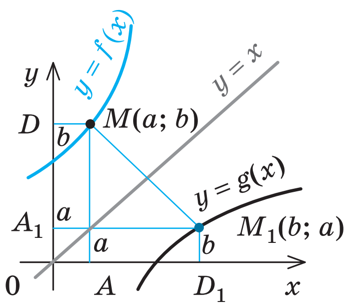
для кожного $a\in D(f)$, якщо $f(a)=b$, то $g(b)=a$.

$E(f)=D(g)$; $D(f)=E(g)$.

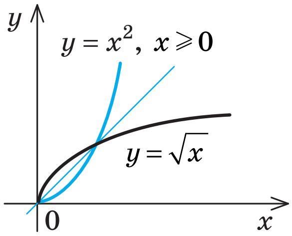
Функції $f(x)$ і $g(x)$ взаємно обернені



2. Властивості оберненої функції



1) Графіки прямої та оберненої функцій симетричні відносно прямої $y=x$



2) Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона має обернену функцію на цьому проміжку, яка зростає, якщо $f(x)$ зростає, і спадає, якщо $f(x)$ спадає

3. Практичний спосіб знаходження формули функції, оберненої до функції $y = f(x)$

Алгоритм	Приклад
1. **З'ясувати, чи буде функція $y = f(x)$ оборотною на всій області визначення:** для цього достатньо з'ясувати, чи має рівняння $y = f(x)$ єдиний корінь відносно змінної x. **Якщо ні, то виділити (якщо можливо) проміжок, де існує обернена функція** (наприклад, це може бути проміжок, де функція $y = f(x)$ зростає або спадає). 2. **Із рівності $y = f(x)$ виразити x через y.** 3. **В одержаній формулі ввести традиційні позначення — аргумент позначити через x, а функцію — через y.**	Знайдіть функцію, обернену до функції $y = 2x + 4$. ▶ Із рівності $y = 2x + 4$ можна однозначно виразити x через y: $x = \frac{1}{2}y - 2$. Ця формула задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через y, а функцію — через x. Позначимо в одержаній формулі аргумент через x, а функцію — через y. Маємо функцію $y = \frac{1}{2}x - 2$, обернену до функції $y = 2x + 4$. ◁

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття оберненої функції

Відомо, що залежність шляху від часу для тіла, яке рухається рівномірно з постійною швидкістю v_0, виражається формулою $s = v_0 t$. Із цієї формули можна знайти обернену залежність — часу від пройденого шляху: $t = \frac{s}{v_0}$. Функцію $t(s) = \frac{s}{v_0}$ називають *оберненою до функції* $s(t) = v_0 t$. Зазначимо, що в розглянутому прикладі кожному значенню t $(t \geqslant 0)$ відповідає єдине значення s і, навпаки, кожному значенню s $(s \geqslant 0)$ відповідає єдине значення t.

Розглянемо процедуру одержання оберненої функції в загальному вигляді.

Нехай функція $f(x)$ набуває кожного свого значення в єдиній точці її області визначення (така функція називається *оборотною*). Тоді для кожного числа $y_0 = b$ (з області значень функції $f(x)$) існує єдине значення $x_0 = a$ таке, що $f(a) = b$. Розглянемо нову функцію $g(x)$, яка кожному числу b з області значень функції $f(x)$ ставить у відповідність число a, тобто $g(b) = a$ для кожного b з області значень функції $f(x)$. У цьому випадку функція $g(x)$ називається оберненою до функції $f(x)$, а функція $f(x)$ — оберненою до функції $g(x)$.

Обґрунтуйте самостійно властивості оберненої функції, наведені в п. 2 табл. 5, використовуючи відповідний рисунок в таблиці та інтернет-підтримку підручника.

Із курсу геометрії вам відомо поняття «обернена теорема». Спробуйте провести аналогію між поняттями «обернена функція» і «обернена теорема».

2 Практичний спосіб знаходження формули функції, оберненої до функції $y=f(x)$

Із процедури одержання оберненої функції випливає, що для отримання оберненої залежності (яка і буде задавати обернену функцію) необхідно знати, як значення x виражається через значення y. Це можна зробити, розв'язавши рівняння $y=f(x)$ відносно змінної x. Якщо задана функція оборотна, то рівняння матиме єдиний розв'язок для всіх y з області значень функції $f(x)$ і ми одержимо формулу $x=g(y)$, яка задає обернену функцію. Але в цій формулі аргумент позначено через y, а функцію — через x. Якщо поміняти позначення на традиційні, то одержимо запис функції, оберненої до функції $y=f(x)$.

Ці міркування разом із відповідним алгоритмом наведено в табл. 5 і реалізовано в прикладах, наведених нижче.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Знайдіть функцію, обернену до функції $y=x^2$.

Розв'язання	Коментар
▶ Із рівності $y=x^2$ при $y\geqslant 0$ одержуємо $x=\pm\sqrt{y}$. Тоді при $y>0$ одному значенню y відповідають два значення x. Отже, на всій області визначення $x\in(-\infty;+\infty)$ функція $y=x^2$ не є оборотною і для неї неможливо знайти обернену функцію. ◁	Область значень заданої функції: $y\geqslant 0$. Але при $y>0$ з рівності $y=x^2$ не можна однозначно виразити x через y. Наприклад, при $y=4$ одержуємо $x=\pm 2$. Через це ми не можемо значенню $y=4$ поставити у відповідність єдине число, щоб побудувати обернену функцію.

Приклад 2 Знайдіть функцію, обернену до функції $y=x^2$ при $x\geqslant 0$.

Розв'язання	Коментар
▶ Із рівності $y=x^2$ при $y\geqslant 0$ одержуємо $x=\pm\sqrt{y}$. Ураховуючи, що за умовою $x\geqslant 0$, маємо $x=\sqrt{y}$. Позначимо аргумент через x, а функцію — через y і одержимо, що функцією, оберненою до функції $y=x^2$, яка задана тільки при $x\geqslant 0$, буде функція $y=\sqrt{x}$. ◁	Область значень заданої функції: $y\geqslant 0$. При $x\geqslant 0$ задана функція $y=x^2$ зростає, отже, на проміжку $x\geqslant 0$ вона має обернену функцію. Тому на цьому проміжку ми зможемо однозначно розв'язати рівняння $x^2=y$: при $x\geqslant 0$ маємо $x=\sqrt{y}$. Ця формула задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через y, а функцію — через x. Замінюючи позначення на традиційні, одержуємо кінцевий результат.

Зауваження. У прикладах 1 і 2 ми фактично розглядаємо різні функції (вони мають різні області визначення), хоча в обох випадках ці функції задаються однією й тією самою формулою. Як відомо, графіком функції $y=x^2$ (приклад 1) є парабола, а графіком функції $y=x^2$ при $x\geqslant 0$ (приклад 2) є тільки права вітка цієї параболи (рис. 2.3.1).

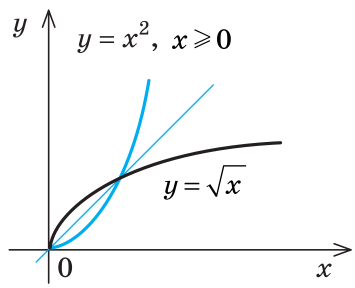


Рис. 2.3.1

Запитання

1. За якої умови для заданої функції $y = f(x)$ можна побудувати обернену функцію?

2. Поясніть побудову графіка оберненої функції на прикладі функції $y = f(x)$, яка задана табл. I. Задайте функцію $y = g(x)$, обернену до функції $y = f(x)$, за допомогою табл. II.

Таблиця I

x	0	2	4	6
$f(x)$	1	3	5	7

Таблиця II

x				
$g(x)$				

3. Як розміщено графіки прямої і оберненої функцій, якщо їх побудовано в одній системі координат? Проілюструйте на прикладі.

4. Обґрунтуйте взаємне розміщення графіків прямої і оберненої функцій.

5. Чи існує функція, обернена до функції $y = x^2$, де $x \leqslant 0$? Поясніть це, спираючись на відповідні властивості оберненої функції. Якщо обернена функція існує, задайте її формулою виду $y = g(x)$.

Вправи

2.3.1. Запишіть формулу, яка задає функцію $y = g(x)$, обернену до заданої. Укажіть область визначення і область значень функції $g(x)$:

1°) $y = 3x - 6$; 2°) $y = -3x - 6$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 5) $y = \sqrt{x}$.

2.3.2. На одному рисунку побудуйте графік даної функції та функції, оберненої до даної:

1°) $y = 2x$; 2°) $y = x - 2$; 3) $y = -\frac{1}{x}$; 4*) $y = \frac{1}{x-1}$; 5*) $y = \sqrt{x+1}$.

2.3.3. Знайдіть функцію, обернену до даної на заданому проміжку, і побудуйте на одному рисунку графіки даної функції та функції, оберненої до неї:

1) $y = \frac{1}{4}x^2$ при $x \geqslant 0$;
2) $y = \frac{1}{4}x^2$ при $x \leqslant 0$;
3) $y = (x-2)^2$ при $x \geqslant 2$;
4) $y = x^2 - 2$ при $x \leqslant 0$.

Виявіть свою компетентність

2.3.4. Вартість поїздки в таксі включає оплату подання автомобіля 25 грн та вартість пройденої відстані в розмірі 5 грн за кожний кілометр.

1) Складіть функцію, яка визначає вартість поїздки в таксі залежно від пройденої відстані.
2) Знайдіть вартість поїздки, якщо пасажир проїхав 30 км.

§ 3 РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Таблиця 6

1. Область допустимих значень (ОДЗ) рівнянь і нерівностей

Областю допустимих значень **(або областю визначення) рівняння (або нерівності) називають спільну область визначення для всіх функцій, що стоять у лівій і правій частинах рівняння (або нерівності)**

Для рівняння $\sqrt{x+2}=x$ (нерівностей $\sqrt{x+2}<x$ або $\sqrt{x+2}>x$) ОДЗ: $x+2\geqslant 0$, тобто $x\geqslant -2$, оскільки область визначення функції $f(x)=\sqrt{x+2}$ визначається умовою $x+2\geqslant 0$, а областю визначення функції $g(x)=x$ є множина всіх дійсних чисел

2. Рівняння-наслідки ($\Rightarrow$)

Орієнтир	Приклад
Якщо кожний корінь першого рівняння є коренем другого, то друге рівняння називають *наслідком* першого. Якщо з правильності першої рівності випливає правильність кожної наступної, одержуємо рівняння-наслідки. *При цьому можлива поява сторонніх коренів.* Тому **при використанні рівнянь-наслідків перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою розв'язування**	Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+2}=x$. *Розв'язання* ▶ Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата: $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2$; $x+2=x^2$; $x^2-x-2=0$; $x_1=2$, $x_2=-1$. Перевірка. $x=2$ — корінь; $x=-1$ — сторонній корінь. *Відповідь:* 2. ◁

3. Рівносильні рівняння і нерівності ($\Leftrightarrow$)

Означення	Найпростіші теореми
Два рівняння (нерівності) називаються *рівносильними на деякій множині*, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки. Тобто *кожний розв'язок першого рівняння (нерівності) є розв'язком другого, і, навпаки, кожний розв'язок другого є розв'язком першого* (схеми такого розв'язування рівнянь і нерівностей наведено в пп. 4 і 6 цієї таблиці та в інтернет-підтримці підручника)	**1. Якщо з однієї частини рівняння (нерівності) перенести в другу доданки з протилежним знаком, одержимо рівняння (нерівність), рівносильне заданому (на будь-якій множині).** **2. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне і те саме число, яке не дорівнює нулю (або на одну й ту саму функцію, що визначена і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого рівняння), одержимо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого)**

4. Схема пошуку плану розв’язування рівнянь

Розв’язування рівнянь

за допомогою **рівнянь-наслідків**	за допомогою **рівносильних перетворень**
① ↓ ② Перетворення, що гарантують збереження правильної рівності	Урахування ОДЗ початкового рівняння
Перевірка коренів підстановкою в початкове рівняння	① ↓↑ ② Збереження на ОДЗ правильної рівності при прямих і зворотних перетвореннях

застосуванням властивостей функцій

① — початкове рівняння;

② — рівняння, одержане в результаті перетворення початкового;

↓, ↑ — символічне зображення напрямку виконаних перетворень

5. Заміна змінних

Орієнтир	Приклад
Якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному й тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз зі змінною позначити однією буквою (новою змінною)	Розв’яжіть рівняння $x^4-3x^2-4=0$. *Розв’язання* ▶ Заміна: $x^2=t$ (тоді $x^4=(x^2)^2=t^2$). $t^2-3t-4=0$; $t_1=-1$, $t_2=4$. 1. При $t=-1$ маємо $x^2=-1$ коренів немає. 2. При $t=4$ маємо $x^2=4$, тоді $x=\pm 2$. *Відповідь:* ± 2. ◁

6. Схема пошуку плану розв’язування нерівностей

Розв’язування нерівностей

за допомогою **рівносильних перетворень**	за допомогою **методу інтервалів** $(f(x)\gtrless 0)$
Урахування ОДЗ початкової нерівності ① ↓↑ ② Збереження на ОДЗ правильної нерівності при прямих і зворотних перетвореннях	1. Знайти ОДЗ. 2. Знайти нулі функції: $f(x)=0$. 3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції $f(x)$ у кожному проміжку, на які ОДЗ розбивається нулями. 4. Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності.

① — початкова нерівність;

② — нерівність, одержана в результаті перетворення початкової;

↓, ↑ — символічне зображення виконаних перетворень (із вказівкою щодо напрямку їх виконання)

7. Метод інтервалів (розв'язування нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$)

План

1. **Знайти ОДЗ.**
2. **Знайти нулі функції:** $f(x)=0$.
3. **Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному проміжку, на які ОДЗ розбивається нулями.**
4. **Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності (*якщо розв'язуємо нестрогу нерівність, то всі нулі функції слід включити до відповіді*).**

Приклад

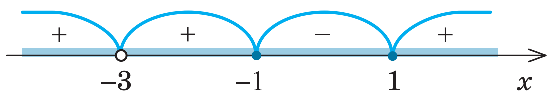
Розв'яжіть нерівність $\dfrac{x^2-1}{(x+3)^2} \geqslant 0$.

Розв'язання

▶ Нехай $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+3)^2}$.

1. ОДЗ: $(x+3)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -3$.
2. Нулі функції: $f(x)=0$.

$\dfrac{x^2-1}{(x+3)^2}=0$; $x^2-1=0$; $x_1=-1$, $x_2=1$ (входять до ОДЗ).

3. 

Відповідь: $(-\infty;-3)\cup(-3;-1]\cup[1;+\infty)$. ◁

8. Теореми про рівносильність нерівностей

1. **Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число** *(або на одну й ту саму функцію, що визначена і додатна на ОДЗ заданої нерівності)*, **не змінюючи знак нерівності, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)**
2. **Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число** *(або на одну й ту саму функцію, що визначена і від'ємна на ОДЗ заданої нерівності)* **і змінити знак нерівності на протилежний, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)**

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Метод інтервалів

Розв'язування нерівностей методом інтервалів спирається на властивості функцій, пов'язані зі зміною знаків функції. Пояснимо ці властивості, використовуючи графіки відомих нам функцій, наприклад $y=\dfrac{1}{x}$ і $y=2x-2$ (рис. 3.1).

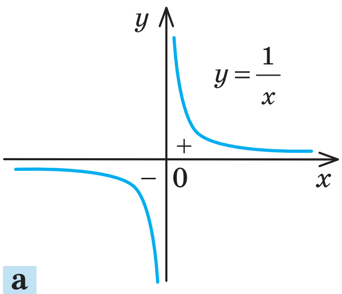
Розглядаючи ці графіки, помічаємо, що функція може змінити свій знак тільки у двох випадках:

1) якщо графік розривається (як у випадку функції $y=\dfrac{1}{x}$ (рис. 3.1, *а*) — графік розривається в точці 0, і знак функції змінюється в точці 0);

2) якщо графік без розриву переходить із нижньої півплощини у верхню (або навпаки), але тоді графік перетинає вісь Ox (як у випадку функції $y=2x-2$, рис. 3.1, *б*). На осі Ox значення функції дорівнюють нулю. (Нагадаємо, що значення аргумента, при яких функція перетворюється на нуль, називають *нулями функції*.) Отже, **будь-яка функція може змінити свій знак тільки в нулях або в точках, де розривається графік функції** (у так званих *точках розриву* функції*).

Точки, у яких розривається графік функції $f(x)$, ми виокремлюємо, як правило, коли знаходимо область визначення

* Докладніше це поняття буде розглянуто в розділі 5.



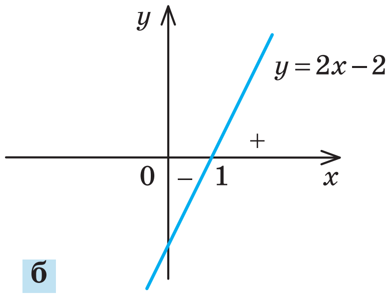


Рис. 3.1

цієї функції. Наприклад, якщо $f(x)=\frac{1}{x}$, то її область визначення $x\neq 0$, і саме в точці 0 графік функції розривається (див. рис. 3.1, *а*). Якщо ж на якомусь проміжку області визначення графік функції не розривається і функція не дорівнює нулю, то за наведеним вище висновком вона не може в цьому проміжку змінити свій знак*. Отже, якщо позначити нулі функції на її області визначення, то область визначення розіб'ється на проміжки, усередині яких знак функції змінитися не може (і тому цей знак можна визначити в будь-якій точці з цього проміжку).

План і приклад розв'язування нерівностей методом інтервалів наведено в п. 7 табл. 6.

Детальне пояснення й обґрунтування методів розв'язування рівнянь і нерівностей та додаткові приклади їх розв'язування різними методами наведені в інтернет-підтримці підручника.

Запитання

1. Поясніть зміст понять: «корінь рівняння», «розв'язок нерівності», «розв'язати рівняння чи нерівність», «область допустимих значень рівняння чи нерівності», «рівносильні рівняння чи нерівності».
2. Сформулюйте відомі вам теореми про рівносильність рівнянь і рівносильність нерівностей. Проілюструйте їх на прикладах.
3. Сформулюйте план розв'язування нерівностей методом інтервалів. Проілюструйте використання цього плану на прикладі.
4. Поясніть на прикладах, як можна виконувати рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей у тих випадках, які не описуються відомими теоремами про рівносильність.
5. Дайте означення рівняння-наслідку заданого рівняння. Поясніть на прикладі, як можна розв'язувати рівняння за допомогою рівнянь-наслідків.

Виявіть свою компетентність

6. Доберіть власні приклади до таблиці «Причини появи сторонніх коренів і втрати коренів під час розв'язування рівнянь» (див. інтернет-підтримку підручника). Поясніть, як у кожному випадку одержати правильне (чи повне) розв'язування рівняння.

* У розділі 5 ми уточнимо формулювання цієї властивості (так званих неперервних функцій). Для всіх відомих вам функцій (лінійних, квадратичних, степеневих, дробово-раціональних) ця властивість має місце.

Вправи

3.1. З'ясуйте, чи є друге рівняння наслідком першого, чи є ці рівняння рівносильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) $2x^2-8x-9=0$ і $x^2-4x-4,5=0$;

2) $\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}=0$ і $x^2-4=0$.

3.2°. Обґрунтуйте рівносильність рівнянь:

1) $5x-8=7-3x$ і $5x+3x=7+8$;

2) $(2x-1)(x^2+5)=x(x^2+5)$ і $2x-1=x$.

3.3°. Знайдіть область допустимих значень (ОДЗ) рівняння:

1) $\dfrac{x-5}{x+2}-\dfrac{2x-3}{x}=0$;

2) $\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{x}{x^2+1}=0$;

3) $\sqrt{x}=\dfrac{3x-6}{x-1}$;

4) $\sqrt{x^2+5}-\dfrac{x-5}{x+4}=0$.

3.4°. Обґрунтуйте, що задані рівняння не є рівносильними:

1) $x^2+\dfrac{1}{x+3}=9+\dfrac{1}{x+3}$ і $x^2=9$;

2) $(2x-1)(x^2-5)=x(x^2-5)$ і $2x-1=x$.

3.5°. Поясніть, які перетворення було використано під час переходу від першого рівняння до другого і чи можуть вони приводити до порушення рівносильності:

1) $3x+1,1=6,8-2x$ і $3x+2x=6,8-1,1$;

2) $\dfrac{x^2-81}{x+9}+3x^2-1=0$ і $x-9+3x^2-1=0$;

3) $\dfrac{5}{3x-1}+x=3$ і $5+x(3x-1)=3(3x-1)$;

4) $\sqrt{x^2-1}=x-2$ і $x^2-1=x^2-4x+4$.

3.6. Визначте, чи є рівносильними задані рівняння на ОДЗ першого з них:

1) $5-x=x+7$ і $5-x+\dfrac{1}{x-3}=x+7+\dfrac{1}{x-3}$;

2) $\dfrac{12-2x}{x-2}=\dfrac{x-5}{x-2}$ і $12-2x=x-5$;

3) $6-x=10$ і $6-x+\sqrt{x}-\sqrt{x}=10$;

4) $(x^2+2x-3)(x^2+6)=5(x^2+6)$ і $x^2+2x-3=5$;

5) $x^2-1=6x-1$ і $\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{6x-1}{x}$.

3.7. Розв'яжіть рівняння і вкажіть, яке перетворення могло привести до порушення рівносильності:

1) $\frac{8}{x}-\frac{5-x}{2}=\frac{8+3x}{x}-x$;
3) $\frac{7}{x+3}-\frac{1}{3-x}=\frac{6}{x^2-9}-\frac{x-4}{3+x}$;
2) $\frac{x}{4}+\frac{(x-2)^2+8}{x}=\frac{(4-x)(2-x)}{x}$;
4) $\frac{1}{x-2}+\frac{x-6}{3x^2-12}=\frac{1}{2-x}-1$.

3.8. Розв'яжіть рівняння за допомогою рівнянь-наслідків і вкажіть, яке перетворення могло привести до порушення рівносильності:

1) $3x+\sqrt{x-2}=5x-1+\sqrt{x-2}$;
3) $\sqrt{3-2x}=1-x$;
2) $\sqrt{2x+5}=x+1$;
4) $\sqrt{5+x^2}=x-4$.

3.9. Визначте умову, за якої є рівносильними рівняння:

1) $\frac{f(x)}{2x-3}=g(x)$ і $f(x)=g(x)\cdot(2x-3)$;

2) $f(x)+\sqrt{x}=g(x)+\sqrt{x}$ і $f(x)=g(x)$.

3.10. З'ясуйте, чи може відбутися втрата коренів або поява сторонніх коренів, якщо:

1) рівняння $(x^2+7)\cdot f(x)=4x^2+28$ замінити рівнянням $f(x)=4$

2) рівняння $(x-1)\cdot f(x)=(x-1)\cdot g(x)$ замінити рівнянням $f(x)=g(x)$;

3) рівняння $\frac{f(x)}{x+3}=\frac{g(x)}{x+3}$ замінити рівнянням $f(x)=g(x)$;

4) рівняння $\frac{f(x)}{3x^2+5}=0$ замінити рівнянням $f(x)=0$.

Розв'яжіть нерівності 3.11–3.12 двома способами: за допомогою рівносильних перетворень і методом інтервалів.

3.11°. 1) $\frac{x^2-4}{x^2-3x-4}\geqslant 0$; 2) $\frac{2}{x+2}<\frac{1}{x-3}$; 3) $\frac{x^2-25}{(x+5)(x-4)}\leqslant 0$; 4) $\frac{x^2+12}{x^2-2x-8}\geqslant 1$.

3.12*. 1) $x^4-5x^2+4\leqslant 0$;
3) $\frac{81}{x}\geqslant x^3$;
2) $9x^4-10x^2+1>0$;
4) $(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)<105$.

3.13°. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{\frac{x-4}{x^2-4}}$; 2) $y=\sqrt{\frac{2x-x^2-1}{x^2+3x+2}}$; 3) $y=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$; 4) $y=\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

Виявіть свою компетентність

3.14. Перебуваючи за кордоном, ви можете користуватися послугами одного з двох мобільних операторів. Перший пропонує сплачувати 10 грн за першу хвилину і 2 грн за кожну наступну хвилину розмов, а другий — 7 грн за першу хвилину і 3 грн за кожну наступну хвилину. За пропозиціями кожного оператора складіть функції, які виражають вартість розмови залежно від її тривалості. Побудуйте в одній системі координат графіки обох функцій, вважаючи, що тривалість розмови не перевищує 6 хв. Який висновок можна зробити стосовно доцільності використання послуг кожного оператора?

§ 4 ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

Таблиця 7

1. Скінченна ОДЗ

Орієнтир	Приклад
Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається зі скінченного числа значень, то для розв'язування достатньо перевірити всі ці значення	$\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}$. ▶ ОДЗ: $\begin{cases} x^2-1\geqslant 0, \\ 2-2x^2\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\geqslant 1, \\ x^2\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x\pm 1$. Перевірка. $x=1$ — корінь ($\sqrt{0}+1=1+\sqrt{0}$; $1=1$), $x=-1$ — не є коренем $(\sqrt{0}-1\neq 1+\sqrt{0})$. *Відповідь*: 1. ◁

2. Оцінка значень лівої та правої частин рівняння

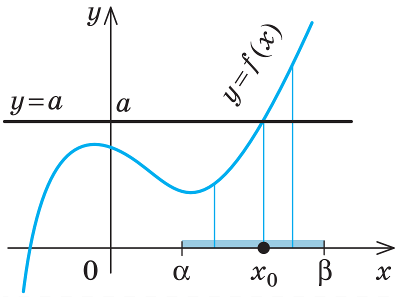
Орієнтир	Приклад
$f(x)=g(x)$ ⇔ $\begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a \end{cases}$ $f(x)\geqslant a$ $g(x)\leqslant a$ Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x)=g(x)$ і з'ясувалося, що $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то рівність між лівою і правою частинами можлива тоді й тільки тоді, коли $f(x)$ і $g(x)$ одночасно дорівнюють a	$1-x^2=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}$. ▶ $f(x)=1-x^2\leqslant 1$, $g(x)=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}\geqslant 1$ (оскільки $\sqrt{\lvert x\rvert}\geqslant 0$). Отже, задане рівняння рівносильне системі рівнянь $\begin{cases} 1-x^2=1, \\ \sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$. *Відповідь*: 0. ◁
$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=0$ ⇔ $\begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)=0. \end{cases}$ $f_1(x)\geqslant 0$, $f_2(x)\geqslant 0$, ... $f_n(x)\geqslant 0$ Сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю	$\sqrt{x-2}+\lvert x^2-2x\rvert+(x^2-4)^2=0$. ▶ $f_1(x)=\sqrt{x-2}\geqslant 0$, $f_2(x)=\lvert x^2-2x\rvert\geqslant 0$, $f_3(x)=(x^2-4)^2\geqslant 0$. Отже, задане рівняння рівносильне системі рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x-2}=0, \\ \lvert x^2-2x\rvert=0, \\ (x^2-4)^2=0. \end{cases}$ Із першого рівняння одержуємо $x=2$, що задовольняє й решту рівнянь системи. *Відповідь*: 2. ◁

3. Використання зростання і спадання функцій

Схема розв'язування рівняння

1. *Підбираємо один або декілька коренів рівняння.*
2. *Доводимо, що інших коренів це рівняння не має* (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку лівої і правої частин рівняння)

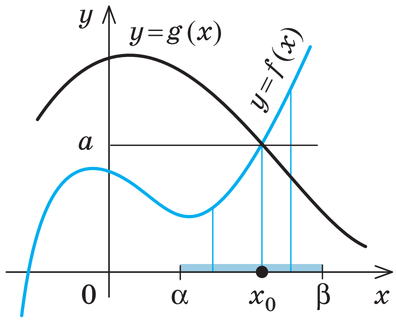
Теореми про корені рівняння



1. Якщо в рівнянні $f(x)=a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Приклад

Рівняння $\sqrt{x}+2x^3=3$ має єдиний корінь $x=1$ ($\sqrt{1}+2\cdot1^3=3$, тобто $3=3$), оскільки функція $f(x)=\sqrt{x}+2x^3$ зростає на всій області визначення $x\geqslant0$



2. Якщо в рівнянні $f(x)=g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Приклад

Рівняння $\sqrt{x}+x^3=3-x$ має єдиний корінь $x=1$ ($\sqrt{1}+1^3=3-1$, тобто $2=2$), оскільки $f(x)=\sqrt{x}+x^3$ зростає на всій області визначення $(x\geqslant0)$, а $g(x)=3-x$ спадає (на множині $\boldsymbol{R}$, а отже, і при $x\geqslant0$)

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Скінченна ОДЗ

Нагадаємо, що в разі, коли задано рівняння $f(x)=g(x)$, спільну область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$ називають *областю допустимих значень* цього рівняння. Зрозуміло, що кожний корінь заданого рівняння входить як до області визначення функції $f(x)$, так і до області визначення функції $g(x)$. Отже, *кожний корінь рівняння обов'язково входить до ОДЗ цього рівняння*. Це дозволяє в деяких випадках, аналізуючи ОДЗ, одержати розв'язки рівняння.

Наприклад, якщо задано рівняння $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-2x}=3x-6$, то його ОДЗ можна записати за допомогою системи нерівностей $\begin{cases}x-2\geqslant0,\\4-2x\geqslant0.\end{cases}$ Розв'язуючи цю систему, одержуємо: $\begin{cases}x\geqslant2,\\x\leqslant2,\end{cases}$ тобто $x=2$. Отже, ОДЗ заданого рівняння складається лише з одного значення $x=2$. Але якщо тільки для одного числа потрібно з'ясувати, чи є воно коренем заданого рівняння, то для цього достатньо підставити це значення в рівняння. У результаті одержуємо правильну числову рівність $(0=0)$. Отже, $x=2$ — корінь цього рівняння, інших коренів бути не може, оскільки всі корені рівняння розташовані в його ОДЗ, а там немає інших значень, крім $x=2$.

Розглянутий приклад дозволяє виділити орієнтир, наведений у п. 1 табл. 7.

Зауваження. У тому випадку, коли ОДЗ — порожня множина (не містить жодного числа), ми можемо одразу дати відповідь, що задане рівняння не має коренів.

З обґрунтуванням інших орієнтирів застосування властивостей функцій для розв'язування рівнянь і додатковими прикладами їх використання можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника. Спробуйте провести таке обґрунтування самостійно.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{x}+x^3=\sqrt{y}+y^3,\\ x^2+3y^2=36.\end{cases}$

Розв'язання	Коментар
▶ ОДЗ: $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$ Розглянемо функцію $f(t)=\sqrt{t}+t^3$. На своїй області визначення $(t\geqslant 0)$ ця функція є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій). Тоді перше рівняння заданої системи, яке має вигляд $f(x)=f(y)$, рівносильне рівнянню $x=y$. Отже, на ОДЗ задана система рівнянь рівносильна системі $\begin{cases}x=y,\\ x^2+3y^2=36.\end{cases}$ Підставляючи $x=y$ у друге рівняння системи, маємо $4y^2=36$; $y^2=9$; $y=\pm 3$. Ураховуючи, що на ОДЗ $y\geqslant 0$, одержуємо $y=3$. Тоді $x=y=3$. *Відповідь:* $(3;3)$. ◁	Іноді властивості функцій удається використати під час розв'язування систем рівнянь. Якщо помітити, що в лівій і правій частинах першого рівняння заданої системи стоять значення однієї і тієї ж функції, яка є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій), то *рівність* $f(x)=f(y)$ *для зростаючої функції можлива тоді й тільки тоді, коли* $x=y$, *оскільки однакових значень зростаюча функція може набувати тільки при одному значенні аргумента.* (Зауважимо, що така сама властивість матиме місце і для спадної функції.)

Зауваження. Під час розв'язування завдань може бути використано таке твердження: *якщо функція* $f(x)$ *є зростаючою (або спадною) на певній множині, то на цій множині* $f(\alpha)=f(\beta)\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

Запитання

1. Поясніть на прикладах, як можна використати властивості функцій до розв'язування рівнянь.

2*. Обґрунтуйте правильність орієнтирів для розв'язування рівнянь із використанням властивостей функцій, які наведено в табл. 7.

Вправи

Розв'яжіть рівняння 4.1–4.4, використовуючи властивості відповідних функцій.

4.1°. 1) $\sqrt{x-2}+x^2=\sqrt{8-4x}+x+2$;

2) $2x+\sqrt{x^2-9}=x^2+\sqrt{18-2x^2}-3$;

3) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+3x}+\sqrt{4x^2+y^2-2y-3}=\sqrt{x^4-1}-2y+3$.

4.2. 1°) $\sqrt{4+x^2}=2-x^4$; 3*) $x^6+\frac{1}{x^6}=1-2x-x^2$;

2°) $1+|x^5+3x|=\sqrt{1-x^2}$; 4*) $\sqrt{2x}+\frac{1}{\sqrt{2x}}=2-|2x-1|$.

4.3. 1) $|x^2-7x+12|+|x^2-9|+|6-2x|=0$;

2) $|x+2|+|y-5|+|2x^2-8|=0$;

3) $\sqrt{1-y}+\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-3x}=0$;

4) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-x}=0$;

5) $x^2+y^2+5=4x+2y$;

6) $3x^2+y^2+2z^2=4y-6x-12z-25$.

4.4. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}=2$; 4) $\sqrt{x-2}+x=\frac{40}{x-1}$;

2) $x+\sqrt{x}+x^9=3$; 5) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+2}=\frac{10}{x}$;

3) $2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}=5-x$; 6) $2x+\sqrt{x}=\sqrt{10-x}$.

4.5*. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x+x^5=y+y^5,\\x^2+3y=10;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x^3-y^3=y^5-x^5,\\x^2+y^2=1;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\sqrt{-x}-x=\sqrt{-y}-y,\\x^3+y^3=-16;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt{-3x}-\sqrt{-3y}=x-y,\\3x^2-y^2=8.\end{cases}$

Виявіть свою компетентність

4.6. Розгляньте графік (рис. 4.1), що ілюструє виробництво електроенергії в Україні (млрд. кВт·год).

1) Знайдіть область визначення функції, що зображена на графіку.

2) Яка кількість електроенергії вироблялася в Україні в 1995 р.?

3) У який ще рік вироблялося стільки ж електроенергії, як у 1995 р.?

4) Чи були роки, коли електроенергії вироблялося менше ніж 150 млрд. кВт·год?

5) У які роки електроенергії вироблялося більше ніж 200 млрд. кВт·год?

Рис. 4.1

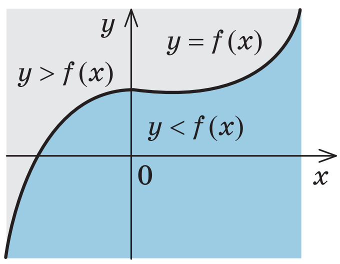
§ 5 ГРАФІКИ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

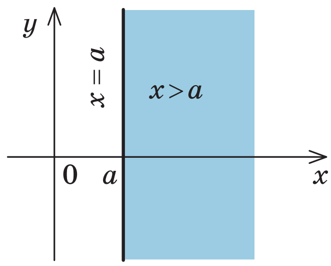
Таблиця 8

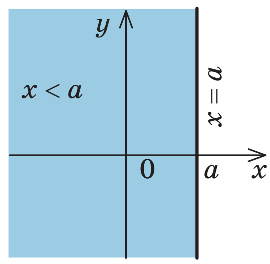
1. Графіки рівнянь і нерівностей з двома змінними

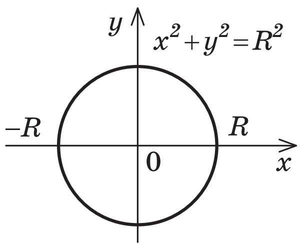
Означення. ***Графіком рівняння (нерівності) з двома змінними*** x ***і*** y **називається множина всіх точок координатної площини з координатами** $(x; y)$**, де пара чисел** $(x; y)$ **є розв'язком відповідного рівняння (нерівності).**

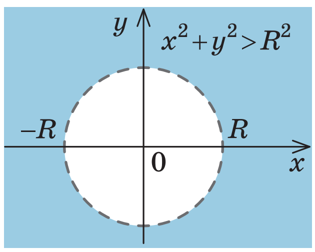
Графіки деяких рівнянь і нерівностей

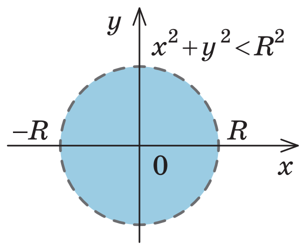




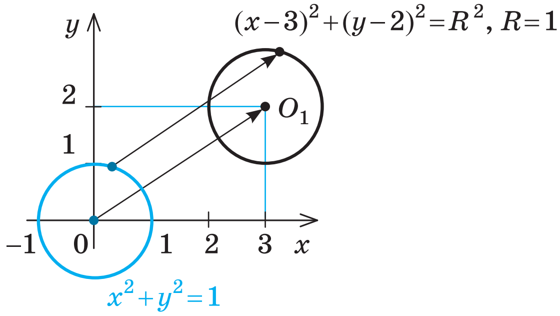
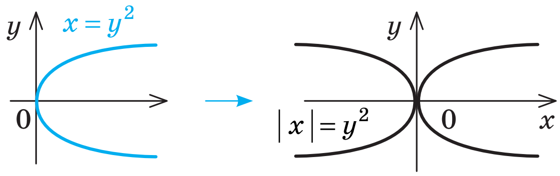






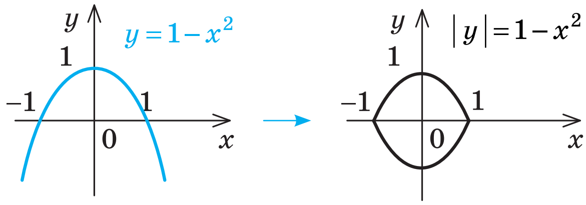


2. Геометричні перетворення графіка рівняння $F(x; y) = 0$

Перетворення	Приклад
$F(x-a; y-b) = 0$ *Паралельне перенесення* графіка рівняння $F(x; y) = 0$ *на вектор* $\vec{n}(a; b)$	
$F(\lvert x \rvert; y) = 0$ Частина графіка рівняння $F(x; y) = 0$ *праворуч від осі Oy* (і на самій осі) *залишається без зміни, і ця сама частина відображується симетрично відносно осі Oy*	

$F(x;|y|)=0$

Частина графіка рівняння $F(x;y)=0$ *вище від осі Ox* (і на самій осі) *залишається без зміни, і ця сама частина відображується симетрично відносно осі Ox*



Детальна інформація про графіки рівнянь і нерівностей з двома змінними та геометричні перетворення графіка рівняння $F(x;y)=0$, а також обґрунтування відповідних властивостей і додаткові приклади розв'язування завдань наведені в інтернет-підтримці підручника.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад

Покажіть штриховкою на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють систему нерівностей $\begin{cases} x^2+y\leqslant 0, \\ x-y<2. \end{cases}$

Розв'язання	Коментар
▶ Задана система рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} y\leqslant -x^2, \\ y>x-2. \end{cases}$	Перепишемо задану систему нерівностей так, щоб нам було зручно зображати графіки заданих нерівностей (тобто запишемо нерівності у вигляді $y>f(x)$ або $y<f(x)$). Множиною точок, координати яких задовольняють нерівність $y\leqslant -x^2$, є об'єднання параболи $y=-x^2$ і точок координатної площини, які розташовані нижче від цієї параболи (на рис. 5.1 ця множина позначена вертикальною штриховкою). Множина точок, координати яких задовольняють нерівність $y>x-2$, складається з точок координатної площини, які розташовані вище від прямої $y=x-2$ (на рисунку ця множина позначена горизонтальною штриховкою).

Зобразимо на рис. 5.1 штриховкою графіки нерівностей системи (першої — вертикальною, другої — горизонтальною):

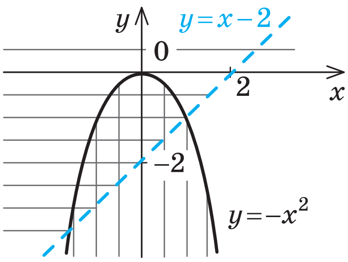


Рис. 5.1

Тоді множина точок, координати яких задовольняють систему, буде такою (рис. 5.2):

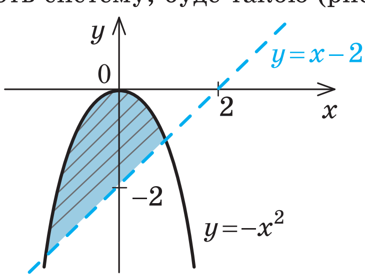


Рис. 5.2 ◁

Систему нерівностей задовольняють координати тих і тільки тих точок, які належать перетину множин точок, що задаються кожною з нерівностей заданої системи (на рисунку перетину множин відповідає та область, де штриховки наклалися одна на одну).

Зауважимо, що в подібних завданнях можна не виконувати проміжних рисунків, а відразу штрихувати шукану множину точок координатної площини (вище від прямої $y=x-2$ і нижче від параболи $y=-x^2$ разом із тією частиною параболи, яка лежить вище від прямої — рис. 5.2).

Запитання

1. Що називається графіком рівняння з двома змінними? Що називається графіком нерівності з двома змінними? Наведіть приклади.

2. Як, знаючи графік функції $y=f(x)$, побудувати графік нерівності $y>f(x)$ та нерівності $y<f(x)$? Наведіть приклади.

3. Як, знаючи графік рівняння $F(x;y)=0$, можна побудувати графік рівняння $F(x-a;y-b)=0$ та рівнянь $F(|x|;y)=0$ і $F(x;|y|)=0$? Наведіть приклади.

4*. Обґрунтуйте правила геометричних перетворень графіка рівняння $F(x;y)=0$ для одержання графіків таких рівнянь: $F(x-a;y-b)=0,$ $F(|x|;y)=0$, $F(x;|y|)=0$.

5. Поясніть на прикладі, як можна знайти на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють систему нерівностей із двома змінними.

Вправи

5.1. Побудуйте ескіз графіка функції:

1) $y=x+\dfrac{1}{x}$; 2) $y=x-\dfrac{1}{x}$; 3) $y=x^3+\dfrac{1}{x}$; 4) $y=x^2-\dfrac{1}{x}$.

5.2. Побудуйте графік рівняння:

1) $|y|=x-2$; 3) $|x|=-y^2$; 5) $|x|-|y|=2$.

2) $|y|=x^2-x$; 4) $|x|+|y|=2$;

5.3. Побудуйте графік нерівності:

1) $y>x^2-3$; 3) $x^2+y^2\leqslant 25$;

2) $y<\dfrac{1}{x}$; 4) $(x-2)^2+(y+3)^2>4$.

5.4. Покажіть штриховкою на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють систему нерівностей:

1) $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 4,\\ y>x;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}y\leqslant 5-x^2,\\ y<-x;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^2+y^2\geqslant 9,\\ x^2+y^2\leqslant 25;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}y\leqslant 5-x,\\ y\geqslant x,\\ y\leqslant 2x+4.\end{cases}$

5.5. Побудуйте графік рівняння:

1) $|x-y|-|x+y|=y+3$; 3) $|3x+y|+|x-y|=4$.

2) $|x-2y|+|2x-y|=2-y$;

Вказівка. Див. розв’язування аналогічного завдання в інтернет-підтримці підручника.

Виявіть свою компетентність

5.6. Розв’яжіть вправи 5.2–5.5 з використанням комп’ютерної програми.

§ 6 МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

Під час розв'язування математичних завдань інколи виникає потреба обґрунтувати, що певна властивість виконується для довільного натурального числа n.

Перевірити задану властивість для кожного натурального числа ми не можемо: їх кількість нескінченна. Доводиться міркувати так:

1) я можу перевірити, що ця властивість виконується при $n=1$;
2) я можу показати, що для кожного наступного значення n вона теж виконується, отже, властивість буде виконуватись для кожного наступного числа починаючи з одиниці, тобто для всіх натуральних чисел.

Такий спосіб міркувань при доведенні математичних тверджень називається *методом математичної індукції*. Він є одним з універсальних методів доведення математичних тверджень, у яких містяться слова «для довільного натурального n» (можливо, не сформульовані явно). Доведення за допомогою цього методу завжди складається з двох етапів:

1) *початок індукції*: перевіряють, чи виконується розглядуване твердження при $n=1$;
2) *індуктивний перехід*: доводять, що коли задане твердження виконується для k, то воно виконується і для $k+1$.

Таким чином, почавши з $n=1$, ми на основі доведеного індуктивного переходу одержуємо справедливість сформульованого твердження для $n=2$, 3, ..., тобто для будь-якого натурального n.

На практиці цей метод зручно використовувати за схемою, наведеною в табл. 9.

Таблиця 9

Схема доведення тверджень за допомогою методу математичної індукції	Приклад
1. *Перевіряємо*, чи виконується дане твердження при $n=1$ (іноді починають з $n=p$).	Доведіть, що для довільного натурального n $$1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$ ▶ Для зручності запису позначимо $$S_n=1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1).$$ 1. При $n=1$ рівність виконується: $$1\cdot2=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot3,\text{ тобто } 2=2.$$
2. *Припускаємо,* що задане твердження справедливе при $n=k$, де $k\geqslant1$ (другий варіант — при $n\leqslant k$).	2. Припускаємо, що задана рівність є правильною при $n=k$, де $k\geqslant1$, тобто $$S_k=1\cdot2+2\cdot3+\ldots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2). \quad (1)$$
3. *Доводимо* (спираючись на припущення) справедливість нашого твердження і при $n=k+1$.	3. Доведемо, що задана рівність виконується і при $n=k+1$, тобто доведемо, що $$S_{k+1}=1\cdot2+2\cdot3+\ldots+k(k+1)+$$ $$+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$$

Ураховуючи, що $S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)$, і підставляючи S_k з рівності (1), одержуємо:

$$S_{k+1} = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3),$$

що й потрібно було довести.

4. *Робимо висновок*, що дане твердження справедливе для будь-якого натурального числа n (для будь-якого $n \geqslant p$)

4. Отже, задана рівність правильна для будь-якого натурального n. ◁

Приклади використання методу математичної індукції для розв'язування завдань на доведення нерівностей та подільності цілих чисел наведено в інтернет-підтримці підручника.

Вправи

Виконайте завдання 6.1–6.12 за допомогою методу математичної індукції.

6.1. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ при всіх натуральних n. Доведіть.

6.2. $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$, де $n \in \boldsymbol{N}$. Доведіть.

6.3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, де $n \in \boldsymbol{N}$. Доведіть.

6.4. Доведіть: $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$, де $n \in \boldsymbol{N}$.

6.5. Добуток $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ позначається $n!$ (читається: «n факторіал»). Доведіть, що $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$, де $n \in \boldsymbol{N}$.

6.6. Доведіть, що $4^n > 7n - 5$, якщо $n \in \boldsymbol{N}$.

6.7. Доведіть, що $2^n > n^3$, якщо $n \geqslant 10$, $n \in \boldsymbol{N}$.

6.8. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:
1) $9^n - 8n - 1$ ділиться на 16; 2) $5^n + 2\cdot 3^n - 3$ ділиться на 8.

6.9. Доведіть, що значення виразу $7^n + 3^n - 2$ ділиться на 8 при будь-якому натуральному n.

6.10. Доведіть, що значення виразу $2^{3n+3} - 7n + 41$ ділиться на 49 при будь-якому натуральному n.

6.11. Доведіть, що коли $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$, то $a_n = 3^n - 1$, де $n \in \boldsymbol{N}$.

Виявіть свою компетентність

6.12. За температури 0 °C металева рейка має довжину $l_0 = 25$ м, а проміжок між сусідніми рейками дорівнює 12 мм. Унаслідок зростання температури відбувається теплове розширення рейки, при цьому її довжина змінюється за законом $l(t) = l_0(1 + \alpha t)$, де $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}$ °C^{-1} — коефіцієнт теплового розширення, t — температура (у градусах Цельсія). За якої температури проміжок між рейками зникне? Відповідь виразіть у градусах Цельсія.

§ 7 МНОГОЧЛЕНИ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ТА ДІЇ НАД НИМИ

7.1. Означення многочленів від однієї змінної та їх тотожна рівність

Розглянемо одночлен і многочлен, які залежать тільки від однієї змінної, наприклад від змінної x.

За означенням одночлена числа і букви (у нашому випадку одна буква — x) у ньому пов'язані тільки двома діями — множенням і піднесенням до натурального степеня. Якщо в цьому одночлені добуток усіх чисел записати перед буквою, а добуток усіх степенів букви записати як цілий невід'ємний степінь цієї букви (тобто записати одночлен у стандартному вигляді), то одержимо вираз виду ax^n, де a — деяке число.

Означення. ***Одночленом від однієї змінної*** x **називається вираз виду** ax^n**, де** a **— деяке число,** n **— ціле невід'ємне число.**

Якщо $a \neq 0$, то показник степеня n змінної x називається *степенем одночлена*. Наприклад, $25x^6$ — одночлен шостого степеня, $\frac{2}{3}x^2$ — одночлен другого степеня. Якщо одночлен є числом (яке не дорівнює нулю), то його степінь вважають рівним нулю. *Для одночлена, який заданий числом 0, поняття степеня не означають* (оскільки $0 = 0 \cdot x = 0 \cdot x^2 = 0 \cdot x^3 \ldots$).

Підготуйте міні-доповідь за темою «Дивовижне число 0. Історія та використання в різних галузях знань».

За означенням многочлен від однієї змінної x — це сума одночленів від однієї змінної x.

Означення. ***Многочленом від однієї змінної*** x **називається вираз виду**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

де коефіцієнти a_n, a_{n-1}, ..., a_0 **— деякі числа.**

Якщо $a_n \neq 0$, то цей многочлен називають *многочленом n-го степеня* від змінної x. При цьому член $a_n x^n$ називають *старшим членом многочлена* $f(x)$, число a_n — *коефіцієнтом при старшому члені*, а член a_0 — *вільним членом*. Наприклад, $5x^3 - 2x + 1$ — многочлен третього степеня, у якого вільний член дорівнює 1, а коефіцієнт при старшому члені дорівнює 5.

Означення. Два многочлени називаються тотожно рівними, якщо вони набувають рівних значень при всіх значеннях змінної.

Теорема 1. Одночлени ax^n**, де** $a \neq 0$**, та** bx^m**, де** $b \neq 0$**, є *тотожно рівними* тоді і тільки тоді, коли** $a = b$ **і** $n = m$.

Одночлен ax^n **тотожно дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли** $a = 0$.

● *Доведення.* Оскільки рівність одночленів $ax^n = bx^m$ (1)
виконується при всіх значеннях x (за умовою ці одночлени є тотожно рівними), то, підставляючи в цю рівність $x = 1$, отримуємо $a = b$. Скорочуючи обидві частини рівності (1) на a (де $a \neq 0$ за умовою), одержуємо $x^n = x^m$. При $x = 2$ з цієї рівності маємо: $2^n = 2^m$. Оскільки $2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\ \text{разів}}$, а $2^m = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{m\ \text{разів}}$, то рівність $2^n = 2^m$ можлива лише тоді, коли $n = m$. Отже, з тотожної рівності $ax^n = bx^m$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) отримуємо, що $a = b$ і $n = m$.

Якщо відомо, що $ax^n = 0$ для всіх x, то при $x = 1$ одержуємо $a = 0$. Тому одночлен ax^n тотожно дорівнює нулю при $a = 0$ (тоді $ax^n = 0 \cdot x^n \equiv 0$*). ○

* Знаком ≡ позначено тотожну рівність многочленів.

Надалі будь-який одночлен виду $0 \cdot x^n$ замінюватимемо на 0.

Теорема 2. **Якщо многочлен $f(x)$ тотожно дорівнює нулю (тобто набуває нульових значень при всіх значеннях x), то всі його коефіцієнти дорівнюють нулю.**

● *Доведення.* Для доведення використовуємо метод математичної індукції.

Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0$.

При $n = 0$ маємо $f(x) = a_0 \equiv 0$, тому $a_0 = 0$. Тобто в цьому випадку твердження теореми виконується.

Припустимо, що при $n = k$ це твердження також виконується: якщо многочлен $a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0$, то $a_k = a_{k-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.

Доведемо, що задане твердження виконується й при $n = k+1$. Нехай

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0. \qquad (2)$$

Оскільки рівність (2) виконується при всіх значеннях x, то, підставляючи в цю рівність $x = 0$, одержуємо, що $a_0 = 0$. Тоді рівність (2) перетворюється на таку рівність: $a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_1 x \equiv 0$. Винесемо x у лівій частині цієї рівності за дужки та одержимо

$$x\left(a_{k+1}x^k + a_k x^{k-1} + \ldots + a_1\right) \equiv 0. \qquad (3)$$

Рівність (3) має виконуватися при всіх значеннях x. Для того щоб вона виконувалася при $x \neq 0$, повинна виконуватися тотожність $a_{k+1}x^k + a_k x^{k-1} + \ldots + a_1 \equiv 0$.

У лівій частині цієї тотожності стоїть многочлен зі степенями змінної від x^0 до x^k. Тоді за припущенням індукції всі його коефіцієнти дорівнюють нулю: $a_{k+1} = a_k = \ldots = a_1 = 0$. Але ми довели також, що $a_0 = 0$, тому наше твердження виконується і при $n = k+1$. Отже, твердження теореми справедливе для будь-якого цілого невід'ємного n, тобто для всіх многочленів. ○

Означення. **Многочлен, у якого всі коефіцієнти дорівнюють нулю, називається *нульовим многочленом*, або *нуль-многочленом*, і його позначають $0(x)$ або просто 0 (оскільки $0(x) = 0$).**

Теорема 3. **Якщо два многочлени $f(x)$ і $g(x)$ тотожно рівні, то вони збігаються (тобто їхні степені однакові й коефіцієнти при однакових степенях рівні).**

● *Доведення.* Нехай многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, а многочлен $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$. Розглянемо многочлен $f(x) - g(x)$. Оскільки многочлени $f(x)$ і $g(x)$ за умовою є тотожно рівними, то многочлен $f(x) - g(x)$ тотожно дорівнює 0. Отже, усі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

Але $f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \ldots$.

Тоді $a_0 - b_0 = 0$, $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$, ... Звідси $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ... Як бачимо, якщо припустити, що в якогось із двох заданих многочленів степінь вищий, ніж у другого многочлена (наприклад, n більше за m), то коефіцієнти різниці дорівнюватимуть нулю. Тому, починаючи з номера $(m+1)$, усі коефіцієнти a_i також дорівнюватимуть нулю. Отже, многочлени $f(x)$ і $g(x)$ дійсно мають однаковий степінь і відповідно рівні коефіцієнти при однакових степенях. ○

Теорема 3 є основою так званого *методу невизначених коефіцієнтів*. Покажемо його застосування на прикладі.

Приклад

Доведіть, що вираз $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+16$ є повним квадратом.

▶ Заданий многочлен є многочленом четвертого степеня, тому він може бути повним квадратом тільки многочлена другого степеня. Многочлен другого степеня має вигляд $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Одержуємо тотожність:

$$(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+16 = \left(ax^2 + bx + c\right)^2. \qquad (4)$$

Розкриваючи дужки в лівій і правій частинах цієї тотожності та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержуємо систему рівностей. Цей етап зручно оформляти в такому вигляді:

x^4	$1=a^2$
x^3	$2+4+6+8=2ab$
x^2	$2\cdot4+2\cdot6+2\cdot8+4\cdot6+4\cdot8+6\cdot8=b^2+2ac$
x^1	$2\cdot4\cdot6+2\cdot4\cdot8+2\cdot6\cdot8+4\cdot6\cdot8=2bc$
x^0	$2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot+16=c^2$

Із першої рівності одержуємо:

$$a=1 \text{ або } a=-1.$$

Якщо $a=1$, із другої рівності маємо $b=10$, а з третьої — $c=20$. Як бачимо, при цих значеннях a, b і c останні дві рівності також виконуються. Отже, тотожність (5) виконується при $a=1$, $b=10$, $c=20$ (аналогічно можна також одержати $a=-1$, $b=-10$, $c=-20$).

Таким чином, $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+16=$

$$=\left(x^2+10x+20\right)^2. \ \triangleleft$$

Вправи

7.1.1. Знаючи, що многочлени $f(x)$ і $g(x)$ тотожно рівні, знайдіть значення коефіцієнтів a, b, c, d:

1) $f(x)=2x^2-(3-a)x+b$, $g(x)=cx^3+2dx^2+x+5$;

2) $f(x)=(a+1)x^3+2$, $g(x)=3x^3+bx^2+(c-1)x+d$.

7.1.2. Знайдіть такі числа a, b, c, щоб задана рівність $\left(x^2-1\right)a+b(x-2)+c(x+2)=2$ виконувалася при будь-яких значеннях x.

7.1.3. Доведіть тотожність:

1) $(x-1)(x+1)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)=x^6-1$;

2) $1+x^4=\left(1+x\sqrt{2}+x^2\right)\left(1-x\sqrt{2}+x^2\right)$.

7.1.4. Доведіть, що заданий вираз є повним квадратом:

1) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1$; 2) $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$.

7.1.5. Знайдіть такі a і b, щоб при будь-яких значеннях x виконувалася рівність $3x^4+4x^3+8x^2+3x+2=\left(3x^2+ax+1\right)\left(x^2+x+b\right)$.

7.1.6. Запишіть алгебраїчний дріб $\dfrac{2}{15x^2+x-2}$ як суму двох алгебраїчних дробів виду $\dfrac{a}{3x-1}$ і $\dfrac{b}{5x+2}$.

7.2. Дії над многочленами. Ділення многочлена на многочлен з остачею

Додавання і множення многочленів від однієї змінної виконують за допомогою відомих правил додавання і множення многочленів. У результаті виконання дій додавання або множення над многочленами від однієї змінної завжди одержують многочлен від тієї самої змінної.

Із означення добутку двох многочленів випливає, що *старший член добутку двох многочленів дорівнює добутку старших членів множників, а вільний член добутку дорівнює добутку вільних членів множників*. Звідси одержуємо, що *степінь добутку двох многочленів дорівнює сумі степенів множників*.

При додаванні многочленів одного степеня одержують многочлен того самого степеня, хоча іноді можна одержати многочлен меншого степеня.

Наприклад, $2x^3-5x^2+3x+1+\left(-2x^3+5x^2+x+5\right)=4x+6$.

При додаванні многочленів різних степенів завжди одержуємо многочлен, степінь якого дорівнює більшому степеню доданку.

Наприклад, $(3x^3-5x+7)+(x^2+2x+1)=$ $=3x^3+x^2-3x+8$.

Ділення многочлена на многочлен означається аналогічно діленню цілих чисел. Нагадаємо, що ціле число a ділиться на ціле число b $(b\neq 0)$, якщо існує таке ціле число q, що $a=b\cdot q$.

Означення. ***Многочлен*** $\boldsymbol{A(x)}$ ***ділиться на многочлен*** $\boldsymbol{B(x)}$ **(де** $\boldsymbol{B(x)}$ **— ненульовий многочлен), якщо існує такий многочлен** $\boldsymbol{Q(x)}$**, що** $\boldsymbol{A(x)=B(x)\cdot Q(x)}$.

Як і для цілих чисел, операція ділення многочлена на многочлен виконується не завжди, тому в множині многочленів уводять операцію *ділення з остачею*.

Означення. ***Многочлен*** $\boldsymbol{A(x)}$ ***ділиться на многочлен*** $\boldsymbol{B(x)}$ **(де** $\boldsymbol{B(x)}$ **— ненульовий многочлен)** ***з остачею*****, якщо існує така пара многочленів** $\boldsymbol{Q(x)}$ **і** $\boldsymbol{R(x)}$**, що** $\boldsymbol{A(x)=B(x)\cdot Q(x)+R(x)}$**, причому степінь остачі** $\boldsymbol{R(x)}$ **менший від степеня дільника** $\boldsymbol{B(x)}$.

Зазначимо, що в цьому випадку многочлен $Q(x)$ називається *неповною часткою*.

Наприклад, оскільки $x^3-5x+2=$ $=(x^2-5)x+2$, то при діленні многочлена x^3-5x+2 на многочлен x^2-5 одержуємо неповну частку x і остачу 2.

Іноді ділення многочлена на многочлен, як і ділення багатоцифрових чисел, зручно виконувати «куточком», користуючись алгоритмом, який проілюстровано нижче.

Приклад

Розділимо многочлен $A(x)=x^4-5x^3+x^2+8x-20$ на многочлен $B(x)=x^2-2x+3$.

▶
$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^4-5x^3+x^2+8x-20 & x^2-2x+3 \\
\underline{x^4-2x^3+3x^2} & \overline{x^2-3x-8} \\
-\,-3x^3-2x^2+8x-20 & \\
\underline{-3x^3+6x-9x} & \\
-\,-8x^2+17x-20 & \\
\underline{-8x^2+16x-24} & \\
x+4 &
\end{array}
$$
◁

За використаним алгоритмом: спочатку потрібно старший член діленого поділити на старший член дільника $\left(\dfrac{x^4}{x^2}=x^2\right)$, результат (x^2) помножити на дільник і одержаний добуток $(x^4-2x^3+3x^2)$ відняти від діленого. До одержаної різниці знову застосовуємо вказані дії доти, поки степінь отриманої різниці не буде меншим від степеня дільника. Доведемо, що одержаний результат дійсно є результатом ділення $A(x)$ на $B(x)$ з остачею.

● *Доведення.* Якщо позначити результат виконання першого кроку алгоритму через $f_1(x)$, другого кроку — через $f_2(x)$, третього — через $f_3(x)$, то операцію ділення, яку виконали вище, можна записати у вигляді системи рівностей:

$$f_1(x)=A(x)-x^2\cdot B(x); \quad (1)$$
$$f_2(x)=f_1(x)-(-3x)\cdot B(x); \quad (2)$$
$$f_3(x)=f_2(x)-(-8)\cdot B(x). \quad (3)$$

Додамо почленно рівності (1), (2), (3) та отримаємо

$$A(x)=(x^2-3x-8)B(x)+f_3(x). \quad (4)$$

Ураховуючи, що степінь $f_3(x)=x+4$ менший від степеня дільника $B(x)=x^2-2x+3$, позначимо $f_3(x)=R(x)$ (остача), а $x^2-3x-8=$ $=Q(x)$ (неповна частка). Тоді з рівності (4) маємо: $A(x)=B(x)\cdot Q(x)+R(x)$, тобто $x^4-5x^3+x^2+8x-20=(x^2-2x+3)(x^2-3x-8)+x+4$, а це й означає, що ми розділили $A(x)$ на $B(x)$ з остачею. ○

Очевидно, що наведене обґрунтування можна провести для будь-якої пари многочленів $A(x)$ і $B(x)$ у випадку їх ділення стовпчиком. Тому описаний вище алгоритм дозволяє для довільних діленого $A(x)$ і дільника $B(x)$ (де $B(x)$ — ненульовий многочлен) знайти неповну частку $Q(x)$ та остачу $R(x)$. Зазначимо, що у випадку, коли степінь діленого $A(x)$ менший від степеня дільника $B(x)$, вважають, що неповна частка $Q(x)=0$, а остача $R(x)=A(x)$.

Вправи

7.2.1. Виконайте ділення многочлена на многочлен:

1) $3x^3-5x^2+2x-8$ на $x-2$;
2) $x^{10}+1$ на x^2+1;
3) x^5+3x^3+8x-6 на x^2+2x+3.

7.2.2. Виконайте ділення многочлена на многочлен з остачею:

1) $4x^4-2x^3+x^2-x+1$ на x^2+x+2;
2) $x^5+x^4+x^3+x^2+1$ на x^2-x-2.

7.2.3. При яких значеннях a і b многочлен $A(x)$ ділиться без остачі на многочлен $B(x)$?

1) $A(x)=x^3+ax+b$, $B(x)=x^2+5x+7$;
2) $A(x)=2x^3-5x^2+ax+b$, $B(x)=x^2-4$;
3) $A(x)=x^4-x^3+x^2-ax+b$, $B(x)=x^2-x+2$.

7.2.4. Знайдіть неповну частку й остачу при діленні многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$ методом невизначених коефіцієнтів:

1) $A(x)=x^3+6x^2+11x+6$, $B(x)=x^2-1$;
2) $A(x)=x^3-19x-30$, $B(x)=x^2+1$.

7.3. Теорема Безу. Корені многочлена. Формули Вієта

Розглянемо ділення многочлена $f(x)$ на двочлен $(x-a)$. Оскільки степінь дільника дорівнює 1, то степінь остачі, яку ми одержимо, повинен бути меншим від 1, тобто в цьому випадку остачею буде деяке число R. Отже, якщо розділити многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-a)$, то одержимо

$$f(x)=(x-a)\cdot Q(x)+R.$$

Ця рівність виконується тотожно, тобто при будь-якому значенні x. При $x=a$ маємо: $f(a)=R$. Одержаний результат називають теоремою Безу*.

✓ **Теорема 1** (теорема Безу). **Остача від ділення многочлена $f(x)$ на двочлен $(x-a)$ дорівнює $f(a)$ (тобто значенню многочлена при $x=a$).**

Приклад 1

Доведіть, що значення виразу $x^5-3x^4+2x^3+4x-4$ ділиться без остачі на $x-1$.

▶ Підставивши в $f(x)=x^5-3x^4+2x^3++4x-4$ замість x значення 1, одержуємо: $f(1)=0$. Отже, остача від ділення $f(x)$ на $(x-1)$ дорівнює 0, тобто $f(x)$ ділиться на $(x-1)$ без остачі. ◁

* Безу Етьєн (1730–1783) — французький математик, який зробив значний внесок у розвиток теорії алгебраїчних рівнянь.

Означення. **Число α називається *коренем многочлена* $f(x)$, якщо $f(\alpha)=0$.**

Якщо многочлен $f(x)$ ділиться на $(x-\alpha)$, то α — корінь цього многочлена.

● Дійсно, якщо $f(x)$ ділиться на $(x-\alpha)$, то $f(x)=(x-\alpha)\cdot Q(x)$ і тому $f(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot Q(\alpha)=0$. Отже, α — корінь многочлена $f(x)$. ○

Справедливе і зворотне твердження. Воно є *наслідком із теореми Безу*.

Теорема 2. **Якщо число α є коренем многочлена $f(x)$, то цей многочлен ділиться на двочлен $(x-\alpha)$ без остачі.**

● *Доведення.* За теоремою Безу остача від ділення $f(x)$ на $(x-\alpha)$ дорівнює $f(\alpha)$. Але за умовою α — корінь $f(x)$, отже, $f(\alpha)=0$. ○

Узагальненням теореми 2 є таке твердження.

Теорема 3. **Якщо многочлен $f(x)$ має попарно різні корені α_1, α_2, ..., α_n, то він ділиться без остачі на добуток $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$.**

● *Доведення.* Для доведення використовуємо метод математичної індукції.

При $n=1$ твердження доведено в теоремі 2.

Припустимо, що твердження справедливе при $n=k$. Тобто, якщо α_1, α_2, ..., α_k — попарно різні корені многочлена $f(x)$, то він ділиться на добуток $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)$. Тоді

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)\cdot Q(x). \qquad (1)$$

Доведемо, що твердження теореми справедливе й при $n=k+1$. Нехай α_1, α_2, ..., α_k, α_{k+1} — попарно різні корені многочлена $f(x)$. Оскільки α_{k+1} — корінь $f(x)$, то $f(\alpha_{k+1})=0$. Беручи до уваги рівність (1), яка виконується згідно з припущенням індукції, одержуємо:

$$f(\alpha_{k+1})=(\alpha_{k+1}-\alpha_1)(\alpha_{k+1}-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(\alpha_{k+1}-\alpha_k)\cdot Q(\alpha_{k+1})=0.$$

За умовою всі корені α_1, α_2, ..., α_k, α_{k+1} різні, тому жодне з чисел $\alpha_{k+1}-\alpha_1$, $\alpha_{k+1}-\alpha_2$, ..., $\alpha_{k+1}-\alpha_k$ не дорівнює нулю. Тоді $Q(\alpha_{k+1})=0$. Отже, α_{k+1} — корінь многочлена $Q(x)$. За теоремою 2 многочлен $Q(x)$ ділиться на $(x-\alpha_{k+1})$, тобто $Q(x)=(x-\alpha_{k+1})\cdot Q_1(x)$ і з рівності (1) маємо

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)(x-\alpha_{k+1})\cdot Q_1(x).$$

Це означає, що $f(x)$ ділиться на добуток $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)(x-\alpha_{k+1})$, тобто теорема доведена й при $n=k+1$.

Отже, теорема справедлива для будь-якого натурального n. ○

Наслідок. **Многочлен степеня n має не більше n різних коренів.**

● *Доведення.* Припустимо, що многочлен n-го степеня має $(n+1)$ різних коренів: α_1, α_2, ..., α_n, α_{n+1}. Тоді $f(x)$ ділиться на добуток $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{n+1})$ — многочлен степеня $(n+1)$, але це неможливо. Тому многочлен n-го степеня не може мати більше ніж n коренів. ○

Нехай тепер многочлен n-го степеня $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ $(a_n\neq 0)$ має n різних коренів α_1, α_2, ..., α_n. Тоді цей многочлен ділиться без остачі на добуток $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$. Цей добуток є многочленом того самого n-го степеня. Отже, у результаті ділення можна одержати тільки многочлен нульового степеня, тобто число. Таким чином,

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=b(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n). \qquad (2)$$

Якщо розкрити дужки в правій частині рівності (2) і прирівняти коефіцієнти при старших степенях, то одержимо, що $b=a_n$, тобто

$$\boxed{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)} \qquad (3)$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, що стоять у лівій і правій частинах тотожності (3), одержуємо співвідношення між коефіцієнтами рівняння та його коренями, які називають **формулами Вієта**:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n};\\
&\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_{n-2}}{a_n};\\
&\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n=-\frac{a_{n-3}}{a_n};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}\qquad (4)$$

Наприклад, при $n=2$ маємо:

$$\alpha_1+\alpha_2=-\frac{a_1}{a_2},\qquad \alpha_1\alpha_2=\frac{a_0}{a_2}.$$

а при $n=3$:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-\frac{a_2}{a_3};\\
&\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=\frac{a_1}{a_3};\\
&\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\frac{a_0}{a_3}.
\end{aligned}\qquad (5)$$

Виконання таких рівностей є ***необхідною і достатньою умовою того, щоб числа*** α_1, α_2, ..., α_n ***були коренями многочлена*** $\boldsymbol{f(x)=a_nx^n+a_{n\;1}x^{n-1}+\ldots+}$ $\boldsymbol{+a_2x^2+a_1x+a_0}$ $\boldsymbol{(a\neq 0)}$.

Формули (3) і (4) справедливі не тільки для випадку, коли всі корені многочлена $f(x)$ різні. Введемо поняття *кратного кореня многочлена*.

Якщо многочлен $f(x)$ ділиться без остачі на $(x-\alpha)^k$, але не ділиться без остачі на $(x-\alpha)^{k+1}$, то кажуть, що число α є коренем кратності k многочлена $f(x)$.

Так, якщо добуток $(x+2)^3(x-1)^2(x+3)$ записати у вигляді многочлена, то для цього многочлена число -2 є коренем кратності 3, число 1 є коренем кратності 2, а число -3 є коренем кратності 1.

Використовуючи формули Вієта у випадку кратних коренів, необхідно кожен корінь записати таке число разів, яке дорівнює його кратності.

Приклад 2

Перевірте справедливість формул Вієта для многочлена $f(x)=x^3+2x^2-4x-8$.

▶ $f(x)=x^3+2x^2-4x-8=x^2(x+2)-4(x+2)=$ $=(x+2)(x^2-4)=(x-2)(x+2)^2$. Тому $f(x)$ має корені: $\alpha_1=2$, $\alpha_2=-2$, $\alpha_3=-2$ (оскільки -2 — корінь кратності 2).

Перевіримо справедливість формул (5).

У нашому випадку: $a_3=1$, $a_2=2$, $a_1=-4$, $a_0=-8$. Тоді $2+(-2)+(-2)=-\frac{2}{1}$;

$2\cdot(-2)+2\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2)=\frac{-4}{1}$;

$2\cdot(-2)\cdot(-2)=-\frac{-8}{1}$.

Як бачимо, усі рівності виконуються, тому формули Вієта є справедливими для даного многочлена. ◁

Приклад 3

Складіть квадратне рівняння, коренями якого є квадрати коренів рівняння $x^2-8x+4=0$.

▶ Позначимо корені рівняння $x^2-8x+4=0$ через x_1 і x_2. Тоді коренями шуканого рівняння повинні бути числа $\alpha_1=x_1^2$ і $\alpha_2=x_2^2$. Отже, це рівняння має вигляд $x^2+px+q=0$, де $p=-(\alpha_1+\alpha_2)=-(x_1^2+x_2^2)=$ $=-((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)$, $q=\alpha_1\alpha_2=x_1^2x_2^2=(x_1x_2)^2$.

За формулами Вієта маємо: $x_1+x_2=8$ і $x_1x_2=4$. Звідси знаходимо, що $q=(x_1x_2)^2=4^2=16$, а $p=-((x_1+x_2)^2-$ $-2x_1x_2)=-(8^2-2\cdot 4)=-56$.

Отже, шукане рівняння має вигляд

$$x^2-56x+16=0.$$ ◁

Вправи

7.3.1. Знайдіть остачу від ділення многочлена $x^5-4x^4+2x^3-5x+1$ на $x+2$.

7.3.2. Знайдіть коефіцієнт a, знаючи, що остача від ділення многочлена x^3-ax^2+5x-3 на $x-1$ дорівнює 6.

7.3.3. Многочлен $f(x)$ при діленні на $x-1$ має остачу 4, а при діленні на $x-3$ — остачу 6. Знайдіть остачу від ділення многочлена $f(x)$ на x^2-4x+3.

7.3.4. При яких значеннях a і b многочлен $x^4+2x^3+ax^2-bx+2$ ділиться без остачі на $x+2$, а при діленні на $x-1$ має остачу, яка дорівнює 3?

7.3.5. Остача від ділення многочлена $f(x)$ на $3x^2-5x+2$ дорівнює $7x+1$. Знайдіть остачу від ділення цього многочлена на двочлени $x-1$ і $3x-2$.

7.3.6. Запишіть формули Вієта при $n=4$.

7.3.7. Складіть кубічний многочлен, який має корені 5, −2, 1 і коефіцієнт при старшому члені −2. Розв'яжіть задачу двома способами.

7.3.8. При яких значеннях a сума квадратів коренів тричлена $x^2-(a+2)x+3a$ дорівнює 12?

7.3.9. Яку кратність має корінь 2 для многочлена $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$?

7.3.10. Складіть кубічний многочлен, який має корінь 3 кратності 2 і корінь −1, а коефіцієнт при старшому члені 2.

7.3.11. Знайдіть такі a і b, щоб число 3 було коренем не менш ніж другої кратності для многочлена $f(x)=x^3-5x^2+ax+b$.

7.3.12. Складіть квадратне рівняння, корені якого протилежні кореням рівняння $x^2-5x+1=0$.

7.3.13. Складіть квадратне рівняння, корені якого обернені до коренів рівняння $2x^2-5x+1=0$.

7.3.14. Складіть квадратне рівняння, коренями якого є квадрати коренів рівняння $x^2+6x+3=0$.

Виявіть свою компетентність

7.3.15. Підготуйте повідомлення про внесок Е. Безу і Ф. Вієта у становлення математичної науки.

§ 8 РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ, ЩО МІСТЯТЬ ЗНАК МОДУЛЯ

Таблиця 10

1. Розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять знак модуля

Розв'язування

за означенням

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ при } a>0, \\ 0, \text{ при } a=0, \\ -a, \text{ при } a<0 \end{cases}$$

з використанням спеціальних співвідношень

за геометричним змістом

$|a|$ — *відстань на числовій прямій від точки 0 до точки a*

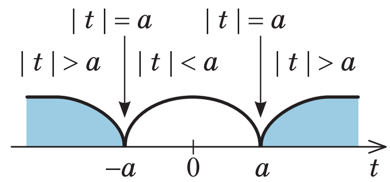
1. $|f(x)|=a$.
2. $|f(x)|=|g(x)|$.
3. $|f(x)|>a$.
4. $|f(x)|<a$

за загальною схемою

1. Знайти ОДЗ.
2. Знайти нулі всіх підмодульних функцій.
3. Позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки.
4. Знайти розв'язок у кожному з проміжків (і перевірити, чи входить цей розв'язок у розглянутий проміжок)

2. Використання геометричного змісту модуля (при $a>0$)

1. $|f(x)|=a \Leftrightarrow f(x)=a$ або $f(x)=-a$.
2. $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ або $f(x)=-g(x)$.
3. $|f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)<-a$ або $f(x)>a$.
4. $|f(x)|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>-a, \\ f(x)<a. \end{cases}$



Узагальнення

5. $|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geqslant 0, \\ f(x)=g(x) \text{ або } f(x)=-g(x). \end{cases}$
6. $|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow f(x)<-g(x) \Leftrightarrow$ або $f(x)>g(x)$.
7. $|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>-g(x), \\ f(x)<g(x). \end{cases}$

3. Використання спеціальних співвідношень

1. $|u|=u \Leftrightarrow u\geqslant 0$.
2. $|u|=-u \Leftrightarrow u\leqslant 0$.
3. $|u|=|v| \Leftrightarrow u^2=v^2$.
4. $|u|>|v| \Leftrightarrow u^2>v^2$, тоді $|u|-|v|>0 \Leftrightarrow u^2-v^2>0$; *знак різниці модулів двох виразів збігається зі знаком різниці їх квадратів.*
5. $|u|+|v|=u+v \Leftrightarrow \begin{cases} u\geqslant 0, \\ v\geqslant 0. \end{cases}$
6. $|u|+|v|=-u-v \Leftrightarrow \begin{cases} u\leqslant 0, \\ v\leqslant 0. \end{cases}$
7. $|u|+|v|=|u+v| \Leftrightarrow uv\geqslant 0$.
8. $|u|+|v|=|u-v| \Leftrightarrow uv\leqslant 0$.
9. $|x-a|+|x-b|=b-a \Leftrightarrow a\leqslant x\leqslant b$, де $a<b$.

Зазначимо, що загальна схема, запропонована в табл. 10, може бути використана не тільки під час розв'язування рівнянь або нерівностей, але й при виконанні перетворень виразів, що містять знак модуля.

Обґрунтування, приклади розв'язування рівнянь і нерівностей з модулями різними способами та приклади та побудови графіків функцій із декількома модулями наведені в інтернет-підтримці підручника.

Запитання

1. Якими способами можна розв'язувати рівняння іта нерівності, що містять знак модуля. Проілюструйте ці способи на прикладах.
2. Обґрунтуйте спеціальні співвідношення, наведені в табл. 10. Проілюструйте їх застосуванн.
3. Обґрунтуйте узагальнення використання геометричного змісту модуля, наведені в табл. 10. Проілюструйте їх застосування до розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять знак модуля.

Вправи

У завданнях 8.1–8.15 розв'яжіть рівняння і нерівності.

8.1. 1) $|3x-5|=7$; 2) $|8-4x|=6$; 3) $|x^2-5x|=6$.

8.2. 1) $|2x-3|>5$; 2) $|3-5x|<7$; 3*) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|>2$; 4) $\left|\frac{2x-3}{x-5}\right|<1$.

8.3. 1) $|x-2|-2x-1=0$; 2) $x^2+3x+|x+3|=0$.

8.4. 1) $|x-1|+|x-3|=2$; 3) $|x+5|+|x-8|=13$.
2) $|x+1|+|x-5|=20$;

8.5. 1) $|x+3|<x-2$; 3) $|x+3|+|x-1|<|6-3x|$.
2) $|x+1|+|x-2|\leqslant 2x-1$;

8.6. 1) $\sqrt{x^2-2x+1}+|x-2|=1$; 2) $\sqrt{x^2+4x+4}+|x|=x+5$.

8.7. 1) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2}=8$; 2) $\sqrt{16-8x+x^2}+\sqrt{x^2+2x+1}=5$.

8.8. 1) $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$; 2) $\frac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$.

8.9. 1) $||x-1|-2|=1$; 2) $||2x-4|-5|=3$.

8.10. 1) $|x^2-4x|<5$; 2) $|x^2-x-6|>4$.

8.11. 1) $3|x-1|+x^2-7>0$; 2) $|x-6|\geqslant x^2-5x+9$.

8.12. 1) $\frac{|x+3|+x}{x+2}>1$; 2) $\frac{1}{|x|-3}<\frac{1}{2}$.

8.13. 1) $||x-1|-5|\leqslant 2$; 2) $|x-1|+|x+2|-|x-3|>4$.

8.14. 1) $|x-2x^2|>2x^2-x$; 2) $|x^2+x-20|\leqslant x^2+x-20$.

8.15. 1) $\frac{4}{|x+3|-1}\geqslant|x+2|$; 2) $\frac{4}{|x+1|-2}\geqslant|x-1|$.

8.16. Побудуйте графік функції:
1) $y=|2x-4|+|2x+6|$; 2) $y=|x-5|+|3x+6|$.

§ 9 РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРАМИ

9.1. Розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами

Якщо крім змінної та числових коефіцієнтів до запису рівняння чи нерівності входять також буквені коефіцієнти — параметри, то під час розв'язування можна користуватися таким **орієнтиром**.

Будь-яке рівняння чи нерівність з параметрами можна розв'язувати як звичайне рівняння чи нерівність до тих пір, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Якщо якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язування необхідно розбити на кілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно.

На етапі пошуку плану розв'язування рівняння чи нерівності з параметрами або в ході розв'язування часто зручно супроводжувати відповідні міркування схемами, за якими легко простежити, у який момент ми не змогли однозначно виконати необхідні перетворення, на скільки випадків довелося розбити розв'язання та чим відрізняється один випадок від іншого. Щоб на таких схемах (чи в записах громіздких розв'язань) не загубити якусь відповідь, доцільно поміщати остаточні відповіді в прямокутні рамки. Зауважимо, що відповідь треба записати для всіх можливих значень параметра.

Приклад 1 Розв'яжіть нерівність зі змінною x: $3ax+2\geqslant x+5a$.

Коментар

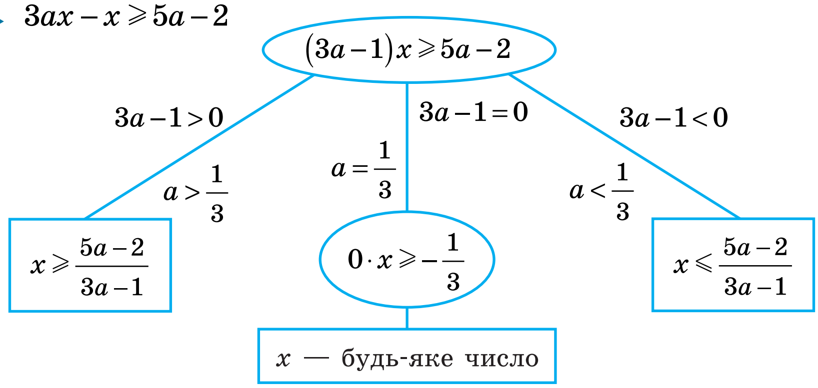
Задана нерівність є лінійною відносно змінної x, тому використаємо відомий алгоритм розв'язування лінійної нерівності:

1) переносимо члени зі змінною x в одну частину, а без x — у другу: $3ax-x\geqslant 5a-2$;
2) виносимо в лівій частині за дужки спільний множник x, тобто приводимо нерівність до вигляду $Ax\geqslant B$: $(3a-1)x\geqslant 5a-2$.

Для знаходження розв'язків останньої нерівності ми б хотіли поділити обидві її частини на $(3a-1)$. Але якщо обидві частини нерівності поділити на додатне число, то знак нерівності не зміниться, а якщо на від'ємне, то знак нерівності необхідно змінити на протилежний. Крім того, слід урахувати, що на нуль ділити не можна. Отже, починаючи з цього моменту потрібно розглянути три випадки: $3a-1>0$, $3a-1<0$, $3a-1=0$. Наведені вище міркування можна наочно записати так.

Розв'язання

► $3ax-x\geqslant 5a-2$



Відповідь:

1) якщо $a>\frac{1}{3}$, то $x\geqslant\frac{5a-2}{3a-1}$;

2) якщо $a<\frac{1}{3}$, то $x\leqslant\frac{5a-2}{3a-1}$;

3) якщо $a=\frac{1}{3}$, то x — будь-яке число. ◁

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\frac{ax-1}{x-a}=\frac{4}{x}$ відносно змінної x.

Коментар

Будемо виконувати рівносильні перетворення заданого рівняння. Для цього знайдемо його ОДЗ (знаменники дробів не дорівнюють нулю). Якщо далі обидві частини рівняння помножити на добуток виразів, що стоять у знаменниках дробів (і який не дорівнює нулю на ОДЗ рівняння), то одержимо рівняння $ax^2-5x+4a=0$, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого). Але останнє рівняння буде квадратним тільки при $a\neq 0$, тому для його розв'язування слід розглянути два випадки ($a=0$ і $a\neq 0$).

Якщо $a\neq 0$, то для дослідження одержаного квадратного рівняння потрібно розглянути ще три випадки: $D=0$, $D<0$, $D>0$ і в кожному з них перевірити, чи входять знайдені корені до ОДЗ. При $D=0$ зручно використати той факт, що значення кореня відповідного квадратного рівняння збігається з абсцисою вершини параболи $y=ax^2-5x+4a$, тобто $x=x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2a}$.

Розглядаючи випадок $D>0$, слід пам'ятати також про попереднє обмеження: $a\neq 0$. Оскільки корені рівняння (1) записуються достатньо громіздкими формулами (див. розв'язання), то для врахування ОДЗ замість підстановки одержаних коренів в обмеження ОДЗ підставимо «заборонені» значення x у рівняння (1) і з'ясуємо, при яких значеннях параметра a ми отримаємо значення x, які не входять до ОДЗ, а потім перевіримо отримані значення параметра.

Розв'язання

► ОДЗ: $x\neq 0$, $x\neq a$. На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням: $ax^2-x=4x-4a$;

$$ax^2-5x+4a=0. \qquad (1)$$

1. Якщо $a=0$, то з рівняння (1) одержуємо $x=0$ — не входить до ОДЗ, отже, при $a=0$ коренів немає.
2. Якщо $a\neq 0$, то рівняння (1) — квадратне. Його дискримінант $D=25-16a^2$. Розглянемо три випадки:
   1) $D=0$, тобто $25-16a^2=0$; $a=\pm\frac{5}{4}$. Тоді рівняння (1) має одне значення кореня
   $$x=\frac{5}{2a}.$$
      а) Якщо $a=\frac{5}{4}$, то корінь $x=2$ рівняння (1) входить до ОДЗ і є коренем заданого рівняння.
      б) Якщо $a=-\frac{5}{4}$, то корінь $x=-2$ рівняння (1) теж входить до ОДЗ і є коренем заданого рівняння.
   2) $D<0$, тобто $25-16a^2<0$, отже, $a<-\frac{5}{4}$ або $a>\frac{5}{4}$. Тоді рівняння (1) не має коренів.
   3) $D>0$, тобто $25-16a^2>0$, отже,
   $$-\frac{5}{4}<a<\frac{5}{4}, \text{ але } a\neq 0.$$

Тоді рівняння (1) має два корені:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16a^2}}{2a}. \qquad (2)$$

З'ясуємо, при яких значеннях a знайдені корені не входять до ОДЗ, тобто при яких значеннях a одержуємо $x=0$ і $x=a$.

Підставляючи в рівняння (1) $x=0$, одержуємо $a=0$, але при $a=0$ задане рівняння не має коренів.

Підставляючи в рівняння (1) $x=a$, одержуємо $a^3-5a+4a=0$, тобто $a^3-a=0$, $a(a^2-1)=0$. Тоді $a=0$ (задане рівняння не має коренів) або $a=\pm 1$.

При $a=1$ ОДЗ записується так: $x\neq 0$, $x\neq 1$. Із формули коренів (2) маємо $x_1=4$ (входить до ОДЗ) і $x_2=1$ (не входить до ОДЗ). Отже, при $a=1$ задане рівняння має тільки один корінь $x=4$.

При $a=-1$ ОДЗ записується так: $x\neq 0$, $x\neq -1$, а з формули коренів (2) отримаємо: $x_1=-4$ (входить до ОДЗ) і $x_2=-1$ (не входить до ОДЗ). Отже, при $a=-1$ задане рівняння має тільки один корінь $x=-4$.

Таким чином, формулу коренів (2) можна використовувати, якщо $-\frac{5}{4}<a<\frac{5}{4}$, тільки при $a\neq 0$ і $a\neq\pm 1$.

Відповідь: 1) якщо $a=\frac{5}{4}$, то $x=2$; 2) якщо $a=-\frac{5}{4}$, то $x=-2$; 3) якщо $a=1$, то $x=4$; 4) якщо $a=-1$, то $x=-4$; 5) якщо $a\in\left(-\frac{5}{4};-1\right)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup\left(1;\frac{5}{4}\right)$, то $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16a^2}}{2a}$; 6) якщо $a\in\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$ або $a=0$, то коренів немає. ◁

Зауваження. Щоб полегшити запис відповіді в цьому й аналогічних прикладах, можна користуватися таким способом. *Перш ніж записати відповіді, в складних або громіздких випадках зобразимо вісь параметра* (a) *і позначимо на ній усі особливі значення параметра, які з'явилися в процесі розв'язування. Під віссю параметра (лівіше від неї) випишемо всі одержані розв'язки (крім розв'язку «коренів немає») і напроти кожної відповіді позначимо значення параметра, при яких цю відповідь можна використовувати* (рис. 9.1.1). *Після цього відповідь записують для кожного з особливих значень параметра і для кожного з одержаних проміжків осі параметра.*

Зокрема, у розглянутому прикладі, перш ніж записати відповідь, зручно зобразити на чернетці таку схему (рис. 9.1.1).

1) $x=2$

2) $x=-2$

3) $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16a^2}}{2a}$

4) $x=4$

5) $x=-4$

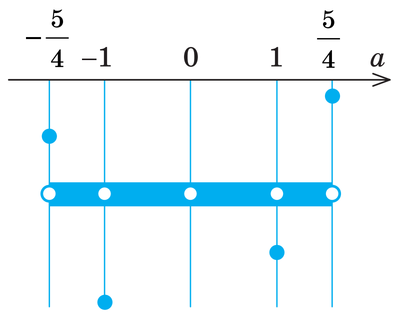


Рис. 9.1.1

9.2. Дослідницькі задачі з параметрами

Деякі дослідницькі задачі з параметрами вдається розв'язати за такою схемою: 1) *розв'язати задане рівняння чи нерівність*; 2) *дослідити одержаний розв'язок*.

Приклад 1

Знайдіть усі значення a, при яких рівняння $\frac{(x+a)(x-5a)}{x+7}=0$ має єдиний корінь.

Розв'язання*

▶ ОДЗ: $x\neq-7$. На ОДЗ одержуємо рівносильне рівняння $(x+a)(x-5a)=0$.

Тоді $x+a=0$ або $x-5a=0$.

Одержуємо $x=-a$ або $x=5a$.

Урахуємо ОДЗ. Для цього з'ясуємо, коли $x=-7$:

* Більш детальне розв'язання наведено в інтернет-підтримці підручника.

$-a=-7$ при $a=7$, $5a=-7$ при $a=-\frac{7}{5}$.

Тоді при $a=7$ одержуємо:

$x=-a=-7$ — сторонній корінь;

$x=5a=35$ — єдиний корінь.

При $a=-\frac{7}{5}$ одержуємо:

$x=5a=-7$ — сторонній корінь;

$x=-a=\frac{7}{5}$ — єдиний корінь.

Також задане рівняння матиме єдиний корінь, якщо $-a=5a$, тобто при $a=0$ (тоді $x=-a=0$ та $x=5a=0\neq-7$).

Відповідь: $a=7$, $a=-\frac{7}{5}$, $a=0$. ◁

Дослідження кількості розв'язків рівнянь та їх систем

Під час розв'язування деяких завдань із параметрами можна користуватися таким **орієнтиром**.

Якщо в завданні з параметрами йдеться про кількість розв'язків рівняння (нерівності або системи), то для аналізу заданої ситуації часто зручно використовувати графічну ілюстрацію розв'язування.

Достатньо простим є відповідне дослідження в тому випадку, коли задане рівняння можна подати у вигляді $f(x)=a$, оскільки графік функції $y=a$ — це пряма, паралельна осі Ox (яка перетинає вісь Oy в точці a). Зазначимо, що, замінюючи задане рівняння на рівняння $f(x)=a$, потрібно слідкувати за рівносильністю виконаних перетворень, щоб одержане рівняння мало ті самі корені, що й задане, а отже, і кількість коренів у них була однаковою. Для того щоб визначити, скільки коренів має рівняння $f(x)=a$, достатньо визначити, скільки точок перетину має графік функції $y=f(x)$ із прямою $y=a$ при різних значеннях параметра a. (Для цього на відповідному рисунку доцільно зобразити всі характерні положення прямої.)

Приклад 2

Скільки коренів має рівняння $\left|x^2-4|x|\right|=a$ залежно від значення параметра a?

Розв'язання

▶ Побудуємо графіки функцій $y=\left|x^2-4|x|\right|$ та $y=a$ (рис. 9.2.1). Аналізуючи взаємне розміщення одержаних графіків, отримуємо *відповідь*:

1) при $a<0$ рівняння коренів не має;
2) при $a=0$ рівняння має 3 корені;
3) при $a<0<4$ рівняння має 6 коренів;
4) при $a=4$ рівняння має 4 корені;
5) при $a>4$ рівняння має 2 корені.

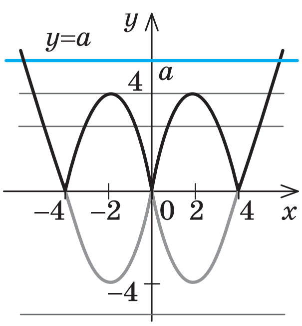


Рис. 9.2.1

◁

Коментар

Оскільки в цьому завданні мова йде про кількість розв'язків рівняння, то для аналізу заданої ситуації спробуємо використати графічну ілюстрацію розв'язування.

1. Будуємо графік функції $y=\left|x^2-4|x|\right|$ (ураховуючи, що $x^2=|x|^2$, побудова може відбуватися, наприклад, за такими етапами:
$x^2-4x \to |x|^2-4|x| \to \left|x^2-4|x|\right|$).
2. Будуємо графік функції $y=a$.
3. Аналізуємо взаємне розміщення одержаних графіків і записуємо відповідь (кількість коренів рівняння $f(x)=a$ дорівнює кількості точок перетину графіка функції $y=f(x)$ з прямою $y=a$).

Зазначимо, що значну кількість дослідницьких завдань не вдається розв'язати безпосередніми обчисленнями (або такі обчислення є дуже громіздкими). Тому часто доводиться спочатку обґрунтувати якусь властивість заданого рівняння або нерівності, а потім, користуючись цією властивістю, давати відповідь на запитання задачі.

Наприклад, беручи до уваги парність функцій, що входять до запису заданого рівняння, можна використовувати такий **орієнтир**.

Якщо в рівнянні $f(x)=0$ функція $f(x)$ є парною або непарною, то разом із будь-яким коренем α ми можемо вказати ще один корінь цього рівняння $(-\alpha)$.

Приклад 3

Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння має єдиний корінь.

$$x^4-a|x|^3+a^2-4=0 \qquad (1)$$

Розв'язання

Функція $f(x)=x^4-a|x|^3+a^2-4$ є парною ($D(f)=\boldsymbol{R}$, $f(-x)=f(x)$).

Якщо $x=\alpha$ — корінь рівняння (1), то $x=-\alpha$ теж є коренем цього рівняння. Тому єдиний корінь у заданого рівняння може бути тільки тоді, коли $\alpha=-\alpha$, тобто $\alpha=0$. Отже, єдиним коренем заданого рівняння може бути тільки $x=0$. Якщо $x=0$, то з рівняння (1) одержуємо $a^2-4=0$, тоді $a=2$ або $a=-2$.

При $a=2$ рівняння (1) перетворюється на рівняння $x^4-2|x|^3=0$. Тоді $|x|^4-2|x|^3=0$; $|x|^3\cdot(|x|-2)=0$. Одержуємо $|x|^3=0$ (тоді $|x|=0$, тобто $x=0$) або $|x|-2=0$ (тоді $|x|=2$, тобто $x=\pm 2$). Отже, при $a=2$ рівняння (1) має три корені, тобто умова задачі не виконується.

При $a=-2$ рівняння (1) перетворюється на рівняння $x^4+2|x|^3=0$. Тоді $|x|^4+2|x|^3=0$; $|x|^3\cdot(|x|+2)=0$. Оскільки $|x|+2\neq 0$, то одержуємо $|x|^3=0$. Тоді $|x|=0$, тобто $x=0$ — єдиний корінь. Отже, $a=-2$ задовольняє умову задачі.

Відповідь: $a=-2$. ◁

Коментар

Помічаємо, що в лівій частині заданого рівняння стоїть парна функція, і використовуємо орієнтир, наведений вище. Дійсно, якщо $x=\alpha$ — корінь рівняння $f(x)=0$, то $f(\alpha)=0$ — правильна числова рівність. Ураховуючи парність функції $f(x)$, маємо $f(-\alpha)=f(\alpha)=0$. Отже, $x=-\alpha$ — теж корінь рівняння $f(x)=0$. Єдиний корінь у цього рівняння може бути тільки тоді, коли корені α і $-\alpha$ збігаються. Тоді $x=\alpha=-\alpha=0$.

З'ясуємо, чи існують такі значення параметра a, при яких $x=0$ є коренем рівняння (1). (Це значення $a=2$ і $a=-2$.)

Оскільки значення $a=2$ і $a=-2$ ми одержали з умови, що $x=0$ — корінь рівняння (1), то необхідно перевірити, чи дійсно при цих значеннях a задане рівняння матиме єдиний корінь.

Під час розв'язування доцільно використати рівність $x^4=|x|^4$.

9.3. Використання умов розміщення коренів квадратного тричлена $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ відносно заданих чисел A і B

Розв'язування деяких дослідницьких задач із параметрами можна звести до використання необхідних і достатніх умов розміщення коренів квадратного тричлена.

З відповідними умовами та їх обґрунтуванням, прикладом їх застосування та додатковими прикладами розв'язування завдань з параметрами можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Вправи

У завданнях 9.1–9.3 розв'яжіть рівняння та нерівності зі змінною x.

9.1. 1) $5ax - a = ax + a$; 3) $ax + 7a \leqslant ax + 8a$;
2) $4 - ax = 2x + 7a$, 4) $2a - 6x > 2ax + 11$.

9.2. 1) $|x-2| + |x+1| = ax + 3$; 3) $|a - x| + |x + a + 1| = 1$.
2) $|x - a| + |x| = 2$;

9.3. 1) $ax + 1 = \dfrac{9a+3}{x}$; 2) $2ax - 1 = \dfrac{4a-1}{x-1}$; 3) $\dfrac{ax+1}{x+a} = \dfrac{2}{x}$.

9.4. Знайдіть усі значення a, при яких задане рівняння має єдиний корінь:
1) $\dfrac{(x-a)(x-2a)}{x-4} = 0$; 2) $\dfrac{(x+2a)(x-6a)}{x+12} = 0$.

9.5. Знайдіть усі значення a, при яких задане рівняння має єдиний корінь:
1) $x^8 + ax^6 + a^2 + 4a = 0$; 2) $x^4 + ax^2 + a^2 - a = 0$.

9.6. Для кожного значення параметра b знайдіть число коренів рівняння $2x^2 + 10x + |6x + 30| = b$.

9.7. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $|x^2 - 2ax| = 1$ має рівно три різних корені.

9.8. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $|x^2 + 2x + a| = 2$ має чотири різних корені.

9.9. Знайдіть найбільше значення параметра k, при якому обидва корені рівняння $x^2 + (2k+6)x + 4k + 12 = 0$ більші за -1.

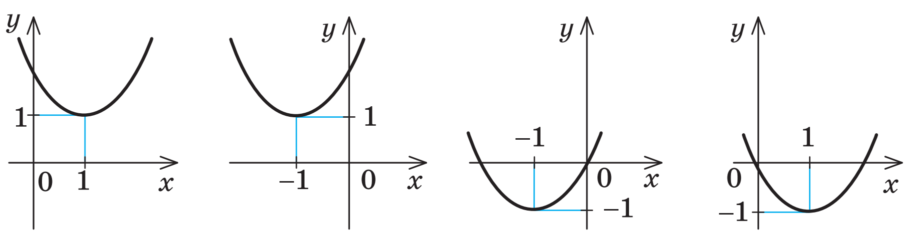
9.10. Знайдіть усі значення параметра m, для яких рівняння $(m-2)x^2 - 2(m+3)x + 4m = 0$ має один корінь більший за 3, а другий — менший від 2.

Додаткові завдання до теми «Функції, многочлени, рівняння і нерівності» наведено на сайті interactive.ranok.com.ua.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 1

1. Укажіть рисунок, на якому зображено графік функції $y = (x-1)^2 + 1$.



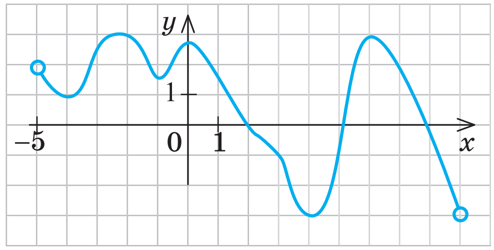
А Б В Г

2. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

А $(-\infty;+\infty)$ **В** $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$

Б $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ **Г** $(-1;1)$

3. Знайдіть область визначення функції, графік якої зображено на рисунку.



А $(-3;3)$ **В** $(-5;9)$

Б $[-3;3]$ **Г** $[-5;9]$

4. Знайдіть область значень функції, графік якої зображено на рисунку до завдання 3.

А $(-3;3)$ **Б** $[-3;3]$ **В** $(-5;9)$ **Г** $[-5;9]$

5. Знайдіть область значень функції, заданої формулою $f(x)=x^2+1$.

А $(-\infty;+\infty)$ **Б** $(-\infty;1]$ **В** $[1;+\infty)$ **Г** $[0;+\infty)$

6. Укажіть кількість коренів рівняння $(x^2-25)\sqrt{x-4}=0$.

А 0 **Б** 1 **В** 2 **Г** 3

7. Розв'яжіть нерівність $\dfrac{(1-x)(x+5)^2}{x-2}\geqslant 0$

А $(-\infty;-5]\cup[1;2)$ **В** $[1;2)\cup\{-5\}$

Б $[1;2)$ **Г** $(-\infty;-5]$

8. Розв'яжіть рівняння $\left||2x-3|-5\right|=4$ і знайдіть добуток всіх його коренів.

А 6 **Б** 12 **В** –18 **Г** –36

9. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{x^3-8}{|x-2|}$ (запишіть розв'язання).

10. Розв'яжіть нерівність $\dfrac{2x-a}{x-1}>4$ залежно від значень параметра a (запишіть розв'язання).

Пройдіть онлайн-тестування на сайті InteractIve.ranok.com.ua.

Теми навчальних проектів

1. Функції навколо нас (див. інтернет-підтримку підручника).
2. Діофант і його рівняння.
3. Метод областей.
4. Побудова ліній у полярній системі координат.

Про становлення алгебри як науки та відкриття видатних математиків можна дізнатися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Розділ 2

СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- дізнаєтеся про корінь n-го степеня та його властивості;
- ознайомитеся зі степеневою функцією та її властивостями;
- навчитеся розв'язувати ірраціональні рівняння та нерівності

§ 10 КОРІНЬ n-ГО СТЕПЕНЯ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. ФУНКЦІЯ $y=\sqrt[n]{x}$ ТА ЇЇ ГРАФІК

Таблиця 11

1. Означення

Квадратний корінь	Корінь n-го степеня
Квадратним коренем із числа a **називається таке число *b*, квадрат якого дорівнює *a*.** Якщо $a=b^2$, то b — квадратний корінь із числа a.	***Коренем n-го степеня з числа a*** **називається таке число *b*, *n*-й степінь якого дорівнює *a*.** Якщо $a=b^n$ $(n\in N,\ n\neq 1)$, то b — корінь n-го степеня з числа a.

Арифметичний корінь — невід'ємне значення кореня.

При $a\geqslant 0$ позначення арифметичного кореня такі: $\sqrt{a}$, $\sqrt[n]{a}$.

$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2=a}$	$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a}$

2. Область допустимих значень (ОДЗ)

Квадратний корінь	Корінь n-го степеня
$\sqrt{a}$ існує тільки при $a\geqslant 0$	$\sqrt[2k]{a}$ існує тільки при $a\geqslant 0$ $(n=2k,\ k\in N)$; $\sqrt[2k+1]{a}$ існує при будь-яких значеннях a $(n=2k+1,\ k\in N)$

Запис розв'язків рівняння $x^n=a$ $(n\in N)$

$n=2k+1$ — непарне $(k\in N)$	$n=2k$ — парне $(k\in N)$	
При будь-яких значеннях a рівняння $x^{2k+1}=a$ має єдиний корінь $x=\sqrt[2k+1]{a}$	При $a<0$ рівняння $x^{2k}=a$ не має коренів	При $a\geqslant 0$ усі корені рівняння $x^{2k}=a$ можна записати так: $x=\pm\sqrt[2k]{a}$

Приклади

Рівняння $x^5=3$ має єдиний корінь $x=\sqrt[5]{3}$	Рівняння $x^8=-7$ не має коренів	Рівняння $x^8=7$ має корені $x=\pm\sqrt[8]{7}$

3. Властивості кореня n-го степеня

$n=2k+1$ — непарне число	$n=2k$ — парне число
1) $\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}$	
2) $\boxed{\sqrt[n]{a^n}=\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a}$	$\boxed{\sqrt[n]{a^n}=\sqrt[2k]{a^{2k}}=\lvert a\rvert}$

Для довільних значень n і k $(n\in N,\ n\neq 1,\ k\in N)$

3) При $a\geqslant 0$ $\quad\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}}$

4) При $a\geqslant 0$ $\quad\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}}$

5) При $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ $\quad\boxed{\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$

Наслідки

При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}}$ — *винесення множника з-під знака кореня.*

При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\boxed{a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}}$ — *внесення множника під знак кореня.*

6) При $a \geqslant 0$, $b > 0$ $\boxed{\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$

7) При $a \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}}$ — основна властивість кореня.

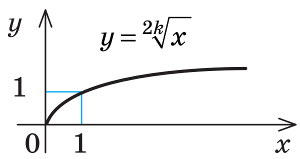
Значення кореня зі степеня невід'ємного числа не зміниться, якщо показник кореня і показник степеня підкореневого виразу помножити (або поділити) на одне й те саме натуральне число.

8) При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\boxed{\text{якщо } a > b, \text{ то } \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}}$

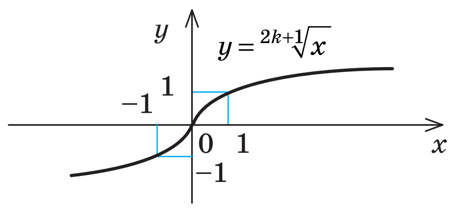
4. Функція $y=\sqrt[n]{x}$ та її графік

Графік функції $y=\sqrt[n]{x}$ ($n \in N$, $n \geqslant 2$)

n — парне ($n=2k$, $k \in N$)



n — непарне ($n=2k+1$, $k \in N$)



Властивості функції $y=\sqrt[n]{x}$

n — парне ($n=2k$, $n \in N$)

1. *Область визначення*: $x \geqslant 0$, тобто $D\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0; +\infty)$.
2. *Область значень*: $y \geqslant 0$, тобто $E\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0; +\infty)$.
3. *Найбільшого значення функція* $y=\sqrt[2k]{x}$ *не має; найменше значення* — $y=0$ (при $x=0$).
4. *Функція ні парна, ні непарна.*

n — непарне ($n=2k+1$, $n \in N$)

1. *Область визначення*: $x \in \boldsymbol{R}$ (x — будь-яке дійсне число), тобто $D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=\boldsymbol{R}$.
2. *Область значень*: $y \in \boldsymbol{R}$ (y — будь-яке дійсне число), тобто $E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=\boldsymbol{R}$.
3. Найбільшого і найменшого значень функція $y=\sqrt[2k+1]{x}$ не має.
4. *Функція* **непарна**: $\sqrt[2k+1]{-x}=-\sqrt[2k+1]{x}$, *отже, графік функції симетричний відносно початку координат.*

5. *Точки перетину з осями координат*: Oy $\begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases}$ Ox $\begin{cases} y=0, \\ x=0. \end{cases}$ тобто ***графік проходить через початок координат.***

6. *Проміжки зростання і спадання: на всій області визначення функція зростає.*

n — парне:

7. *Проміжки знакосталості*:
при $x>0$ значення $y>0$.

n — непарне:

7. *Проміжки знакосталості*:
при $x>0$ значення $y>0$,
при $x<0$ значення $y<0$.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Означення кореня *n*-го степеня

Поняття кореня квадратного з числа a вам відомо: це таке число, квадрат якого дорівнює a. Аналогічно означають і корінь n-го степеня з числа a, де n — довільне натуральне число, більше за 1.

Означення. ***Коренем n-го степеня з числа a* називається таке число, *n*-й степінь якого дорівнює *a*.**

Наприклад, корінь третього степеня з числа 27 дорівнює 3, оскільки $3^3 = 27$; корінь третього степеня з числа -27 дорівнює -3, оскільки $(-3)^3 = -27$. Числа 2 і -2 є коренями четвертого степеня з 16, оскільки $2^4 = 16$ і $(-2)^4 = 16$.

При $n = 2$ та $n = 3$ корені n-го степеня називають також відповідно *квадратним* та *кубічним коренями*.

Як і для квадратного кореня, для кореня n-го степеня вводять поняття арифметичного кореня.

Означення. ***Арифметичним коренем n-го степеня з числа a* називається невід'ємне число, *n*-й степінь якого дорівнює *a*.**

При $a \geqslant 0$ для арифметичного значення кореня n-го степеня з числа a існує спеціальне позначення* $\sqrt[n]{a}$; число n називають *показником кореня*, а саме число a — *підкореневим виразом*. Знак $\sqrt[n]{\ }$ і вираз $\sqrt[n]{a}$ називають також *радикалом*.

Наприклад, те, що корінь третього степеня з числа 27 дорівнює 3, записують так: $\sqrt[3]{27} = 3$; те, що корінь четвертого степеня з 16 дорівнює 2, записують так: $\sqrt[4]{16} = 2$. Але для запису того, що корінь четвертого степеня з 16 дорівнює -2, позначення немає.

При $a < 0$ значення кореня n-го степеня з числа a існує тільки при непарних значеннях n (оскільки не існує такого дійсного числа, парний степінь якого буде від'ємним числом). У цьому випадку корінь непарного степеня n із числа a також позначають $\sqrt[n]{a}$. Наприклад, те, що корінь третього степеня з числа -27 дорівнює -3, записують так: $\sqrt[3]{-27} = -3$. Оскільки -3 — від'ємне число, то $\sqrt[3]{-27}$ не є арифметичним значенням кореня. Але корінь непарного степеня з від'ємного числа можна виразити через арифметичне значення кореня за допомогою формули $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$.

● Щоб довести наведену формулу, зауважимо, що за означенням кореня n-го степеня ця рівність буде правильною, якщо $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$. Дійсно,

$\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = (-1)^{2k+1} \cdot \left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$, а це й означає, що $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$. ○

Наприклад, $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$;

$\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$.

Зазначимо також, що ***значення*** $\sqrt[2k+1]{a}$ ***має той самий знак, що й число a***, оскільки при піднесенні до непарного степеня знак числа не змінюється.

Також за означенням кореня n-го степеня можна записати, що в тому випадку, коли існує значення $\sqrt[n]{a}$, виконується рівність $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ і, зокрема, при $a \geqslant 0$ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

2 Область допустимих значень виразів із коренями *n*-го степеня. Розв'язки рівняння $x^n = a$ $(n \in N)$

Відповідний матеріал див. в п. 2 табл. 11, а обґрунтування — в інтернет-підтримці підручника.

* Усі властивості виразів виду $\sqrt[n]{a}$ наведено для випадку $n \in N$, $n \geqslant 2$. При $n = 1$ домовилися вважати, що $\sqrt[n]{a} = \sqrt[1]{a} = a$.

3 Властивості кореня n-го степеня

Зазначені властивості можна обґрунтувати, спираючись на означення кореня n-го степеня.

1) Формула $\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}$ була обґрунтована в п. 1 пояснень.

● Нагадаємо, що за означенням кореня n-го степеня для доведення рівності $\sqrt[n]{A}=B$ (при $A\geqslant 0$, $B\geqslant 0$) достатньо перевірити рівність $B^n=A$.

2) Вираз $\sqrt[n]{a^n}$ розглянемо окремо при $n=2k+1$ (непарне) і при $n=2k$ (парне).

Якщо n — *непарне*, то враховуємо те, що вираз $\sqrt[n]{a^n}$ існує при будь-яких значеннях a і що знак $\sqrt[n]{a^n}=\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}$ збігається зі знаком a: $\sqrt[n]{a^n}=\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$.

Якщо n — *парне*, то враховуємо те, що вираз $\sqrt[n]{a^n}=\sqrt[2k]{a^{2k}}$ позначає арифметичне значення кореня n-го степеня (отже, $\sqrt[2k]{a^{2k}}\geqslant 0$) і що $|a|^{2k}=a^{2k}$. Тоді

$$\sqrt[n]{a^n}=\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|.$$

3) Формулу $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ при $a\geqslant 0$ обґрунтуємо, розглядаючи її справа наліво. Оскільки $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk}=\left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k=\left(\sqrt[k]{a}\right)^k=a$, то за означенням $\sqrt[nk]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$.

4) Справедливість формули $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$ при $a\geqslant 0$ випливає з рівності $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{kn}=\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k=a^k$.

5) Для обґрунтування формули $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ використовуємо рівність $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$.

6) Для обґрунтування формули $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ при $a\geqslant 0$, $b>0$ використовуємо рівність $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}=\frac{a}{b}$.

7) Властивість кореня $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$ при $a\geqslant 0$ випливає з рівності

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk}=\left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k=\left(a^m\right)^k=a^{mk}. \quad ○$$

Наприклад, $\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$ (показник кореня і показник степеня підкореневого виразу поділили на натуральне число 3).

Із формули $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$ можна одержати важливі наслідки.

При $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ $\sqrt[n]{a^n b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=a\sqrt[n]{b}$. Розглядаючи одержану формулу зліва направо, маємо *формулу винесення невід'ємного множника з-під знака кореня*: $\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}$, а справа наліво — *формулу внесення невід'ємного множника під знак кореня*: $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$.

Наприклад, $\sqrt[5]{96}=\sqrt[5]{32\cdot 3}=\sqrt[5]{2^5\cdot 3}=2\sqrt[5]{3}$.

8) Зазначимо ще одну властивість коренів n-го степеня: для будь-яких невід'ємних чисел a і b

якщо $a>b$, *то* $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

● Доведемо це методом від супротивного. Припустимо, що $\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{b}$. Тоді при піднесенні обох частин останньої нерівності з невід'ємними членами до n-го степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо правильну нерівність $a\leqslant b$. Це суперечить умові $a>b$. Отже, наше припущення неправильне і $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$. ○

Узагальнення властивостей кореня n-го степеня

Основна частина формул, які виражають властивості коренів n-го степеня, обґрунтована для невід'ємних значень підкореневих виразів. Але інколи доводиться виконувати перетворення виразів із коренями n-го степеня і в тому випадку, коли таких обмежень немає, наприклад добувати корінь квадратний (або в загальному випадку корінь парного степеня) з добутку ab від'ємних чисел ($a<0$, $b<0$). Тоді $ab>0$ і $\sqrt[2k]{ab}$ існує, проте формулою

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad (1)$$

скористатися не можна: вона обґрунтована тільки для невід'ємних значень a і b. Але у випадку $ab>0$ маємо: $ab=|ab|=|a|\cdot|b|$ і тепер $|a|>0$ та $|b|>0$. Отже, для добування кореня з добутку можна використати формулу (1).

Тоді при $a<0$, $b<0$ можемо записати:

$$\sqrt[2k]{ab}=\sqrt[2k]{|a|\cdot|b|}=\sqrt[2k]{|a|}\cdot\sqrt[2k]{|b|}.$$

Зазначимо, що одержана формула справедлива і при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, оскільки в цьому випадку $|a|=a$ і $|b|=b$. Отже, при $ab\geqslant 0$ $\sqrt[2k]{ab}=\sqrt[2k]{|a|}\cdot\sqrt[2k]{|b|}$.

Аналогічно можна узагальнити властивість 6. При $\frac{a}{b}\geqslant 0$ $\sqrt[2k]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[2k]{|a|}}{\sqrt[2k]{|b|}}$.

Слід зазначити, що в тих випадках, коли обґрунтування основних формул можна повторити і для від'ємних значень a і b, такими формулами можна користуватися для будь-яких a і b (з ОДЗ лівої частини формули).

Наприклад, для коренів непарного степеня *для будь-яких значень* a і b

$$\sqrt[2k+1]{ab}=\sqrt[2k+1]{a}\cdot\sqrt[2k+1]{b}. \qquad (2)$$

Дійсно, ліва і права частини цієї формули існують при будь-яких значеннях a та b і виконується рівність

$$\left(\sqrt[2k+1]{a}\cdot\sqrt[2k+1]{b}\right)^{2k+1}=$$
$$=\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}\left(\sqrt[2k+1]{b}\right)^{2k+1}=ab,$$

тоді за означенням кореня $(2k+1)$-го степеня виконується і рівність (2).

Наприклад, $\sqrt[3]{a^{15}b}=\sqrt[3]{a^{15}}\cdot\sqrt[3]{b}=a^5\sqrt[3]{b}$ при будь-яких значеннях a і b.

Але деякими формулами не вдається скористатися для довільних значень a і b. Наприклад, якщо ми за основною властивістю кореня запишемо, що $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{a}$ (показник кореня і показник степеня підкореневого виразу поділили на натуральне число 2), то одержана рівність не буде тотожністю, оскільки при $a=-1$ (ліва і права частини цієї рівності означені при всіх значеннях a) отримаємо $\sqrt[6]{(-1)^2}=\sqrt[3]{-1}$, тобто $1=-1$ — неправильну рівність.

Отже, при діленні показника кореня і показника степеня підкореневого виразу на парне натуральне число потрібно узагальнити основну властивість кореня. Для цього достатньо помітити, що $a^2=|a|^2$, і тепер основа степеня підкореневого виразу $|a|\geqslant 0$, а отже, можна використати основну формулу (властивість 7):

$$\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[6]{|a|^2}=\sqrt[3]{|a|}.$$

У загальному випадку, *якщо при використанні основної властивості кореня доводиться ділити показник кореня і показник степеня підкореневого виразу на парне натуральне число, то в результаті основу степеня підкореневого виразу потрібно брати за модулем*, тобто

$$\sqrt[2kn]{a^{2km}}=\sqrt[n]{|a|^m}.$$

Аналогічно можна обґрунтувати й інші приклади використання основних властивостей коренів при довільних значеннях a і b (з ОДЗ лівої частини формули), які наведено в табл. 12.

Отже, якщо за умовою завдання на перетворення виразів із коренями n-го степеня (ірраціональних виразів) відомо, що всі змінні (які входять до запису заданого виразу) набувають невід'ємних значень, то для перетворення цього виразу можна користуватися основними формулами, а якщо такої умови немає, то необхідно аналізувати ОДЗ заданого виразу і тільки після цього вирішувати, якими формулами користуватися — основними чи узагальненими (див. приклад 5 до цього параграфа).

З обґрунтуванням властивостей функції $y=\sqrt[n]{x}$ ($n\in N$, $n\geqslant 2$) та її графіка, наведених у табл. 11, можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Таблиця 12

Основні формули для кореня n-го степеня (тільки для невід'ємних значень a і b, тобто $\begin{cases} a\geqslant 0, \\ b\geqslant 0\end{cases}$)	Чи можна користуватися основними формулами для будь-яких a і b з ОДЗ лівої частини формули (якщо ні — дано узагальнену формулу): корінь непарного степеня	корінь парного степеня
1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$	можна	тільки для невід'ємних a
2. $\sqrt[n]{a^n}=a$	можна	$\sqrt[2k]{a^{2k}}=\lvert a\rvert$
3. Корінь із кореня $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$	можна	можна
4. Корінь із добутку $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	можна	$\sqrt[2k]{ab}=\sqrt[2k]{\lvert a\rvert}\sqrt[2k]{\lvert b\rvert}$
і добуток коренів $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$	можна	можна
5. Корінь із частки ($b\neq 0$) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	можна	$\sqrt[2k]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[2k]{\lvert a\rvert}}{\sqrt[2k]{\lvert b\rvert}}$
і частка коренів $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	можна	можна
6. Основна властивість кореня: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$	можна, якщо всі корені непарного степеня (тобто перехід непарний → непарний)	Перехід парний → парний можна
		Перехід непарний → парний $\sqrt[n]{a^m}=\begin{cases}\sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a^m\geqslant 0, \\ -\sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a^m<0\end{cases}$
і навпаки $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$		$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{\lvert a^m\rvert}$
7. Винесення множника з-під знака кореня $\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}$	можна	$\sqrt[n]{a^n b}=\lvert a\rvert\sqrt[n]{b}$
8. Внесення множника під знак кореня $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$	можна	$a\sqrt[n]{b}=\begin{cases}\sqrt[n]{a^n b} \text{ при } a\geqslant 0, \\ -\sqrt[n]{a^n b} \text{ при } a<0,\end{cases}$ де $b\geqslant 0$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{625}$; 2) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{27}}$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ $\sqrt[4]{625}=5$, оскільки $5^4=625$. ◁ 2) ▶ $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{27}}=-\dfrac{1}{3}$, оскільки $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3=-\dfrac{1}{27}$. ◁	Використаємо означення кореня n-го степеня. Запис $\sqrt[n]{a}=b$ означає, що $b^n=a$.

Приклад 2

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{27\cdot 125}$; 2) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$.

Коментар

Використаємо властивості кореня n-го степеня і врахуємо, що кожну формулу, яка виражає ці властивості, можна застосувати як зліва направо, так і справа наліво. Наприклад, для розв'язування завдання 1 скористаємося формулою $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, а для розв'язування завдання 2 — цією самою формулою, але записаною справа наліво, тобто: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ (при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$).

Розв'язання

▶ 1) $\sqrt[3]{27\cdot 125}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{125}=3\cdot 5=15$; 2) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\cdot 8}=\sqrt[4]{16}=2$. ◁

Приклад 3

Порівняйте числа:

1) $\sqrt[4]{50}$ і $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[3]{3}$.

Розв'язання

1) ▶ $\sqrt{7}=\sqrt[4]{7^2}=\sqrt[4]{49}$. Оскільки $50>49$, то $\sqrt[4]{50}>\sqrt[4]{49}$, тобто $\sqrt[4]{50}>\sqrt{7}$; ◁

2) ▶ $\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{27}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$. Оскільки $27<81$, то $\sqrt[12]{27}<\sqrt[12]{81}$, тобто $\sqrt[4]{3}<\sqrt[3]{3}$. ◁

Коментар

Для порівняння заданих чисел у кожному завданні достатньо привести всі корені до одного показника кореня й урахувати, що *для будь-яких невід'ємних чисел a і b, якщо* $a>b$, то $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

Приклад 4

Подайте вираз у вигляді дробу, знаменник якого не містить кореня n-го степеня:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}$; 2) $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$; 3*) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}$.

Коментар

У завданні 1 урахуємо, що $\sqrt[5]{3^5}=3$, отже, після множення чисельника і знаменника заданого дробу на $\sqrt[5]{3^4}$ знаменник можна буде записати без знака радикала.

У завданні 2 достатньо чисельник і знаменник заданого дробу домножити на різницю $\sqrt{5}-1\neq 0$ (щоб одержати в знаменнику формулу різниці квадратів).

Але виконання аналогічного перетворення в завданні 3 пов'язане з певними проблемами. ОДЗ виразу $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}$ є $a\geqslant 0$ (і всі тотожні перетворення потрібно виконувати для всіх значень $a\geqslant 0$). Ми хочемо домножити чисельник і знаменник заданого дробу на вираз $\sqrt{a}-1$. За основною властивістю дробу це можна зробити тільки для випадку, коли $\sqrt{a}-1\neq 0$, тобто тільки при $a\neq 1$. Але $a=1$ входить до ОДЗ початкового виразу, і тому вибраний нами спосіб розв'язування приведе до звуження ОДЗ початкового виразу. Дійсно, якщо записати, що $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}=\dfrac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}=\dfrac{\sqrt{a}-1}{a-1}$, то ця рівність не буде тотожністю, оскільки не виконується для $a=1$ з ОДЗ початкового виразу. У цьому разі, щоб не припуститися помилок, можна користуватися таким **орієнтиром**.

Якщо для тотожних перетворень (або для розв'язування рівнянь і нерівностей) доводиться використовувати перетворення (або формули), які приводять до звуження ОДЗ початкового виразу, то значення, на які звужується ОДЗ заданого виразу, слід розглянути окремо.

Розв'язання

1) ▶ $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}=\dfrac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{3^4}}=\dfrac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}}=\dfrac{\sqrt[5]{3^4}}{3}$. ◁

2) ▶ $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{4\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}=\dfrac{4\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2}=\dfrac{4\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}=\sqrt{5}-1$. ◁

3) ▶ Позначимо $A=\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}$. Тоді при $a=1$ одержуємо $A=\dfrac{1}{\sqrt{1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

При $a\neq 1$ $(a\geqslant 0)$ маємо $A=\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}=\dfrac{\sqrt{a}-1}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}=\dfrac{\sqrt{a}-1}{a-1}$.

Отже, при $a=1$ $A=\dfrac{1}{2}$, при $a\neq 1$ $(a\geqslant 0)$ $A=\dfrac{\sqrt{a}-1}{a-1}$. ◁

Приклад 5* Спростіть вираз $\sqrt{a^4\cdot\sqrt[3]{a^2}}$.

Коментар

В умові не вказано, що значення a невід'ємні, тому маємо спочатку визначити ОДЗ заданого виразу.

Заданий вираз існує при будь-яких значеннях a (ОДЗ: будь-яке $a\in \boldsymbol{R}$), і його перетворення потрібно виконати на всій ОДЗ.

Можливими є декілька шляхів перетворення заданого виразу, наприклад:

1) спочатку розглянути корінь квадратний із добутку, а потім скористатися формулою кореня з кореня і основною властивістю кореня;

2) внести вираз a^4 під знак кубічного кореня, а потім теж використати формулу кореня з кореня і основну властивість кореня.

На кожному з цих шляхів ураховуємо, що при будь-яких значеннях a значення $a^2\geqslant 0$ і $a^4\geqslant 0$ (отже, для цих виразів можна скористатися основними формулами). Використовуючи основну властивість кореня, доводиться ділити показник кореня і показник степеня підкореневого виразу на парне натуральне число 2. Тому в результаті основу степеня підкореневого виразу потрібно брати за модулем (оскільки $a\in \boldsymbol{R}$).

Розв'язання

I спосіб

▶ $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt{a^4}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}=a^2\cdot\sqrt[6]{a^2}=a^2\cdot\sqrt[6]{|a|^2}=a^2\cdot\sqrt[3]{|a|}$. ◁

II спосіб

▶ $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt{\sqrt[3]{a^{12}\cdot a^2}}=\sqrt[6]{a^{14}}=\sqrt[6]{|a|^{14}}=\sqrt[3]{|a|^7}=\sqrt[3]{|a|^6\cdot|a|}=$
$=\sqrt[3]{|a|^6}\cdot\sqrt[3]{|a|}=|a|^2\cdot\sqrt[3]{|a|}=a^2\cdot\sqrt[3]{|a|}$. ◁

? Який із запропонованих способів, на вашу думку, доцільніше використовувати для перетворення заданого виразу?

Запитання

1. Дайте означення кореня і арифметичного кореня n-го степеня з числа a. Наведіть приклади.
2. Запишіть і доведіть властивості кореня n-го степеня для невід'ємних значень підкореневих виразів.
3*. Якими властивостями кореня n-го степеня можна користуватися при довільних значеннях змінних (з ОДЗ лівої частини відповідної формули)? Наведіть приклади використання основних формул та їх узагальнень.
4. Запишіть усі розв'язки рівняння:
1) $x^{2k+1}=a \quad (k\in N)$;
2) $x^{2k}=a \quad (k\in N)$: а) при $a>0$; б) при $a<0$; в) при $a=0$.
Наведіть приклади таких рівнянь і розв'яжіть їх.
5. Побудуйте графік функції $y=\sqrt[n]{x}$, де $n\in N$, для парних і непарних значень n. Сформулюйте та обґрунтуйте її властивості.

Вправи

10.1. Перевірте правильність рівності:
1°) $\sqrt[3]{64}=4$; 3) $\sqrt[10]{1024}=2$; 5°) $\sqrt[5]{-32}=-2$;
2°) $\sqrt[9]{-1}=-1$; 4°) $\sqrt[25]{0}=0$; 6°) $\sqrt[13]{1}=1$.

10.2°. Обчисліть:
1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$; 3) $\sqrt[13]{-1}$; 4) $\sqrt[5]{32}$; 5) $\sqrt[3]{125}$; 6) $\sqrt[4]{81}$.

У завданнях 10.3–10.7 знайдіть значення виразу.

10.3. 1)° $\sqrt[3]{8\cdot 1000}$; 2°) $\sqrt[4]{16\cdot 625}$; 3) $\sqrt[3]{24\cdot 9}$; 4) $\sqrt[5]{48\cdot 81}$.

10.4. 1) $\sqrt[5]{9}\cdot\sqrt[5]{27}$; 2) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}$; 3) $\sqrt[7]{8}\cdot\sqrt[7]{-16}$; 4) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{125}$.

10.5. 1) $\dfrac{\sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{2}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{-5}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[6]{1024}}{\sqrt[6]{16}}$.

10.6°. 1) $\sqrt[3]{7^3\cdot 11^3}$; 2) $\sqrt[6]{2^6\cdot 3^6}$; 3) $\sqrt[7]{3^7\cdot 5^7}$; 4) $\sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\cdot 10^5}$.

10.7°. 1) $\sqrt[5]{2^{10}\cdot 3^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{5^6\cdot 2^9}$; 3) $\sqrt[4]{(0,1)^4\cdot 3^8}$; 4) $\sqrt[10]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{30}\cdot 6^{20}}$.

10.8. Порівняйте числа:
1°) $\sqrt[9]{0,1}$ і 0; 2°) $\sqrt[11]{1,3}$ і 1; 3) $\sqrt[4]{23}$ і $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt[5]{4}$ і $\sqrt[3]{3}$.

10.9°. Визначте, при яких x має зміст вираз:
1) $\sqrt[5]{5x+1}$; 2) $\sqrt[4]{2x-6}$; 3) $\sqrt[6]{x+2}$; 4) $\sqrt[8]{\dfrac{5}{x}}$.

10.10. Подайте вираз у вигляді дробу, знаменник якого не містить кореня n-го степеня:
1) $\dfrac{3}{\sqrt[7]{2}}$; 2) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-1}$; 3*) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+3}$; 4*) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$.

10.11. Винесіть множник з-під знака кореня ($a>0,\ b>0$):

1) $\sqrt[5]{a^{11}b^7}$; 2) $\sqrt[4]{a^7b^{13}}$; 3) $\sqrt[3]{-27a^5b^{14}}$; 4) $\sqrt[6]{128a^9b^{17}}$.

10.12. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{a^4b^{14}}$; 2) $\sqrt[7]{a^9b^8}$; 3) $\sqrt[6]{64a^{12}b^7}$; 4) $\sqrt[8]{a^{17}b^9}$.

10.13. Внесіть множник під знак кореня ($a>0,\ b>0$):

1) $a\sqrt[3]{7}$; 2) $-b\sqrt[4]{ab}$; 3) $ab\sqrt[7]{5}$; 4) $ab^2\sqrt[6]{\dfrac{a}{b^{11}}}$.

10.14. Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt[4]{7}$; 2) $a^3\sqrt[7]{ab}$; 3) $ab\sqrt[6]{\dfrac{2b}{a^5}}$; 4) $-b\sqrt[8]{-3b^3}$.

10.15. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[8]{a^8}$ при $a<0$; 3) $\sqrt[4]{a^4}-\sqrt[3]{a^3}$ при $a>0$;

2) $\sqrt[5]{a^5}$ при $a<0$; 4) $\sqrt[7]{a^7}+\sqrt[6]{a^6}$ при $a<0$.

10.16*. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{2ab^3}\cdot\sqrt[4]{16a^3b^5}$; 3) $\sqrt[8]{a^6\sqrt[5]{a^4}}$;

2) $\sqrt[6]{ab^3c}\cdot\sqrt[6]{a^5b^4c}\cdot\sqrt[6]{b^5c^4}$; 4) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{3a\sqrt[5]{2a^2}}}$.

10.17. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}$; 3*) $\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-2\sqrt[6]{ab^5}+b}{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt{ab}}$, де $a>0,\ b>0,\ a\neq b$;

2) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$; 4*) $\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{xy}}{\sqrt[3]{y}-\sqrt[6]{xy}}$.

10.18°. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3=7$; 3) $x^5=-5$; 5) $x^4=16$;

2) $x^6=3$; 4) $x^8=-13$; 6) $x^3=-64$.

10.19. Побудуйте графік функції:

1°) $y=\sqrt[4]{x}$; 3°) $y=\sqrt[7]{x}$; 5) $y=\sqrt[3]{|x|}$; 7) $y=\sqrt[4]{-x}$.

2°) $y=\sqrt[5]{x}$; 4°) $y=\sqrt[6]{x}$; 6) $y=-\sqrt[3]{x}$.

10.20. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt[3]{x}=2-x$; 2) $\sqrt{x}=6-x$; 3) $\sqrt[3]{x-2}=4-x$; 4) $\sqrt{-x}=x+2$.

Перевірте підстановкою, що значення x є коренем рівняння.

10.21. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 10.20, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

Виявіть свою компетентність

10.22. Перевірте правильність виконання завдання 10.20, побудувавши відповідні графіки за допомогою комп'ютерних програм.

§ 11 ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Таблиця 13

Поняття ірраціонального рівняння

Рівняння, у яких змінна міститься під знаком кореня, називають *ірраціональними*. Для того щоб розв'язати задане ірраціональне рівняння, його найчастіше зводять до раціонального рівняння за допомогою деяких перетворень.

Розв'язування ірраціональних рівнянь

1. За допомогою піднесення обох частин рівняння до одного степеня

При піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня одержуємо рівняння, рівносильне заданому (на його ОДЗ)

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримуємо рівняння-наслідки, і можуть з'явитися сторонні корені, які відсіюють перевіркою

Приклад 1

Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-1}=2$.

▶ $\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3=2^3$; $x-1=8$; $x=9$.

Відповідь: 9. ◁

Приклад 2

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+3}=x$.

▶ $\left(\sqrt{2x+3}\right)^2=x^2$; $x^2-2x-3=0$; $x_1=-1$, $x_2=3$.

Перевірка. При $x=-1$ маємо: $\sqrt{1}=-1$ — неправильна рівність, отже, $x=-1$ — сторонній корінь.

При $x=3$ маємо: $\sqrt{9}=3$ — правильна рівність, отже, $x=3$ — корінь заданого рівняння.

Відповідь: 3. ◁

2. За допомогою заміни змінних

Якщо до рівняння змінна входить в одному й тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною)

Приклад 3

Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}=2$.

▶ Позначимо $\sqrt[3]{x}=t$. Тоді $\sqrt[3]{x^2}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2=t^2$.

Одержуємо рівняння: $t^2+t=2$; $t^2+t-2=0$; $t_1=1$, $t_2=-2$.

Виконуємо обернену заміну: $\sqrt[3]{x}=1$, тоді $x=1$ або $\sqrt[3]{x}=-2$, звідси $x=-8$.

Відповідь: 1; –8. ◁

3. Використання теореми про рівносильність

$$\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geqslant 0,\\ f(x)=g^{2n}(x)\end{cases}$$

Якщо обидві частини рівняння невід'ємні, то при піднесенні обох частин рівняння до парного степеня одержуємо рівняння, рівносильне заданому, за умови урахування його ОДЗ (див. приклад 3 до цього параграфа).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1}=4$.

Розв'язання	Коментар
▶ $\sqrt{5x-1}=4-\sqrt{x+3}$; $\left(\sqrt{5x-1}\right)^2=\left(4-\sqrt{x+3}\right)^2$; $5x-1=16-8\sqrt{x+3}+x+3$; $8\sqrt{x+3}=20-4x$; $2\sqrt{x+3}=5-x$; $\left(2\sqrt{x+3}\right)^2=(5-x)^2$; $4(x+3)=25-10x+x^2$; $x^2-14x+13=0$; $x_1=1$, $x_2=13$. Перевірка. $x=1$ — корінь ($\sqrt{4}+\sqrt{4}=4$, $4=4$); $x=13$ — сторонній корінь ($\sqrt{16}+\sqrt{64}\neq 4$). *Відповідь*: 1. ◁	Ізолюємо один корінь і піднесемо обидві частини рівняння до квадрата — у такий спосіб ми позбудемося одного кореня. Потім знову ізолюємо корінь і знову піднесемо обидві частини рівняння до квадрата — унаслідок одержимо квадратне рівняння. Оскільки при піднесенні до квадрата можна одержати сторонні корені, то в кінці виконаємо перевірку отриманих розв'язків.

Приклад 2* Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$.

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай $\begin{cases}\sqrt[3]{x-2}=u,\\ \sqrt{x+1}=v.\end{cases}$ Тоді $\begin{cases}x-2=u^3,\\ x+1=v^2.\end{cases}$ Одержуємо систему рівнянь $\begin{cases}u+v=3,\\ u^3-v^2=-3.\end{cases}$ Із першого рівняння знаходимо $v=3-u$ і підставляємо в друге рівняння: $u^3-(3-u)^2=-3$; $u^3-\left(9-6u+u^2\right)=-3$; $u^3-u^2+6u-6=0$; $u^2(u-1)+6(u-1)=0$; $(u-1)\left(u^2+6\right)=0$. Ураховуючи, що $u^2+6\neq 0$, одержуємо $u=1$. Тоді $v=2$. Маємо систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt[3]{x-2}=1,\\ \sqrt{x+1}=2.\end{cases}$ Із першого рівняння $x=3$, що задовольняє і друге рівняння. *Відповідь*: 3. ◁	*Деякі ірраціональні рівняння, що містять кілька коренів n-го степеня, можна звести до систем раціональних рівнянь, замінивши кожний корінь новою змінною.* Після заміни $\sqrt[3]{x-2}=u$, $\sqrt{x+1}=v$ із заданого рівняння отримуємо тільки одне рівняння $u+v=3$. Для того щоб одержати друге рівняння, запишемо за означенням кореня n-го степеня $\begin{cases}x-2=u^3,\\ x+1=v^2.\end{cases}$ Віднімемо від першої рівності другу (щоб позбутися змінної x) і одержимо ще один зв'язок між u і v: $u^3-v^2=-3$. Одержану систему рівнянь розв'язуємо методом підстановки. Слід звернути увагу на те, що, виконуючи обернену заміну, необхідно з'ясувати, чи існує значення x, яке задовольняє обидва співвідношення заміни.

Якщо, розв'язуючи ірраціональні рівняння, ми використовуємо рівняння-наслідки (як у прикладі 1), то в кінці слід виконувати перевірку одержаних розв'язків. Але перевірка іноді є достатньо складною і громіздкою. Для таких рівнянь доводиться використовувати рівносильні перетворення на кожному кроці розв'язування. При цьому необхідно пам'ятати, що всі рівносильні перетворення рівнянь чи нерівностей виконують на ОДЗ заданого рівняння чи нерівності (§ 3), тому, виконуючи рівносильні перетворення ірраціональних рівнянь, необхідно враховувати ОДЗ заданого рівняння. Також досить часто в цих випадках міркують так: *для всіх коренів заданого рівняння знаки лівої і правої частин рівняння збігаються*, оскільки при підстановці в задане рівняння числа, яке є його коренем, одержують правильну числову рівність. Використовуючи останнє міркування, часто вдається одержати якусь додаткову умову для коренів заданого рівняння і виконувати рівносильні перетворення не на всій ОДЗ даного рівняння, а на якійсь її частині.

Приклад 3

Розв'яжіть рівняння
$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}=1.$

Розв'язання	Коментар
▶ ОДЗ: $\begin{cases}2x+1\geqslant 0,\\ x+1\geqslant 0.\end{cases}$ Розв'язок цієї системи: $x\geqslant -\frac{1}{2}$. На ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням: $\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{x+1}$; $\left(\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2$; $2x+1=1+2\sqrt{x+1}+x+1$; $x-1=2\sqrt{x+1}$. (1) Для всіх коренів рівняння (1) $x-1\geqslant 0$. (2) За цієї умови рівняння (1) рівносильне рівнянням: $(x-1)^2=\left(2\sqrt{x+1}\right)^2$; $x^2-2x+1=4(x+1)$; $x^2-6x-3=0$. Тоді $x=3\pm 2\sqrt{3}$. $x_1=3+2\sqrt{3}$ — входить до ОДЗ і задовольняє умову (2), отже, є коренем заданого рівняння; $x_2=3-2\sqrt{3}$ — входить до ОДЗ, але не задовольняє умову (2), отже, не є коренем задане рівняння. *Відповідь*: $3+2\sqrt{3}$. ◁	Виконаємо рівносильні перетворення заданого рівняння. Ураховуючи, що всі рівносильні перетворення виконуються на ОДЗ заданого рівняння, зафіксуємо його ОДЗ. Переносячи вираз $\left(-\sqrt{x+1}\right)$ із лівої частини рівняння в праву з протилежним знаком, одержуємо рівняння, рівносильне заданому. У рівнянні $\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{x+1}$ обидві частини невід'ємні, отже, при піднесенні обох частин до квадрата одержуємо рівняння, рівносильне заданому, яке рівносильне рівнянню (1). Для всіх коренів рівняння (1) воно є правильною числовою рівністю. У цій рівності права частина — невід'ємне число $\left(2\sqrt{x+1}\geqslant 0\right)$, тоді і ліва частина є невід'ємним числом, тобто $x-1\geqslant 0$ для всіх коренів. Тоді за умови (2) обидві частини рівняння (1) невід'ємні, отже, при піднесенні обох частин до квадрата одержуємо рівносильне рівняння. Але після того як знайдено корені цього рівняння, необхідно перевірити не тільки те, чи входять вони до ОДЗ, а й те, чи задовольняють умову (2). Для такої перевірки достатньо взяти наближені значення коренів $x_1\approx 6{,}4$ та $x_2\approx -0{,}4$

З поясненням і обґрунтуванням методів розв'язування ірраціональних рівнянь, наведених в табл. 13, із застосуванням властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь та прикладами розв'язування більш складних рівнянь можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Запитання

1. Назвіть та обґрунтуйте основні методи розв'язування ірраціональних рівнянь. Наведіть приклади їх застосування.
2. Поясніть, чому для розв'язування рівнянь $\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[5]{x}-4=0$, $\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-2=0$ зручно використати заміну змінної. Укажіть заміну для кожного рівняння. Розв'яжіть ці рівняння.

Вправи

Розв'яжіть рівняння 11.1–11.6.

11.1. 1) $\sqrt{x-2}=1$; 3) $\sqrt[3]{x-1}=-3$; 5) $\sqrt[4]{2x-9}=3$.
2) $\sqrt{x-1}=-3$; 4) $\sqrt[3]{x^2+125}=5$;

11.2. 1) $\sqrt{x+1}=x-5$; 3) $\sqrt[3]{x-x^3}=-x$;
2) $\sqrt{3x-2}+x=4$; 4) $\sqrt[3]{x^3+x}-x=0$.

11.3. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+5}=3$; 3) $\sqrt{x-3}=1+\sqrt{x-4}$;
2) $\sqrt{2x-20}+\sqrt{x+15}=5$; 4) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$.

11.4. 1) $\sqrt[3]{x^3-2x+6}=x$; 3) $\sqrt{3-\sqrt[3]{x+10}}=2$;
2) $\sqrt[3]{x-x^3+5}=-x$; 4) $\sqrt[3]{2+\sqrt{x^2+3x-4}}=2$.

11.5. 1) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}=4$; 3) $3\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[8]{x+1}=4$;
2) $\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x-2}=3$; 4) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt[4]{x^2-1}=2$.

11.6*. 1) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$; 2) $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}=2$.

Розв'яжіть систему рівнянь 11.7–11.8.

11.7. 1) $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6, \\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ 2x-y=7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=7, \\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=7, \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=4. \end{cases}$

11.8*. 1) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ x+y=28; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sqrt{x+3y+6}=2, \\ \sqrt{2x-y+2}=1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=2, \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{x+y-1}=1, \\ \sqrt{x-y+2}=2y-1. \end{cases}$

11.9. Розв'яжіть ірраціональне рівняння за допомогою рівносильних перетворень:
1) $\sqrt{3x-2}=5-x$; 3) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$;
2) $\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=1$; 4) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}$.

Розв'яжіть рівняння 11.10–11.11.

11.10*. 1) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x+1$;
2) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$;

11.11*. 1) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$;
2) $x^2+x\sqrt{x+1}-2(x+1)=0$.

§ 12 УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ СТЕПЕНЯ. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

12.1. Узагальнення поняття степеня

Таблиця 14

1. Степінь з натуральним і цілим показниками

$\boxed{a^1 = a}$	$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}}$ $a \in \boldsymbol{R},\ n \in \boldsymbol{N}\ \ (n \geqslant 2)$
$\boxed{a^0 = 1}$ $a \neq 0$	$\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$ $a \neq 0,\ n \in \boldsymbol{N}$

2. Степінь з дробовим показником

$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$ $a \geqslant 0$	$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ $a > 0,\ n \in \boldsymbol{N}\ \ (n \geqslant 2),\ m \in \boldsymbol{Z}$

3. Властивості степенів

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Вам відомі поняття степенів із натуральним і цілим показниками. Нагадаємо їх означення та властивості.

Якщо n — натуральне число, більше за 1, то для будь-якого дійсного числа a $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}$, тобто a^n дорівнює добутку n співмножників, кожен із яких дорівнює a.

При $n = 1$ вважають, що $a^1 = a$.

Якщо $a \neq 0$, то $a^0 = 1$ і $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, де n — натуральне число.

Також вам відомі основні властивості степенів:

$$\boxed{\begin{gathered} a^m \cdot a^n = a^{m+n};\quad a^m : a^n = a^{m-n};\quad (a^m)^n = a^{mn};\\ (ab)^n = a^n b^n;\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \end{gathered}}$$

Нагадаємо ще одну корисну властивість:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Узагальнимо *поняття* степеня для виразів виду $3^{\frac{2}{7}}$; $6^{0{,}2}$; $5^{-\frac{1}{3}}$ і т. п., тобто *для степенів із раціональними показниками*. Відповідне означення бажано дати так, щоб степені з раціональними показниками мали ті самі властивості, що й степені з цілими показниками.

Наприклад, якщо ми хочемо, щоб виконувалася властивість $(a^p)^q = a^{pq}$, то повинна виконуватися рівність $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$. Але за означенням кореня n-го степеня остання рівність означає, що число $a^{\frac{m}{n}}$ є коренем n-го степеня з числа a^m. Це приводить нас до такого означення.

Означення. ***Степенем числа*** $a>0$ ***з раціональним показником*** $r=\frac{m}{n}$, **де** m **— ціле число, а** n **— натуральне число** $(n>1)$, **називається число** $\sqrt[n]{a^m}$.

Також за означенням приймемо, що при $r>0$ $0^r=0$.

Наприклад, за означенням степеня з раціональним показником $3^{\frac{2}{7}}=\sqrt[7]{3^2}=\sqrt[7]{9}$; $5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$; $2^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^{-3}}=\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$; $0^{\frac{2}{5}}=0$.

Зауваження. Значення степеня з раціональним показником $a^{\frac{m}{n}}$ (де $n>1$) не означають при $a<0$.

Це пояснюють тим, що раціональне число r можна подати різними способами у вигляді дробу: $r=\frac{m}{n}=\frac{mk}{nk}$, де k — будь-яке натуральне число.

При $a>0$, використовуючи основну властивість кореня і означення степеня з раціональним показником, маємо: $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}=a^{\frac{mk}{nk}}$.

Отже, при $a>0$ значення a^r не залежить від форми запису r.

При $a<0$ ця властивість не зберігається. Наприклад, якщо $r=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, то повинна виконуватися рівність $a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{6}}$. Але при $a=-1$ одержуємо: $a^{\frac{1}{3}}=(-1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-1}=-1$; $a^{\frac{2}{6}}=(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=\sqrt[6]{1}=1\neq-1$, тобто при від'ємних значеннях a маємо: $a^{\frac{1}{3}}\neq a^{\frac{2}{6}}$. Через це означення степеня $a^{\frac{m}{n}}$ (m — ціле, n — натуральне, не дорівнює 1) для від'ємних значень a не вводять.

В інтернет-підтримці підручника наведено обґрунтування властивостей степенів з раціональним показником і розглянуто поняття степеня з ірраціональним показником.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Подайте вираз у вигляді степеня з раціональним показником:

1) $\sqrt[3]{7^5}$; 2) $\sqrt[4]{5^{-3}}$; 3) $\sqrt[7]{a^2}$ при $a\geqslant0$; 4*) $\sqrt[7]{a^2}$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ $\sqrt[3]{7^5}=7^{\frac{5}{3}}$; ◁ 2) ▶ $\sqrt[4]{5^{-3}}=5^{-\frac{3}{4}}$; ◁ 3) ▶ при $a\geqslant0$ $\sqrt[7]{a^2}=a^{\frac{2}{7}}$; ◁ 4*) ▶ $\sqrt[7]{a^2}=\sqrt[7]{\lvert a\rvert^2}=\lvert a\rvert^{\frac{2}{7}}$. ◁	За означенням степеня з раціональним показником для $a>0$ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$. Для завдання 3 врахуємо, що вираз $a^{\frac{2}{7}}$ означений також і при $a=0$. У завданні 4 при $a<0$ ми не маємо права користуватися наведеною вище формулою. Але якщо врахувати, що $a^2=\lvert a\rvert^2$, то для основи $\lvert a\rvert$ зазначеною формулою вже можна скористатися, оскільки $\lvert a\rvert\geqslant0$.

Приклад 2

Обчисліть:

1) $81^{\frac{3}{4}}$; 2) $128^{-\frac{2}{7}}$; 3*) $(-8)^{\frac{1}{3}}$.

Розв'язання

1) ► $81^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{81^3}=\left(\sqrt[4]{81}\right)^3=3^3=27$; ◁

2) ► $28^{-\frac{2}{7}}=\sqrt[7]{128^{-2}}=\left(\sqrt[7]{128}\right)^{-2}=2^{-2}=\frac{1}{4}$; ◁

3*) ► $(-8)^{\frac{1}{3}}$ не існує, оскільки $a^{\frac{1}{3}}$ степінь ьозначений тільки при $a\geqslant 0$. ◁

Коментар

Використовуємо означення степеня з раціональним показником: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, де $a>0$, а при виконанні завдання 3 враховуємо, що вираз $a^{\frac{m}{n}}$ не означено при $a<0$.

Приклад 3

Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; 2*) $\dfrac{x+27}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9}$.

Розв'язання

1) ► $$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=$$
$$=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}};$$ ◁

2*) ► $$\frac{x+27}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9}=\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3+3^3}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9}=$$
$$=\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}+3\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9\right)}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9}=x^{\frac{1}{3}}+3.$$ ◁

Коментар

Оскільки задані приклади вже містять вирази $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, то $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $x\geqslant 0$. Тоді в завданні 1 невід'ємні числа a і b можна подати як квадрати: $a=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$, $b=\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2$ і використати формулу різниці квадратів: $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, а в завданні 2 подати невід'ємне число x як куб: $x=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$ і використати формулу розкладання суми кубів:
$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right).$$

Приклад 4

Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{x^2}=1$; 2*) $x^{\frac{2}{3}}=1$.

Розв'язання

1) ► $\sqrt[3]{x^2}=1$. ОДЗ: $x\in \boldsymbol{R}$,

$x^2=1$;

$x=\pm 1$.

Відповідь: ± 1. ◁

2*) ► $x^{\frac{2}{3}}=1$. ОДЗ: $x\geqslant 0$.

$x^2=1$;

$x=\pm 1$.

Ураховуючи ОДЗ, одержуємо $x=1$.

Відповідь: 1. ◁

Коментар

Область допустимих значень рівняння $\sqrt[3]{x^2}=1$ — усі дійсні числа, а рівняння $x^{\frac{2}{3}}=1$ — тільки $x\geqslant 0$.

При піднесенні обох частин рівняння до куба одержуємо рівняння, рівносильне заданому на його ОДЗ. Отже, перше рівняння задовольняють усі знайдені корені, а друге — тільки невід'ємні.

(У завданні 1 також ураховано, що $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3=x^2$, а в завданні 2 — що $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3=x^{\frac{2}{3}\cdot 3}=x^2$.)

Запитання

1. Дайте означення степеня з натуральним, цілим від'ємним і нульовим показниками. Наведіть приклади їх обчислення. При яких значеннях a існують значення виразів a^0 та a^{-n}, де $n \in \boldsymbol{N}$?

2. Дайте означення степеня з раціональним показником $r=\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне, що не дорівнює 1. Наведіть приклади обчислення таких степенів. При яких значеннях a існують значення виразу $a^{\frac{m}{n}}$? Укажіть область допустимих значень виразів $a^{\frac{2}{5}}$ і $a^{-\frac{2}{5}}$.

3. Запишіть і обґрунтуйте властивості степенів із раціональними показниками. Наведіть приклади їх використання.

4*. Поясніть на прикладі, як можна ввести поняття степеня з ірраціональним показником.

Вправи

12.1.1°. Подайте заданий вираз у вигляді кореня з числа:

1) $2^{\frac{1}{2}}$; 2) $3^{-\frac{2}{5}}$; 3) $5^{0{,}25}$; 4) $4^{-\frac{3}{7}}$; 5) $2^{1{,}5}$; 6) $7^{-\frac{2}{3}}$.

12.1.2. Подайте вираз у вигляді степеня з раціональним показником:

1)° $\sqrt[6]{3^5}$; 3)° $\sqrt{7^{-9}}$; 5) $\sqrt[4]{2b}$ при $b \geqslant 0$;

2)° $\sqrt[5]{4}$; 4) $\sqrt[9]{a^{-2}}$ при $a>0$; 6*) $\sqrt[11]{c^4}$.

12.1.3°. Чи має зміст вираз:

1) $(-3)^{\frac{1}{2}}$; 2) $(-5)^{-2}$; 3) $4^{\frac{2}{7}}$; 4) 0^{-5}?

12.1.4. Знайдіть область допустимих значень виразу:

1) $x^{\frac{1}{5}}$; 3) $(x-1)^{-\frac{2}{3}}$; 5) $\left(x^2-1\right)^0$;

2) x^{-3}; 4) $(x+3)^{\frac{3}{7}}$; 6) x^3-5.

12.1.5. Знайдіть значення числового виразу:

1) $243^{0{,}4}$; 4) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$;

2) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{2}}-81^{\frac{1}{2}} \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$;

3) $16^{\frac{5}{4}}$; 6) $\left(\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^{-1}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-3}\right): 49^{-\frac{1}{2}}$.

12.1.6. Розкладіть на множники вираз:

1) $(ax)^{\frac{1}{3}}+(ay)^{\frac{1}{3}}$; 2) $a-a^{\frac{1}{2}}$; 3) $3+3^{\frac{1}{2}}$; 4) $a+b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$.

12.1.7. Скоротіть дріб:

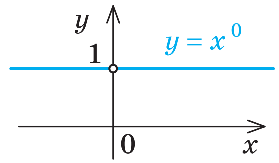
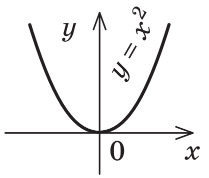
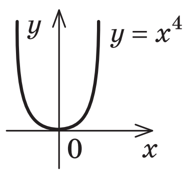
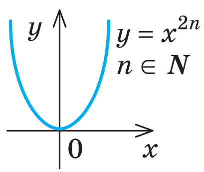
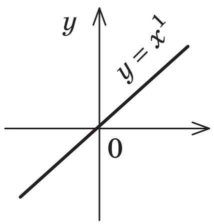
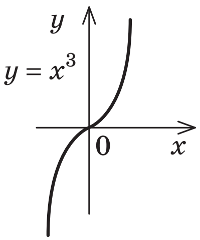
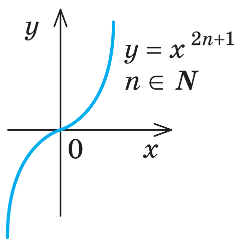
1) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$; 2) $\dfrac{p^{\frac{1}{2}}-5}{p-25}$; 3) $\dfrac{c+c^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}}+d}{c^{\frac{3}{2}}-d^{\frac{3}{2}}}$; 4) $\dfrac{m+n}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}$.

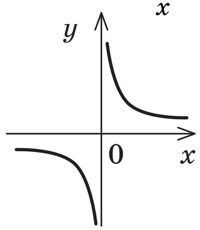
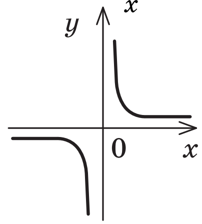
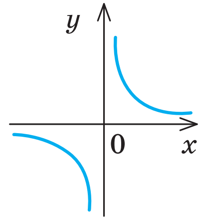
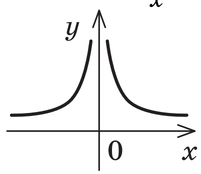
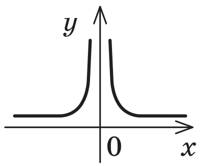
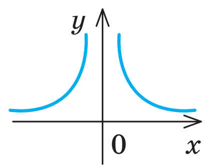
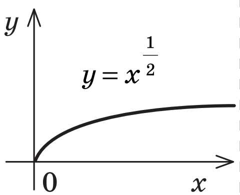
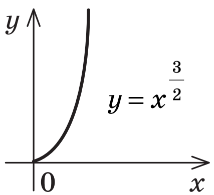
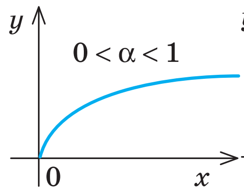
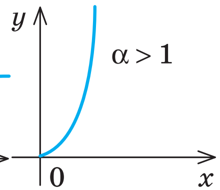
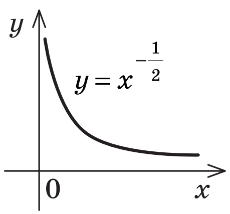
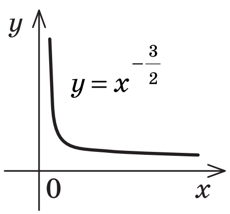
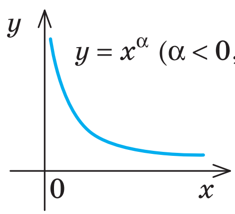
12.1.8. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\frac{3}{5}}=1$; 2) $x^{\frac{1}{7}}=2$; 3) $x^{\frac{2}{5}}=2$; 4) $\sqrt[5]{x^2}=2$.

12.2. Степенева функція, її властивості та графік

Таблиця 15

<table>
<tr><td rowspan="2" colspan="3">Означення. Функція виду $y=x^{\alpha}$, де α — будь-яке дійсне число, називається степеневою функцією.</td><td colspan="4">Особливий випадок $(\alpha=0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо $\alpha=0$, то $y=x^{\alpha}=x^{0}=1$ (при $x\neq 0$).</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="7">Графіки і властивості функції $y=x^{\alpha}$ (при $\alpha\neq 0$)</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="3">Графік</td><td colspan="4">Властивості</td></tr>
<tr><td>$D(y)$</td><td>$E(y)$</td><td>Парність і непарність</td><td>Зростання і спадання</td></tr>
<tr><td colspan="7">1. $y=x^{\alpha}$, α — парне натуральне число ($y=x^{2n}$, $n\in N$)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>$\boldsymbol{R}$</td><td>$[0;+\infty)$</td><td>Парна</td><td>Спадає на проміжку $(-\infty;0]$, зростає на проміжку $[0;+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="7">2. $y=x^{\alpha}$, α — непарне натуральне число ($y=x$ та $y=x^{2n+1}$, $n\in N$)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>$\boldsymbol{R}$</td><td>$\boldsymbol{R}$</td><td>Непарна</td><td>Зростає</td></tr>
</table>

3. $y=x^{\alpha}$, α **— непарне від'ємне число** $\left(y=x^{-(2n-1)}=\frac{1}{x^{2n-1}},\ n\in N\right)$						
$y=x^{-1}=\frac{1}{x}$ 	$y=x^{-3}=\frac{1}{x^3}$ 	$y=x^{-(2n-1)}=\frac{1}{x^{2n-1}}$, $n\in N$ 	$x\neq 0$	$y\neq 0$	Непарна	Спадає на кожному з проміжків $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$
4. $y=x^{\alpha}$, α **— парне від'ємне число** $\left(y-x^{-2n}=\frac{1}{x^{2n}},\ n\in N\right)$						
$y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ 	$y=x^{-4}=\frac{1}{x^4}$ 	$y=x^{-2n}=\frac{1}{x^{2n}}$, $n\in N$ 	$x\neq 0$	$(0;+\infty)$	Парна	Зростає на проміжку $(-\infty;0)$, спадає на проміжку $(0;+\infty)$
5. $y=x^{\alpha}$, α **— неціле додатне число**						
$y=x^{\frac{1}{2}}$ 	$y=x^{\frac{3}{2}}$ 	$y=x^{\alpha}$ ($\alpha>0$, α — неціле) $0<\alpha<1$  $\alpha>1$ 	$[0;+\infty)$	$[0;+\infty)$	Ні парна, ні непарна	Зростає
6. $y=x^{\alpha}$, α **— неціле від'ємне число**						
$y=x^{-\frac{1}{2}}$ 	$y=x^{-\frac{3}{2}}$ 	$y=x^{\alpha}$ ($\alpha<0$, α — неціле) 	$(0;+\infty)$	$(0;+\infty)$	Ні парна, ні непарна	Спадає

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Степеневими функціями називають функції виду $y = x^{\alpha}$, де α — будь-яке дійсне число.

З окремими видами таких функцій ви вже ознайомилися в курсі алгебри 7–9 класів. Це, наприклад, функції $y = x^1 = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$. При довільному α графіки і властивості функції $y = x^{\alpha}$ аналогічні відомим вам графікам і властивостям указаних функцій.

Описуючи властивості степеневих функцій, виокремимо ті характеристики функцій, які ми використовували в § 10:

1) область визначення;
2) область значень;
3) парність чи непарність;
4) точки перетину з осями координат;
5) проміжки знакосталості;
6) проміжки зростання і спадання;
7) найбільше і найменше значення функції.

Функція $y = x^{\alpha}$ (α — парне натуральне число)

Якщо α — парне натуральне число, то функція $y = x^{2n}$, $n \in N$, має властивості та графік, повністю аналогічні властивостям і графіку функції $y = x^2$.

Дійсно, *область визначення* функції $y = x^{2n}$: $D(y) = \boldsymbol{R}$, оскільки значення цієї функції можна обчислити при будь-яких значеннях x.

Функція *парна*: якщо $f(x) = x^{2n}$, то $f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$. Отже, графік функції $y = x^{2n}$ симетричний відносно осі Oy.

Оскільки при $x = 0$ значення $y = 0$, то графік функції $y = x^{2n}$ завжди проходить через початок координат.

На проміжку $[0; +\infty)$ функція зростає.

● Дійсно, для невід'ємних значень при $x_2 > x_1$ ($x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$) одержуємо $x_2^{2n} > x_1^{2n}$, оскільки, як відомо з курсу алгебри 9 класу, при піднесенні обох частин правильної нерівності з невід'ємними членами до парного степеня (зі збереженням знака нерівності) одержуємо правильну нерівність. ○

На проміжку $(-\infty; 0]$ функція спадає.

● Дійсно, для недодатних значень x_1 і x_2 ($x_1 \leqslant 0$, $x_2 \leqslant 0$), якщо $x_2 > x_1$, то $-x_2 < -x_1$ (і тепер $-x_1 \geqslant 0$, $-x_2 \geqslant 0$). Тоді $(-x_2)^{2n} < (-x_1)^{2n}$, отже, $x_2^{2n} < x_1^{2n}$, тобто $f(x_2) < f(x_1)$. ○

Для того щоб знайти область значень функції $y = x^{2n}$, $n \in N$, складемо рівняння $x^{2n} = a$. Воно має розв'язки для всіх $a \geqslant 0$, (тоді $x = \pm\sqrt[2n]{a}$) і тільки при таких значеннях a. Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, область значень заданої функції: $y \geqslant 0$, тобто $E(y) = [0; +\infty)$.

Таким чином, для всіх дійсних значень x значення $y \geqslant 0$. *Найменше значення* функції дорівнює нулю ($y = 0$ при $x = 0$). *Найбільшого значення функція не має.*

Зазначимо також, що при $x = 1$ значення $y = 1^{2n} = 1$.

Ураховуючи властивості функції $y = x^{2n}$, $n \in N$, одержуємо її графік (рис. 12.2.1).

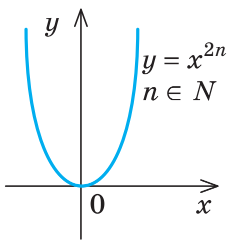


Рис. 12.2.1

Аналогічно можна обґрунтувати властивості степеневої функції для інших показників степеня (див. табл. 15). Виконайте відповідні обґрунтування самостійно. У разі потреби зверніться до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Знайдіть область визначення функції:

1) $y=(x-3)^{\frac{1}{3}}$; 2) $y=(x+1)^{-\frac{1}{2}}$.

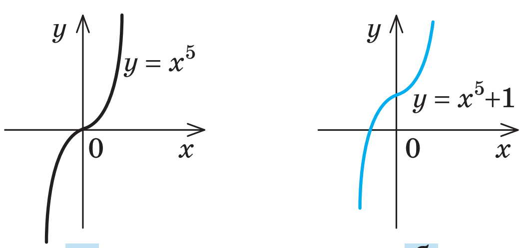
Розв'язання	Коментар
1) ▶ $x-3\geqslant 0$, тобто $x>3$, отже, $D(y)=[3;+\infty)$ ◁ 2) ▶ $x+1>0$, тобто $x>-1$, отже, $D(y)=(-1;+\infty)$ ◁	Ураховуємо, що вираз $a^{\frac{1}{3}}$ означений при $a\geqslant 0$, а вираз $a^{-\frac{1}{2}}$ — тільки при $a>0$.

Приклад 2

Побудуйте графік функції:

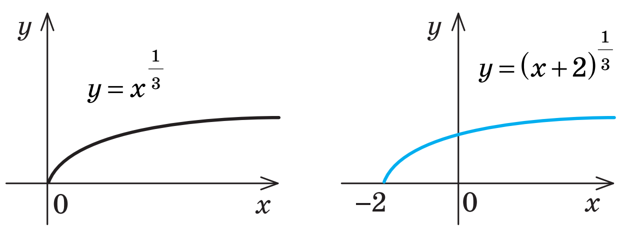
1) $y=x^5+1$; 2) $y=(x+2)^{\frac{1}{3}}$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ Будуємо графік $y=x^5$ (рис. 12.2.2, *а*), а потім паралельно переносимо його вздовж осі Oy на $+1$ (рис. 12.2.2, *б*). ◁ 2) ▶ Будуємо графік $y=x^{\frac{1}{3}}$ (рис. 12.2.3, *а*) а потім паралельно переносимо його вздовж осі Ox на -2 (рис. 12.2.3, *б*). ◁	Графіки заданих функцій можна отримати із графіків функцій: 1) $y=x^5$, 2) $y=x^{\frac{1}{3}}$ за допомогою паралельного перенесення: 1) на $+1$ уздовж осі Oy; 2) на -2 вздовж осі Ox.



а б

Рис. 12.2.2



а б

Рис. 12.2.3

Запитання

1. Користуючись графіком відповідної функції, охарактеризуйте властивості функції $y=x^{\alpha}$, якщо α: парне натуральне число; непарне натуральне число; непарне від'ємне число; парне від'ємне число; неціле від'ємне число; неціле додатне число.

2*. Обґрунтуйте властивості степеневої функції в кожному з випадків, указаних у завданні 1.

Вправи

12.2.1. Знайдіть область визначення функції:

1°) $y=x^7$; 3°) $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$; 5) $y=(x^2-x)^{\frac{5}{3}}$;

2°) $y=x^{-3}$; 4°) $y=x^{-\frac{2}{7}}$; 6) $y=(x^2-x+1)^{-\frac{9}{2}}$.

12.2.2. Побудуйте графік функції або рівняння:

1°) $y=x^4$; 6) $y=x^{\frac{5}{4}}$; 11*) $y=\left|(x-3)^{\frac{1}{3}}-2\right|$;

2°) $y=x^7$; 7) $y=(x+1)^4$; 12*) $|y|=64-x^6$;

3) $y=x^{-3}$; 8) $y=x^{\frac{1}{5}}-3$; 13*) $y=\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^5$;

4) $y=x^{-4}$; 9) $y=|x|^{\frac{1}{3}}$; 14*) $|y|=1-|x|^3$;

5) $y=x^{\frac{1}{4}}$; 10) $y=|x^5-1|$; 15*) $|y|=|x|^5-4$.

12.2.3. Побудуйте й порівняйте графіки функцій:

1) $y=\sqrt[3]{x}$ і $y=x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y=\sqrt[4]{x}$ і $y=x^{\frac{1}{4}}$.

12.2.4. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^{\frac{1}{2}}=6-x$; 3) $x^{\frac{5}{2}}=2-x$; 5) $(x-1)^{\frac{1}{3}}=3-x$;

2) $x^{-\frac{1}{3}}=x^2$; 4) $x^{-\frac{1}{4}}=2x-1$; 6) $x^{\frac{3}{2}}=10-x^{\frac{1}{2}}$.

Перевірте підстановкою, що значення x дійсно є коренем рівняння.

12.2.5*. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 12.2.4, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

Виявіть свою компетентність

12.2.6. Висловіть свою думку з приводу того, представникам яких із наведених професій може стати у пригоді знання теми «Степенева функція, її властивості та графік»: інженер-консультант з альтернативної енергетики, інженер з утилізації, аналітик природних катаклізмів, медичний консультант з активного і здорового способу життя, проектувальник індивідуальної фінансової траєкторії.

§ 13 ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

Таблиця 16

1. Метод інтервалів (для нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$)

Орієнтир

1) Знайти ОДЗ нерівності.
2) Знайти нулі функції $f(x)$ $(f(x)=0)$.
3) Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак функції в кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.
4) Записати відповідь, ураховуючи знак нерівності

Приклад

Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+4} > x+2$.

▶ Задана нерівність рівносильна нерівності

$$\sqrt{x+4} - x - 2 > 0.$$

Позначимо $f(x) = \sqrt{x+4} - x - 2$.

ОДЗ: $x+4 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant -4$.

Нулі $f(x)$: $\sqrt{x+4} - x - 2 = 0$;

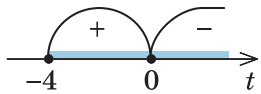
$$\sqrt{x+4} = x+2;$$

$$x+4 = x^2 + 4x + 4;$$

$$x^2 + 3x = 0;\ x(x+3) = 0;$$

$x_1 = 0$ — корінь, $x_2 = -3$ — сторонній корінь.

Позначаємо нулі на ОДЗ і знаходимо знак функції $f(x)$ у кожному проміжку.



Відповідь: $[-4; 0)$. ◁

2. Рівносильні перетворення

Орієнтир

1) При піднесенні обох частин нерівності до непарного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)

Приклад

Розв'яжіть нерівність $\sqrt[3]{x+2} < -1$

▶ ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$.

Задана нерівність рівносильна нерівностям:

$$\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3 < (-1)^3;$$

$$x+2 < -1;$$

$$x < -3.$$

Відповідь: $(-\infty; -3)$. ◁

Орієнтир

2) Якщо обидві частини нерівності невід'ємні, то при піднесенні обох частин нерівності до парного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)

Приклад

Розв'яжіть нерівність $\sqrt[4]{2x-6} < 1$.

▶ ОДЗ: $2x-6 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant 3$. Обидві частини заданої нерівності невід'ємні, отже, вона рівносильна (на її ОДЗ) нерівностям: $\left(\sqrt[4]{2x-6}\right)^4 < 1^4$;

$$2x - 6 < 1;$$

$$x < \frac{7}{2}.$$

Ураховуючи ОДЗ, одержуємо $3 \leqslant x < \frac{7}{2}$.

Відповідь: $\left[3; \frac{7}{2}\right)$. ◁

3) Якщо на ОДЗ заданої нерівності якась частина нерівності може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то, перш ніж підносити обидві частини нерівності до парного степеня, ці випадки слід розглянути окремо.

Наприклад,

$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

$\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x) \end{cases}$

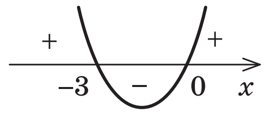
Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+4} > x+2$.

▶ Задана нерівність рівносильна сукупності систем:

$\begin{cases} x+2 \geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x+4}\right)^2 > (x+2)^2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+4 \geqslant 0, \\ x+2 < 0. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x^2 + 3x < 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x \geqslant -4, \\ x < -2. \end{cases}$

Розв'язавши нерівність $x^2 + 3x < 0$, маємо $-3 < x < 0$.



Ураховуючи нерівність $x \geqslant -2$, одержуємо розв'язок першої системи: $-2 \leqslant x < 0$. Розв'язок другої системи: $-4 \leqslant x < -2$. Об'єднуючи ці розв'язки, одержуємо відповідь.

Відповідь: $[-4; 0)$. ◁

З поясненням і обґрунтуванням властивостей, наведених у табл. 16, та додатковими прикладами розв'язування ірраціональних нерівностей можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$.

Розв'язання

▶ Задана нерівність рівносильна нерівності $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} > 0$. Позначимо $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1}$.

1) ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ x-1 \geqslant 0, \\ 2x-1 \geqslant 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant 1, \\ x \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$ тобто $x \geqslant 1$.

2) Нулі функції $f(x)$: $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} = 0$.

Тоді: $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1}$, $\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}\right)^2 = \left(\sqrt{2x-1}\right)^2$,

$x+3-2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1} + x-1 = 2x-1$, $2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1} = 3$.

Підносимо обидві частини останнього рівняння до квадрата:

$4(x+3)(x-1) = 9$, $4x^2 + 8x - 21 = 0$, $x_1 = \frac{3}{2} = 1{,}5$ — корінь, $x_2 = -\frac{7}{2}$ — сторонній корінь.

3) Розбиваємо ОДЗ точкою 1,5 на два проміжки і знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків (рис. 13.1).

Відповідь: $[1; 1{,}5)$. ◁

Коментар

Зведемо нерівність до виду $f(x) > 0$ і розв'яжемо її методом інтервалів.

Для того щоб знайти нулі функції $f(x)$, використаємо рівняння-наслідки. Щоб вилучити сторонні корені, виконаємо перевірку одержаних розв'язків.

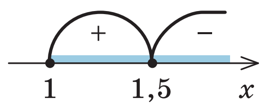


Рис. 13.1

Зауваження. Записуючи розв'язання нерівностей за допомогою рівносильних перетворень, знаки рівносильності ($\Leftrightarrow$) можна не ставити, достатньо на початку розв'язання записати: «Виконаємо рівносильні перетворення заданої нерівності» (див. п. 2 табл. 16 та інтернет-підтримку підручника (розв'язування ірраціональних нерівностей за допомогою рівносильних перетворень)).

Запитання

1. Назвіть основні методи розв'язування ірраціональних нерівностей.
2. Назвіть основні етапи розв'язування ірраціональної нерівності методом інтервалів.
3. Обґрунтуйте справедливість таких рівносильних перетворень:

1) $\sqrt[2k+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2k+1}(x)$;

2) $\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x); \end{cases}$

3) $\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

За необхідності зверніться до інтернет-підтримки підручника.

Вправи

Розв'яжіть нерівність 13.1–13.8.

13.1. 1) $\sqrt{x^2-3x-18} < 4-x$; 2) $\sqrt{x^2-3x} < 5-x$.

13.2. 1) $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leqslant x^2-9$; 2) $(x-1)\sqrt{x^2+1} \leqslant x^2-1$.

13.3. 1) $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \leqslant \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+8} \leqslant \dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2x+1}$.

13.4. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+5} \geqslant 3$; 2) $\sqrt{2x-20}+\sqrt{x+15} \geqslant 5$.

13.5. 1) $\dfrac{14}{3-\sqrt{x}} \geqslant \sqrt{x}+5$; 2) $\dfrac{x-\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-6} > 0$.

13.6. 1) $\sqrt{\dfrac{x^3+27}{x}} > x-3$; 2) $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$.

13.7*. 1) $\sqrt{5x+8-6\sqrt{5x-1}}+\sqrt{5x+24-10\sqrt{5x-1}} \leqslant 2$;

2) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} > 1$.

13.8*. 1) $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right) \leqslant 0$;

2) $\left(\sqrt{x^2-5x+6}+2\right)\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{10x-2x^2-12}+2\right) \geqslant 0$.

§ 14 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ ІЗ ПАРАМЕТРАМИ

Під час розв'язування завдань з параметрами, у яких вимагається розв'язати рівняння або нерівність, можна користуватися таким **орієнтиром** (§ 9).

> Будь-яке рівняння чи нерівність із параметрами розв'язують як звичайні рівняння чи нерівність доти, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Але в тому разі, коли якесь перетворення не можна виконати однозначно, розв'язування необхідно розбити на декілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно.

Також на етапі пошуку плану розв'язування рівнянь чи нерівностей із параметрами або міркуючи над самим розв'язанням, часто буває зручно супроводжувати відповідні міркування схемами, за якими легко простежити, у який саме момент ми не змогли однозначно виконати потрібні перетворення, на скільки випадків довелося розбити розв'язання і чим відрізняється один випадок від іншого.

Зазначимо, що рівняння і нерівності з параметрами найчастіше розв'язують за допомогою їх рівносильних перетворень, хоча інколи використовують і властивості функцій, метод інтервалів для розв'язування нерівностей і рівняння-наслідки.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ*

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-2}=a$.

Розв'язання

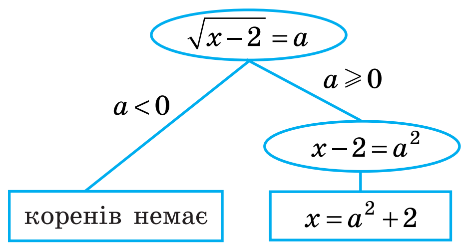
▶ 1) При $a<0$ рівняння не має коренів.

2) При $a \geqslant 0$ $x-2=a^2$. Тоді $x=a^2+2$.

Відповідь: 1) якщо $a<0$, то коренів немає; 2) якщо $a \geqslant 0$, то $x=a^2+2$. ◁

Коментар

Ми не можемо однозначно дати відповідь на запитання, чи є в заданого рівняння корені, і тому вже на першому кроці повинні розбити розв'язання на два випадки:
1) $a<0$ — коренів немає,
2) $a \geqslant 0$ — корені є (див. схему).



Якщо $a \geqslant 0$, маємо найпростіше ірраціональне рівняння, обидві частини якого невід'ємні. Отже, при піднесенні до квадрата обох його частин одержуємо рівняння, рівносильне заданому. ОДЗ заданого рівняння можна не записувати, її враховано автоматично, бо для всіх коренів одержаного рівняння $x-2=a^2 \geqslant 0$.

* Див. також приклади в інтернет-підтримці підручника.

Приклад 2

Розв’яжіть нерівність $\sqrt{x-a} > x+1$.

Коментар

Спочатку скористаємося рівносильними перетвореннями: $\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)<0. \end{cases}$$

Якщо в одержані системи параметр a входить лінійно, то в таких випадках іноді буває зручно виразити параметр через змінну, розглянути параметр як функцію від цієї змінної і використати графічну ілюстрацію розв’язування нерівностей (у системі координат xOa, у якій виділяти штриховкою відповідні розв’язки).

Розв’язання

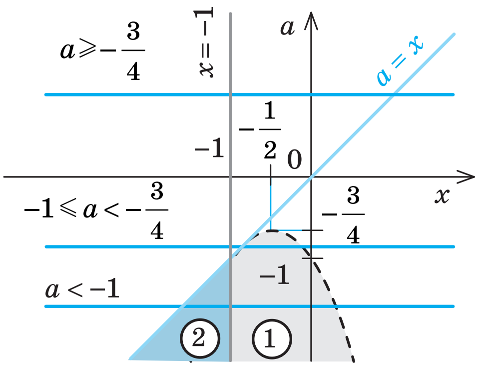
▶ Задана нерівність рівносильна сукупності систем нерівностей:

$$\begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ x-a>(x+1)^2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-a\geqslant 0, \\ x+1<0. \end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} x\geqslant -1, \\ a<-x^2-x-1 \end{cases}$ (1)

або $\begin{cases} a\leqslant x, \\ x<-1. \end{cases}$ (2)

Зобразимо графічно розв’язки систем нерівностей (1) і (2) в системі координат xOa (на рис. 14.1 зафарбовано відповідні області 1 і 2).



◆ Рис. 14.1

Бачимо, що при $a\geqslant -\frac{3}{4}$ розв’язків немає (немає зафарбованих точок); якщо $-1\leqslant a<-\frac{3}{4}$, то пряма $a=\text{const}$ перетинає тільки зафарбовану область 1. Причому одержаний інтервал обмежений зліва і справа вітками параболи $a=-x^2-x-1$. Але для відповіді нам потрібно записати x через a. Для цього з рівняння $x^2+x+a+1=0$ знаходимо x:

$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-a-1}.$$

Як бачимо, $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}>-\frac{1}{2}$, тобто $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}$ — рівняння правої вітки параболи, а $x=-\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}-a}$ — лівої. Тоді відповідь у цьому випадку буде такою:

$$-\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}-a}<x<-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}.$$

Якщо $a<-1$ то пряма $a=\text{const}$ перетинає заштриховані області 1 і 2. Для області 1 інтервал для x зліва обмежений прямою $x=-1$, а справа — правою віткою параболи, тобто $-1\leqslant x<-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}$. Для області 2 інтервал для x обмежений зліва прямою $x=a$, а справа — прямою $x=-1$, тобто $a\leqslant x<-1$. Об’єднання цих інтервалів можна коротше записати так: $a\leqslant x<-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}$.

Відповідь: 1) при $a\geqslant -\frac{3}{4}$ розв’язків немає;

2) при $-1\leqslant a<-\frac{3}{4}$

$$-\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}-a}<x<-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a};$$

3) при $a<-1$ $a\leqslant x<-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}$. ◁

Вправи

14.1. Розв’яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-a}=2$;
2) $\sqrt{x+2a}=a$;
3) $\sqrt{x+6}-m=\sqrt{x-3}$;
4) $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

14.2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{(x-1)\sqrt{a-x}}{2-x} \geqslant 0$; 3) $\sqrt{4x+a} > x$; 5) $\sqrt{a^2-x^2} > 2-x$.

2) $x+2a > \sqrt{3ax+4a^2}$; 4) $\sqrt{x-a} \geqslant 2x+1$;

14.3. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $3\sqrt{x+2} = 2x+a$ має корені.

14.4. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $(\sqrt{x}-a)\left(x-\frac{4}{x}\right)=0$ має тільки один дійсний корінь.

14.5. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $\sqrt{2-ax}+2=x$ має тільки один дійсний корінь.

14.6. Визначте кількість розв'язків системи рівнянь залежно від значення параметра a.

1) $\begin{cases} y=a+\sqrt{x}, \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=a+\sqrt{y}, \\ y^2-x^2-2x+4y+3=0. \end{cases}$

Додаткові завдання до теми «Степенева функція» та відомості з історії наведено на сайті interactive.ranok.com.ua.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 2

1. Знайдіть значення виразу $\left(\sqrt[3]{64}+\sqrt[4]{81}\right)\cdot\sqrt[5]{32}$.

А 7 **Б** 14 **В** 28 **Г** 34

2. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

А $\frac{16}{81}$ **Б** $\frac{3}{2}$ **В** $\frac{4}{9}$ **Г** $\frac{9}{4}$

3. Обчисліть $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^4}+\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}$

А $4-2\sqrt{2}$ **Б** 2 **В** -2 **Г** $2\sqrt{2}-4$

4. Знайдіть значення виразу $\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}+b^{\frac{1}{3}}$, якщо $a=125$, $b=17$.

А $5+2\sqrt[3]{17}$ **Б** 5 **В** 17 **Г** $\sqrt[3]{17}$

5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-1}-\sqrt{6-x}=2$. Якщо рівняння має декілька коренів, то у відповідь запишіть їх добуток.

А $\frac{250}{9}$ **Б** $\frac{125}{9}$ **В** $\frac{25}{9}$ **Г** 5

6. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+3} < 3-x$.

А $(-\infty;1)\cup(6;+\infty)$ **Б** $(1;6)$ **В** $[-3;1)$ **Г** $(-3;1)$

7. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}=a$ залежно від значень параметра a (запишіть розв'язання).

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua.

Розділ 3

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

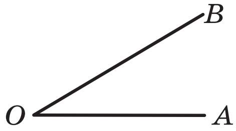
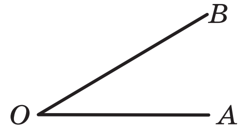
У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ознайомитеся з тригонометричними функціями кута і числового аргумента та властивостями цих функцій;
- навчитеся будувати графіки тригонометричних функцій;
- дізнаєтеся про формули тригонометрії

§ 15 РАДІАННА МІРА КУТІВ

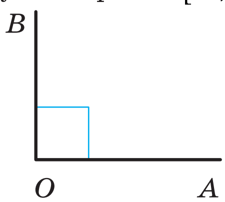
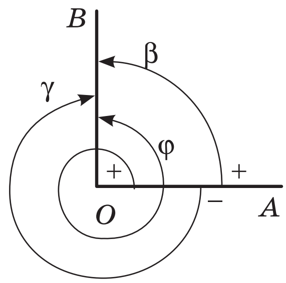
Таблиця 17

1. Поняття кута

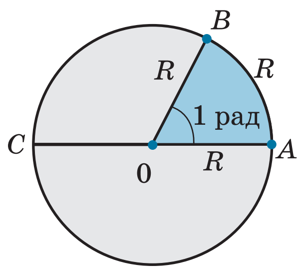
У геометрії	У тригонометрії*
Кут — геометрична фігура, утворена двома променями, які виходять з однієї точки.  $\angle AOB$ утворений променями OA і OB	*Кут* — фігура, утворена внаслідок повороту променя на площині навколо початкової точки.  $\angle AOB$ утворений унаслідок повороту променя OA навколо точки O

2. Вимірювання кутів

Градусна міра кута ($1^\circ = \frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута)

Кожному куту ставиться у відповідність градусна міра $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$.  $\angle AOB = 90^\circ$	Кожному куту як фігурі ставиться у відповідність кут повороту, за допомогою якого утворено цей кут. Кут повороту $\alpha \in (-\infty; +\infty)$.  $\angle AOB = \beta = 90^\circ$ $\angle AOB = \gamma = -270^\circ$ $\angle AOB = \varphi = 90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$

Радіанна міра кута



1 радіан — центральний кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола.

$\angle AOB = 1$ рад. Це означає, що $\cup AB = OA = R$.

$\angle AOC = 180^\circ = \pi$ (радіан). $\angle AOC$ — розгорнутий.

1 радіан $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$; $\quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ радіан

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

У курсі геометрії кут означають як геометричну фігуру, утворену двома променями, які виходять з однієї точки. Наприклад, кут AOB, зображений у першому пункті табл. 17, — це кут, утворений променями OA і OB. Кут можна розглядати також як результат повороту променя на площині навколо початкової точки. Наприклад, повертаючи промінь OA навколо точки O від початкового положення OA до кінцевого положення OB, теж одержимо кут AOB. Зауважимо, що досягнути кінцевого положення OB можна при повороті променя OA як за годинниковою стрілкою, так і проти неї.

* Походження та зміст терміна «тригонометрія» див. у рубриці «Відомості з історії» до розділу 3, наведеній в інтернет-підтримці підручника.

Вимірювання кутів

Наведені вище різні означення кута приводять до різного розуміння вимірювання кутів.

У курсі геометрії кожному куту відповідає його градусна міра, яка може знаходитися тільки в межах від 0° до 180°, і тому, наприклад, для прямого кута *AOB* (див. п. 2 табл. 17) його міра записується однозначно: $\angle AOB = 90°$ (нагадаємо, що $1°$ — це $\frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута).

При вимірюванні кутів повороту домовилися вважати напрям повороту проти годинникової стрілки додатним, а за годинниковою стрілкою — від'ємним.

Тому при вимірюванні кутів, утворених при повороті променя навколо початкової точки, можна одержати як додатні, так і від'ємні значення кутів повороту. Наприклад, якщо кут *AOB*, у якому промені *OA* і *OB* взаємно перпендикулярні, одержано при повороті променя *OA* на кут 90° проти годинникової стрілки, то значення кута повороту β (див. відповідний рисунок у п. 2 табл. 17) дорівнює +90° (або просто 90°). Якщо той самий кут *AOB* одержано при повороті променя *OA* на кут 270° за годинниковою стрілкою (зрозуміло, що повний оберт — це 360°), то значення кута повороту γ дорівнює −270°. Той самий кут *AOB* можна одержати також при повороті променя *OA* проти годинникової стрілки на 90° і ще на повний оберт; у цьому випадку значення кута повороту φ дорівнює $90° + 360°$, тобто 450° і т. д.

Вибравши як значення кута повороту довільне від'ємне чи додатне число (градусів), ми завжди можемо повернути промінь *OA* (за годинниковою стрілкою чи проти неї) і одержати відповідний кут *AOB*. Отже, значення кута повороту (у градусах) може набувати всіх дійсних значень від $-\infty$ до $+\infty$.

Для вимірювання кутів певний кут приймають за одиницю виміру і за її допомогою вимірюють інші кути. За одиницю виміру можна прийняти будь-який кут.

Нагадаємо, що $\frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута — це один градус (1°). У техніці за одиницю виміру кутів приймають повний оберт (зазначимо, що 1 градус — це $\frac{1}{360}$ частина повного оберту).

У мореплавстві за одиницю виміру кутів приймають румб, який дорівнює $\frac{1}{32}$ частині повного оберту.

У математиці та фізиці, крім градусної міри кутів, використовують також *радіанну міру кутів*.

Якщо розглянути деяке коло, то можна означити радіан у такий спосіб.

Означення. **1 радіан — це центральний кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола.**

Отже, якщо кут *AOB* дорівнює одному радіану (рис. 15.1), то це означає, що $\cup AB = OA = R$.

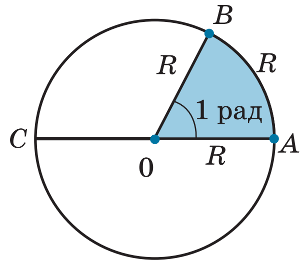


Рис. 15.1

Установимо зв'язок між радіанними і градусними мірами кутів.

Центральному розгорнутому куту *AOC* (рис. 15.1), який дорівнює 180°, відповідає півколо, тобто дуга, довжина якої дорівнює πR, а одному радіану — дуга довжиною *R*. Отже, радіанна міра розгорнутого кута *AOC* дорівнює $\frac{\pi R}{R} = \pi$.

Одержану відповідність між градусною і радіанною мірами кута часто записують так:

$$180° = \pi \ \textbf{радіан}.$$

Із цієї рівності одержуємо такі відповідності:

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ радіан}, \quad 1 \text{ радіан} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°$$

Приклад 1

Виразіть у радіанній мірі величини кутів: 30°; 45°; 60°; 90°; 270°; 360°.

▶ Оскільки 30° — це $\frac{1}{6}$ частина кута 180°, то з рівності $180° = \pi$ (рад) одержуємо, що $30° = \frac{\pi}{6}$ (рад).

Аналогічно можна обчислити й величини інших кутів. У загальному випадку враховуємо, що $1° = \frac{\pi}{180}$ радіан, тоді:

$45° = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}$ (рад); $60° = \frac{\pi}{180} \cdot 6 = \frac{\pi}{3}$ (рад);

$90° = \frac{\pi}{2}$ (рад); $270° = \frac{3\pi}{2}$ (рад);

$360° = 2\pi$ (рад). ◁

Ураховуючи, що радіанними мірами розглянутих кутів доводиться користуватися досить часто, запишемо одержані результати у вигляді довідкової таблиці.

Таблиця 18

Кут у градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Кут у радіанах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Зауваження. **Найчастіше у записі радіанної міри кутів назву одиниці виміру «радіан» (або скорочено рад) не пишуть. Наприклад, замість рівності $90° = \frac{\pi}{2}$ радіан пишуть $90° = \frac{\pi}{2}$.**

Приклад 2

Виразіть у градусній мірі величини кутів: $\frac{\pi}{10}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; 5.

▶ Оскільки $\frac{\pi}{10}$ — це $\frac{1}{10}$ частина кута π, то з рівності $\pi = 180°$ одержуємо, що $\frac{\pi}{10} = 18°$. Аналогічно можна обчислити і величини кутів $\frac{2\pi}{3}$ та $\frac{3\pi}{4}$. У загальному випадку враховуємо, що 1 радіан $= \frac{180°}{\pi}$, тоді

$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 120°$; $\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = 135°$;

$5 = 5 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{900°}{\pi} \approx 286°$. ◁

Запитання

1. Поясніть, як можна означити кут за допомогою повороту променя. Як при такому означенні вимірюють кути?
2. Як ви розумієте такі твердження: «Величина кута дорівнює 450°», «Величина кута дорівнює −225°»? Зобразіть ці кути.
3. Як можна означити кут в 1°?
4. Дайте означення кута в 1 радіан.
5. Чому дорівнює градусна міра кута в n радіан?
6. Поясніть на прикладах, як за радіанною мірою кута знайти його градусну міру і, навпаки, за градусною мірою кута знайти його радіанну міру.

Вправи

15.1°. Зобразіть кут, утворений поворотом променя OA навколо точки O на:

1) 270°; 3) 720°; 5) 225°; 7) 540°; 9) 360°;
2) −270°; 4) −90°; 6) −45°; 8) −180°; 10) −60°.

15.2°. Чому дорівнюють кути повороту, показані на рис. 15.2?

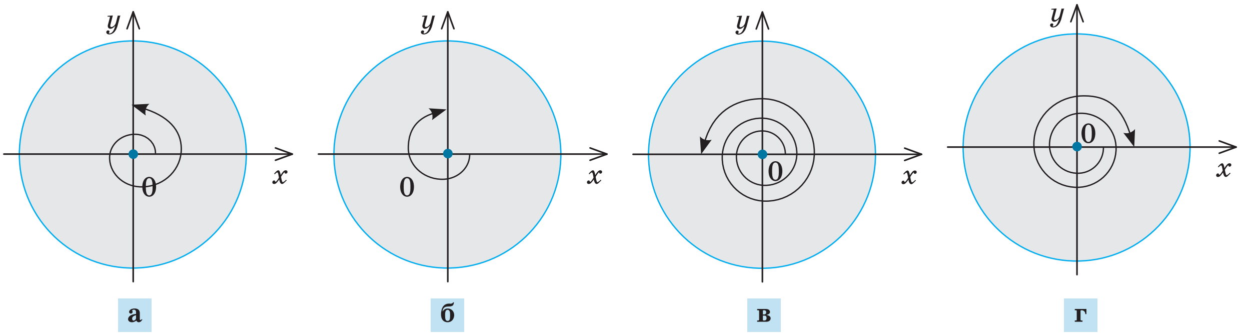


Рис. 15.2

15.3. Виразіть у радіанній мірі величини кутів:

1°) 225°; 3) 100°; 5) −22,5°;
2°) 36°; 4) −240°; 6) −150°.

15.4. Виразіть у градусній мірі величини кутів:

1) 3π; 3) $-\frac{2\pi}{5}$; 5) $-\frac{\pi}{18}$; 7) $-\frac{\pi}{8}$;
2) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{7\pi}{6}$; 6) $\frac{11\pi}{6}$; 8) 3.

15.5. За допомогою калькулятора (або таблиць) знайдіть радіанні міри кутів:

1) 27°; 2) 132°; 3) 43°; 4) 114°.

15.6. За допомогою калькулятора (або таблиць) знайдіть градусні міри кутів:

1) 0,5585; 2) 0,8098; 3) 3,1416; 4) 4,4454.

Виявіть свою компетентність

15.7. Визначте кут (у градусах і в радіанах), який утворюється внаслідок обертання хвилинної стрілки від моменту часу 1 год 15 хв до моменту часу 1 год 40 хв тієї самої доби. Обговоріть, чи будуть відрізнятися запис самого кута і запис його модуля?

15.8. Маховик двигуна робить 50 обертів за хвилину. На який кут (у градусах і в радіанах) повернеться його спиця OA (рис. 15.3) за 2 с (напрям обертання позначено на рисунку)?

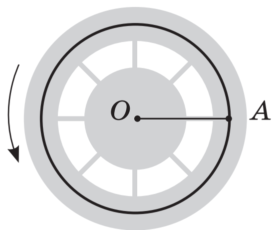
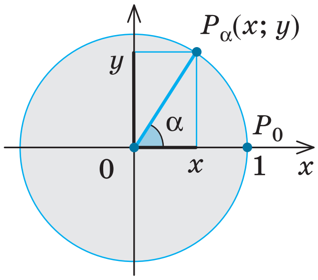
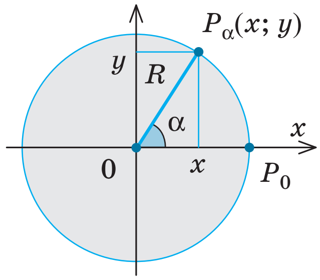
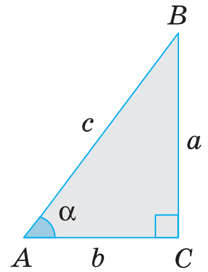


Рис. 15.3

§ 16 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ КУТА І ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

Таблиця 19

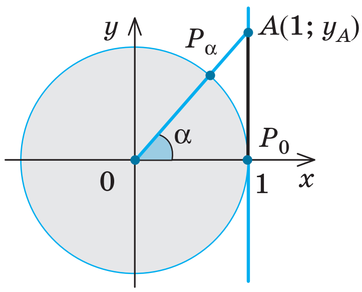
1. Означення тригонометричних функцій

через одиничне коло ($R=1$)	через довільне коло (R — радіус кола)	через прямокутний трикутник (для гострих кутів)
		
$\sin\alpha = y$ — ордината точки P_α; $\cos\alpha = x$ — абсциса точки P_α; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin\alpha = \frac{y}{R}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$; $\cos\alpha = \frac{x}{R}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

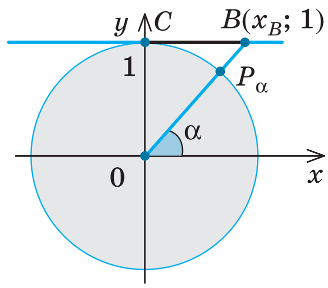
2. Тригонометричні функції числового аргумента

sin (числа α) = sin (кута в α радіан);
cos (числа α) = cos (кута в α радіан);
tg (числа α) = tg (кута в α радіан);
ctg (числа α) = ctg (кута в α радіан)

3. Лінії тангенсів і котангенсів



AP_0 — лінія тангенсів $(AP_0 \parallel Oy)$;
$\operatorname{tg}\alpha = y_A$ — ордината відповідної точки лінії тангенсів



CB — лінія котангенсів $(CB \parallel Ox)$;
$\operatorname{ctg}\alpha = x_B$ — абсциса відповідної точки лінії котангенсів

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Означення тригонометричних функцій

Із курсу геометрії вам відомі означення тригонометричних функцій гострого кута в прямокутному трикутнику й означення тригонометричних функцій кутів від 0° до 180° через коло радіуса R із центром у початку координат (див. табл. 19). Аналогічно можна дати означення тригонометричних функцій довільного кута, але для спрощення означень найчастіше вибирають радіус відповідного кола таким, що дорівнює 1 (з більш детальними відповідними поясненнями можна ознайомитися, звернувшися до інтернет-підтримки підручника).

Коло радіуса 1 із центром у початку координат будемо називати *одиничним колом*.

Нехай при повороті на кут α точка $P_0(1;0)$ переходить у точку $P_\alpha(x;y)$ (тобто

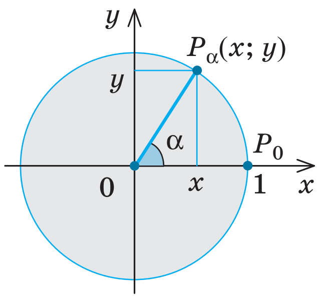


Рис. 16.1

при повороті на кут α радіус OP_0 переходить у радіус OP_α) (рис. 16.1).

Означення 1. **Синусом кута α називається ордината точки $P_\alpha(x;y)$ одиничного кола:** $\sin\alpha = y$.

Означення 2. **Косинусом кута α називається абсциса точки $P_\alpha(x;y)$ одиничного кола:** $\cos\alpha = x$.

Означення 3. **Тангенсом кута α називається відношення ординати точки $P_\alpha(x;y)$ одиничного кола до її абсциси, тобто відношення $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Отже,** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ **(де $\cos\alpha \neq 0$).**

Означення 4. **Котангенсом кута α називається відношення абсциси точки $P_\alpha(x;y)$ одиничного кола до її ординати, тобто відношення $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Отже,** $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ **(де $\sin\alpha \neq 0$).**

Приклад

Користуючись цими означеннями, знайдемо синус, косинус, тангенс і котангенс кута $\frac{2\pi}{3}$ радіан.

▶ Розглянемо одиничне коло (рис. 16.2).

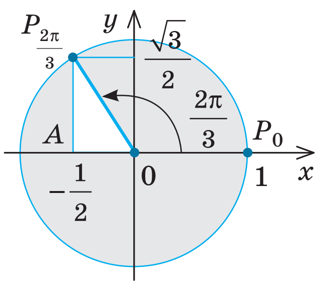


Рис. 16.2

Унаслідок повороту на кут $\frac{2\pi}{3}$ радіус OP_0 переходить у радіус $OP_{\frac{2\pi}{3}}$ (а точка P_0 переходить у точку $P_{\frac{2\pi}{3}}$). Координати точки $P_{\frac{2\pi}{3}}$ можна знайти, використовуючи властивості прямокутного трикутника $OAP_{\frac{2\pi}{3}}$ (з кутами 60° і 30° та гіпотенузою 1):

$x = -OA = -\frac{1}{2}$; $y = AP_{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тоді:

$$\sin\frac{2\pi}{3} = y = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos\frac{2\pi}{3} = x = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}} = -\sqrt{3}; \quad \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \triangleleft$$

Аналогічно знаходять значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кутів, указаних у верхньому рядку табл. 20. Зазначимо, що таким чином можна знайти тригонометричні функції тільки деяких кутів. Тригонометричні функції довільного кута зазвичай знаходять за допомогою калькулятора або таблиць.

Таблиця 20

α	градуси	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	радіани	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує	0
$\operatorname{ctg}\alpha$		не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не існує	0	не існує

2 Тригонометричні функції числового аргумента

Уведені означення дозволяють розглядати не тільки тригонометричні функції кутів, а й тригонометричні функції числових аргументів, якщо розглядати тригонометричні функції числа α як відповідні тригонометричні функції кута в α радіан. Отже:

- синус числа α — це синус кута в α радіан;
- косинус числа α — це косинус кута в α радіан.

Наприклад, $\sin\frac{\pi}{6}=\sin\left(\frac{\pi}{6}\text{ рад}\right)=$ $=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ (див. також п. 2 табл. 19).

3 Лінії тангенсів і котангенсів

Для розв'язування деяких задач корисно мати уявлення про лінії тангенсів і котангенсів.

Проведемо через точку P_0 одиничного кола пряму AP_0, паралельну осі Oy (рис. 16.3). Цю пряму називають *лінією тангенсів*.

Нехай α — довільне число (чи кут), для якого $\cos\alpha\neq 0$. Тоді точка P_α не лежить на осі Oy і пряма OP_α перетинає лінію тангенсів у точці A.

Оскільки пряма OP_α проходить через початок координат, то її рівняння $y=kx$. Але ця пряма проходить через точку P_α з координатами $(\cos\alpha;\sin\alpha)$, отже, координати точки P_α задовольняють рівняння прямої $y=kx$, тобто $\sin\alpha=k\cos\alpha$. Звідси

$$k=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Отже, рівняння прямої OP_α таке: $y=(\operatorname{tg}\alpha)x$.

Рівняння прямої AP_0 $x=1$. Щоб знайти ординату точки A, достатньо в рівняння прямої OP_α підставити $x=1$. Одержуємо $y_A=\operatorname{tg}\alpha$.

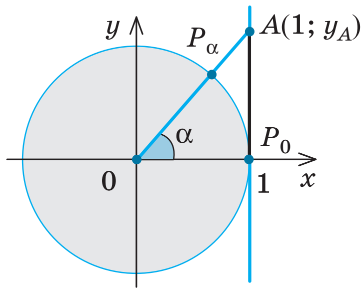


Рис. 16.3

Отже, тангенс кута (числа) α — це ордината відповідної точки на лінії тангенсів.

Аналогічно вводять і поняття *лінії котангенсів*: це пряма CB, що проходить через точку $C(0;1)$ одиничного кола паралельно осі Ox (рис. 16.4).

Якщо α — довільне число (чи кут), для якого $\sin\alpha \neq 0$ (тобто точка P_α не лежить на осі Ox), то пряма OP_α перетинає лінію котангенсів у деякій точці $B(x_B;1)$.

Аналогічно попередньому обґрунтовують, що $x_B = \operatorname{ctg}\alpha$. Отже, котангенс кута (числа) α — це абсциса відповідної точки на лінії котангенсів.

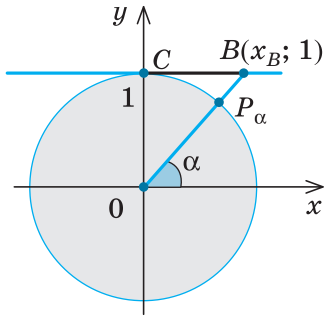


Рис. 16.4

Запитання

1. Сформулюйте означення тригонометричних функцій гострого кута в прямокутному трикутнику.
2. Сформулюйте означення тригонометричних функцій довільного кута:
   1) використовуючи коло радіуса R із центром у початку координат;
   2) використовуючи одиничне коло.
3. Що мають на увазі, коли говорять про синус, косинус, тангенс і котангенс числа α?

Вправи

16.1°. Побудуйте на одиничному колі точку P_α, у яку переходить точка $P_0(1;0)$ одиничного кола внаслідок повороту на кут α:

1) $\alpha = 3\pi$; 3) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; 5) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$;

2) $\alpha = -4\pi$; 4) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; 6) $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

У якій координатній чверті міститься точка P_α у завданнях 3–6?

16.2. Знайдіть значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ (якщо вони існують) при:

1) $\alpha = 3\pi$; 3) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; 5*) $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$;

2) $\alpha = -4\pi$; 4) $\alpha = \frac{5\pi}{2}$; 6*) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

16.3°. Користуючись означенням синуса і косинуса, за допомогою одиничного кола вкажіть знаки $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо:

1) $\alpha = \frac{6\pi}{5}$; 2) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$; 3) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; 4) $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$; 5) $\alpha = \frac{\pi}{10}$.

16.4*. Користуючись лінією тангенсів, укажіть знак $\operatorname{tg}\alpha$, якщо:

1) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$; 2) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha = \frac{11\pi}{6}$; 4) $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$; 5) $\alpha = \frac{9\pi}{4}$.

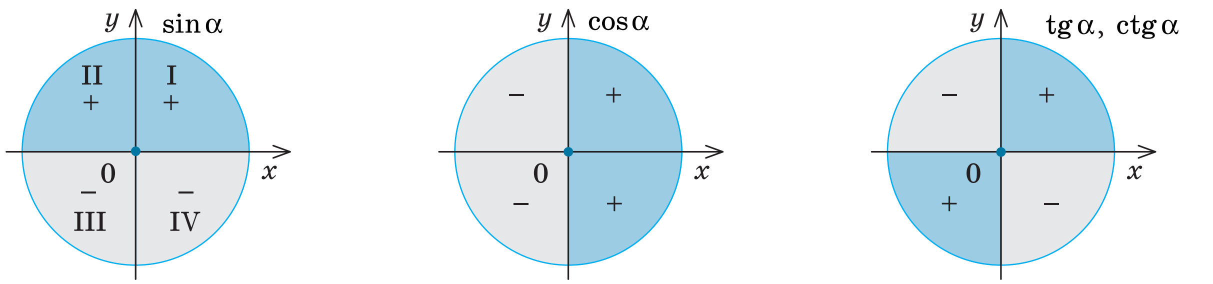
16.5*. Користуючись лінією котангенсів, укажіть знак $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо:

1) $\alpha = -\frac{4\pi}{3}$; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha = -\frac{11\pi}{6}$; 4) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; 5) $\alpha = -\frac{9\pi}{4}$.

§ 17 ВЛАСТИВОСТІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Таблиця 21

1. Знаки тригонометричних функцій



2. Парність і непарність

Косинус — парна функція

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

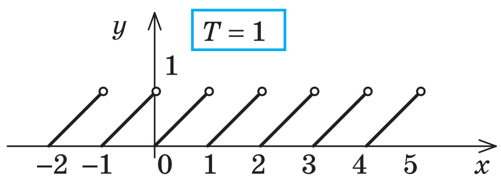
Синус, тангенс і котангенс — непарні функції

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$; $\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$

3. Періодичність

Функція $f(x)$ називається *періодичною* з періодом $T\neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення функції числа $(x+T)$ і $(x-T)$ також належать області визначення і виконується рівність $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$.

$y=\{x\}$ — дробова частина числа x



Через проміжки довжиною T (на осі Ox) вигляд графіка періодичної функції повторюється

Якщо T — період функції, то $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$, ..., $\pm kT$ — також періоди цієї функції $(k\in \boldsymbol{Z})$

$\sin(x+2\pi)=\sin x$; $\cos(x+2\pi)=\cos x$

Функції $\sin x$ і $\cos x$ мають період $T=2\pi$

$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}x$; $\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg}x$

Функції $\operatorname{tg}x$ і $\operatorname{ctg}x$ мають період $T=\pi$

$T=2\pi$ — спільний період для всіх функцій: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}x$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Знаки тригонометричних функцій

Знаки тригонометричних функцій легко визначити, виходячи з означення цих функцій.

Наприклад, $\sin\alpha$ — це ордината відповідної точки P_α одиничного кола. Тоді значення $\sin\alpha$ буде додатним, якщо точка P_α має додатну ординату, тобто коли

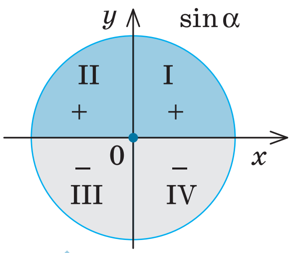


Рис. 17.1

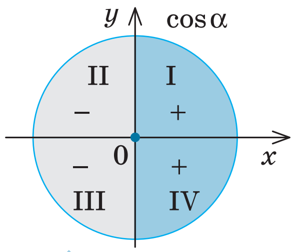


Рис. 17.2

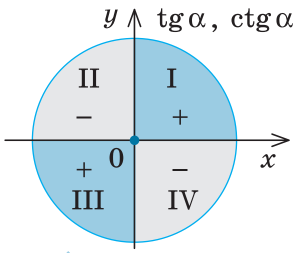


Рис. 17.3

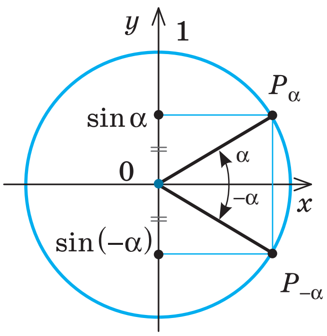


Рис. 17.4

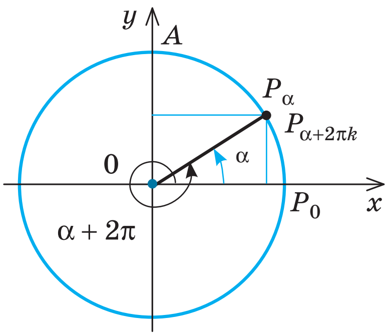


Рис. 17.5

точка P_α розташована в I або II координатній чверті (рис. 17.1). Якщо точка P_α розташована в III або IV чверті, то її ордината від'ємна, і тому $\sin\alpha$ теж від'ємний.

Аналогічно, ураховуючи, що $\cos\alpha$ — це абсциса відповідної точки P_α, одержуємо, що $\cos\alpha > 0$ в I і IV чвертях (абсциса точки P_α додатна) і $\cos\alpha < 0$ в II і III чвертях (абсциса точки P_α від'ємна) — рис. 17.2.

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ там, де $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ мають однакові знаки, тобто в I і III чвертях, $\operatorname{tg}\alpha < 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha < 0$ там, де $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ мають різні знаки, тобто в II і IV чвертях (рис. 17.3).

2 Парність і непарність тригонометричних функцій

Щоб дослідити тригонометричні функції на парність і непарність, зазначимо, що на одиничному колі точки P_α і $P_{-\alpha}$ розміщено симетрично відносно осі Ox (рис. 17.4). Отже, ці точки мають однакові абсциси і протилежні ординати. Тоді

$$\cos(-\alpha) = x_{P_{-\alpha}} = x_{P_\alpha} = \cos\alpha,$$

$$\sin(-\alpha) = y_{P_{-\alpha}} = -y_{P_\alpha} = -\sin\alpha.$$

Таким чином, $\cos x$ — **парна функція**,
$\sin x$ — **непарна функція.**

Тоді $\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Отже, $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ — **непарні функції.**

Парність і непарність тригонометричних функцій можна використовувати для обчислення значень тригонометричних функцій від'ємних кутів (чисел).

Наприклад, $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3 Періодичність тригонометричних функцій

Багато процесів і явищ, що відбуваються в природі й техніці, мають повторюваний характер (наприклад, рух Землі навколо Сонця, рух маховика). Для опису такого роду процесів використовують так звані періодичні функції.

Означення. **Функція $y = f(x)$ називається *періодичною* з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення функції числа $(x+T)$ і $(x-T)$ також належать області визначення і виконується рівність**

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x).$$

Ураховуючи, що на одиничному колі числам (кутам) α і $\alpha + 2\pi k$, де $k \in \mathbf{Z}$, відповідає та сама точка (рис. 17.5), одер-

жуємо $\sin(\alpha+2\pi k)=\sin\alpha$,
$\cos(\alpha+2\pi k)=\cos\alpha$.

Тоді $2\pi k$ $(k\neq 0)$ є періодом функцій $\sin x$ і $\cos x$.

При $k=1$ одержуємо, що $T=2\pi$ — це найменший додатний період функцій $\sin x$ і $\cos x$.

Обґрунтуйте інші властивості тригонометричних функцій, наведені в табл. 21, самостійно. У разі потреби зверніться до інтернет-підтримки підручника.

Зазначимо, що однією із властивостей періодичних функцій є така: через проміжок T вигляд графіка періодичної функції буде повторюватися (див. обґрунтування в інтернет-підтримці підручника). Тому для **побудови графіка періодичної функції з періодом T достатньо побудувати графік на будь-якому проміжку довжиною T** (наприклад, на проміжку $[0;T]$), **а потім одержану лінію паралельно перенести праворуч і ліворуч уздовж осі Ox на відстані kT, де k — будь-яке натуральне число** (рис. 17.6)

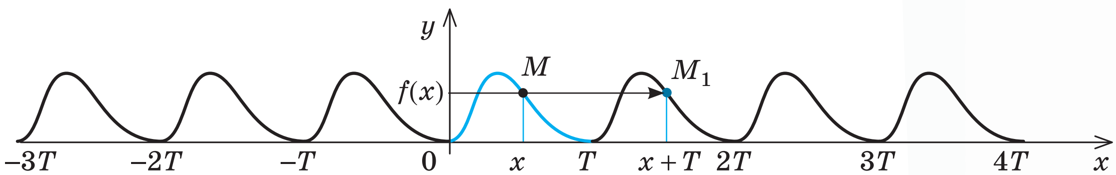


Рис. 17.6

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Користуючись періодичністю, парністю і непарністю тригонометричних функцій, знайдіть:

1) $\sin\frac{21\pi}{2}$; 2) $\cos(-405°)$; 3) $\operatorname{tg}\frac{16\pi}{3}$; 4) $\operatorname{ctg}(-570°)$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ $\sin\frac{21\pi}{2}=\sin\left(10\pi+\frac{\pi}{2}\right)=$ $=\sin\left(5\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$. ◁	1) Ураховуючи, що значення функції $\sin x$ повторюються, через період 2π, виділимо в заданому аргументі число, кратне періоду (тобто 10π), а потім скористаємося рівністю $\sin(\alpha+2\pi k)=\sin\alpha$ $(k\in \boldsymbol{Z})$.
2) ▶ $\cos(-405°)=\cos 405°=$ $=\cos(360°+45°)=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ◁	2) Спочатку враховуємо парність косинуса: $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, а потім його періодичність із періодом $2\pi=360°$: $\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha$.
3) ▶ $\operatorname{tg}\frac{16\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(5\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. ◁	3) Функція тангенс періодична з періодом π, тому виділяємо в заданому аргументі число, кратне періоду (тобто 5π), а потім використовуємо рівність $\operatorname{tg}(\alpha+\pi k)=\operatorname{tg}\alpha$.
4) ▶ $\operatorname{ctg}(-570°)=-\operatorname{ctg}570°=$ $=-\operatorname{ctg}(540°+30°)=$ $=-\operatorname{ctg}(180°\cdot 3+30°)=$ $=-\operatorname{ctg}30°=-\sqrt{3}$. ◁	4) Спочатку враховуємо непарність котангенса: $\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$, а потім його періодичність із періодом $\pi=180°$: $\operatorname{ctg}(\alpha+180°\cdot k)=\operatorname{ctg}\alpha$

Приклад 2*

Доведіть твердження: **якщо функція** $y=f(x)$ **періодична з періодом** T**, то функція** $y=Af(kx+b)$ **також періодична з періодом** $\frac{T}{|k|}$ (A, k, b — деякі числа і $k\neq 0$).

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай $\varphi(x)=Af(kx+b)$ і $T_1=\frac{T}{\lvert k\rvert}$. Тоді $\varphi(x+T_1)=Af\left(k(x+T_1)+b\right)=$ $=Af\left(k\left(x+\frac{T}{\lvert k\rvert}\right)+b\right)=Af(kx\pm T+b)=$ $=Af(kx+b\pm T)=Af(kx+b)=\varphi(x)$, а це й означає, що функція $\varphi(x)=Af(kx+b)$ має період $T_1=\frac{T}{\lvert k\rvert}$. Зазначимо, що одержана рівність $\varphi(x+T_1)=\varphi(x)$ при підстановці замість x значення $x-T_1$ перетворюється в рівність $\varphi(x)=\varphi(x-T_1)$. Отже, $\varphi(x-T_1)=\varphi(x+T_1)=\varphi(x)$ і T_1 дійсно є періодом функції $\varphi(x)$. ◁	За означенням функція $\varphi(x)=Af(kx+b)$ буде періодичною з періодом $T_1=\frac{T}{\lvert k\rvert}$, якщо для будь-якого x з області визначення φ значення цієї функції в точках x і $x+T_1$ рівні, тобто $\varphi(x+T_1)=\varphi(x)$. У ході обґрунтування враховано, що вираз $k\cdot\frac{T}{\lvert k\rvert}$ при $k>0$ дорівнює $k\cdot\frac{T}{k}=T$, а при $k<0$ дорівнює $k\cdot\frac{T}{-k}=-T$. Також ураховано, що функція $f(x)$ за умовою періодична з періодом T, і тому $f(x_1\pm T)=f(x_1)$, де $x_1=kx+b$.

Використаємо твердження, доведене в прикладі 2, для знаходження періодів функцій. Наприклад,

1) ▶ якщо функція $\sin x$ має найменший додатний період $T=2\pi$, то функція $\sin 4x$ має найменший додатний період

$$T_1=\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2};\ \triangleleft$$

2) ▶ якщо функція $\operatorname{tg} x$ має найменший додатний період $T=\pi$, то функція $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ має найменший додатний період

$$T_1=\frac{T}{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{\frac{1}{4}}=4\pi.\ \triangleleft$$

Запитання

1. Назвіть і обґрунтуйте знаки тригонометричних функцій у кожній із координатних чвертей.
2. 1) Які з тригонометричних функцій є парними, а які — непарними? Наведіть приклади використання парності і непарності для обчислення значень тригонометричних функцій.
   2) Обґрунтуйте парність чи непарність відповідних тригонометричних функцій.
3. 1) Яка функція називається періодичною? Наведіть приклади.
   2) Обґрунтуйте періодичність тригонометричних функцій. Укажіть найменший додатний період для синуса, косинуса, тангенса і котангенса та обґрунтуйте, що в кожному випадку цей період дійсно є найменшим додатним періодом.

Вправи

17.1. Користуючись періодичністю, парністю і непарністю тригонометричної функції, знайдіть:

1) $\cos\frac{19\pi}{3}$; 3) $\mathrm{tg}\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$; 5) $\sin\frac{25\pi}{4}$; 7) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$;

2) $\sin(-750°)$; 4) $\mathrm{ctg}\,945°$; 6) $\cos(-3630°)$; 8) $\mathrm{tg}\,600°$.

17.2*. Серед заданих функцій знайдіть періодичні й укажіть найменший додатний період для кожної з них:

1) $f(x)=x^2$; 3) $f(x)=|x|$; 5) $f(x)=3$.

2) $f(x)=\sin 2x$; 4) $f(x)=\mathrm{tg}\,3x$;

17.3. Знайдіть найменший додатний період кожної із заданих функцій:

1) $y=\cos 2x$; 3) $y=\sin\frac{x}{3}$; 5) $y=\cos\frac{2x}{5}$.

2) $y=\mathrm{tg}\,5x$; 4) $y=\mathrm{ctg}\,3x$;

17.4. На кожному з рисунків 17.7–17.10 наведено частину графіка деякої періодичної функції з періодом T. Продовжте графік на відрізок $[-2T; 3T]$.

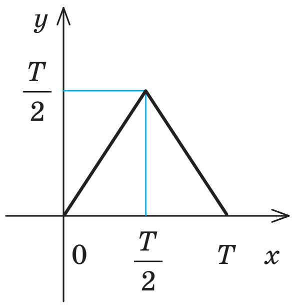


Рис. 17.7

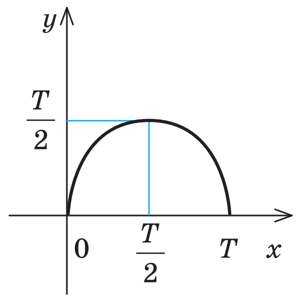


Рис. 17.9

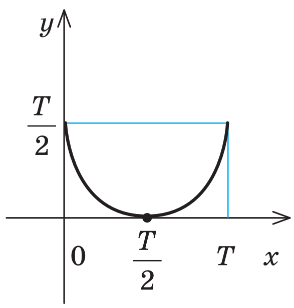


Рис. 17.8

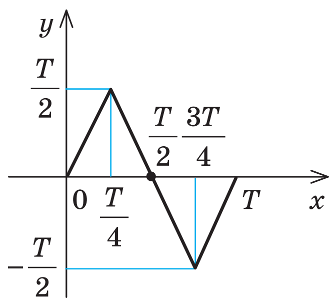


Рис. 17.10

Виявіть свою компетентність

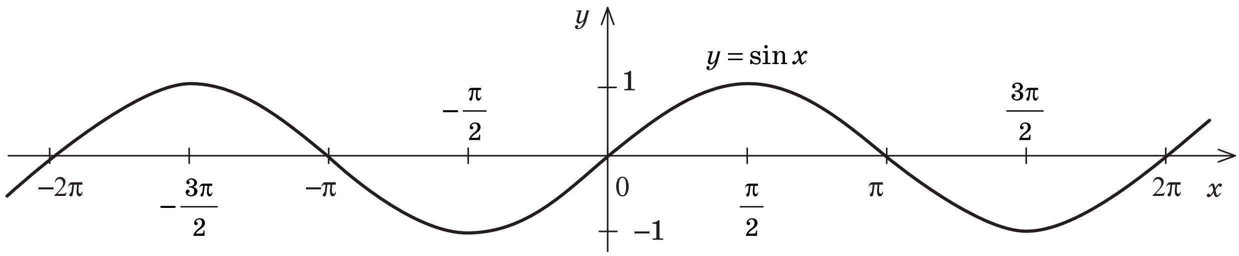
17.5. Як, на вашу думку, періодичність функцій пов’язана з професійною діяльністю лікаря-кардіолога?

§ 18 ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА І КОТАНГЕНСА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

18.1. Графік функції $y = \sin x$ та її властивості

Таблиця 22

Графік функції $y = \sin x$ (синусоїда)



Властивості функції $y = \sin x$

1. *Область визначення*: $x \in \boldsymbol{R}$ (x — будь-яке дійсне число).
$\boxed{D(\sin x) = \boldsymbol{R}}$.

2. *Область значень*: $y \in [-1; 1]$.
$\boxed{E(\sin x) = [-1; 1]}$.

3. Функція **непарна**: $\sin(-x) = -\sin x$ (графік симетричний відносно початку координат).

4. *Функція періодична* з періодом $\boxed{T = 2\pi}$:
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

5. *Точки перетину з осями координат*:
Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}}$ Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}}$

6. *Проміжки знакосталості*:

$\sin x > 0$ **при** $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$

$\sin x < 0$ **при** $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

7. *Проміжки зростання і спадання*:

функція $\sin x$ **зростає на кожному з проміжків** $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$ і **спадає на кожному з проміжків** $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

8.

Найбільше значення функції дорівнює 1 при
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Найменше значення функції дорівнює −1 при
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Характеризуючи властивості тригонометричних функцій, ми будемо виділяти такі їх характеристики: 1) область визначення; 2) область значень; 3) парність чи непарність; 4) періодичність; 5) точки перетину з осями координат; 6) проміжки знакосталості; 7) проміжки зростання і спадання; 8) найбільше і найменше значення функції.

Зауваження. **Абсциси точок перетину графіка функції з віссю** Ox **(тобто ті значення аргумента, при яких функція дорівнює нулю) називають** *нулями функції*.

Наведемо обґрунтування властивостей функції $y=\sin x$ (обґрунтуваня властивостей інших тригонометричних функцій (див. табл. 23–25) проведіть самостійно, спираючись на інтернет-підтримку підручника).

Нагадаємо, що значення синуса — це ордината відповідної точки одиничного кола (рис. 18.1.1). Оскільки ординату можна знайти для будь-якої точки одиничного кола, то область визначення функції $y=\sin x$ — усі дійсні числа. Це можна записати так: $D(\sin x)=\boldsymbol{R}$.

Для точок одиничного кола ординати набувають усіх значень від –1 до 1, отже, область значень функції $y=\sin x$: $y\in[-1;1]$. Це можна записати так: $E(\sin x)=[-1;1]$.

Як бачимо, *найбільше значення функції* $\sin x$ дорівнює одиниці. Цього значення функція досягає тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка A, тобто при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Найменше значення функції $\sin x$ дорівнює мінус одиниці, якого вона досягає тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка B, тобто при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Оскільки синус — *непарна функція*: $\sin(-x)=-\sin x$, її графік симетричний відносно початку координат.

У § 17 було обґрунтовано, що синус — *періодична* функція з найменшим додатним періодом $T=2\pi$: $\sin(x+2\pi)=\sin x$, отже, через проміжки довжиною 2π вигляд графіка функції $\sin x$ повторюється. Тому достатньо побудувати її графік на будь-якому проміжку довжиною 2π, а потім одержану лінію паралельно перенести праворуч і ліворуч уздовж осі Ox на відстані $kT=2\pi k$, де k — будь-яке натуральне число.

Щоб знайти *точки перетину графіка функції з осями координат*, згадаємо, що на осі Oy значення $x=0$. Тоді $y=\sin 0=0$, тобто графік функції $y=\sin x$ проходить через початок координат.

На осі Ox значення $y=0$. Отже, нам потрібні такі значення x, при яких $\sin x$, тобто ордината відповідної точки одиничного кола, дорівнюватиме нулю. Це буде тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола буде точка C або D (рис. 18.1.1), тобто при $x=\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Проміжки знакосталості. Як було обґрунтовано в § 17, значення функції синус додатні (тобто ордината відповідної точки одиничного кола додатна) у I і II координатних чвертях (рис. 18.1.2). Отже, $\sin x>0$ при $x\in(0;\pi)$, а також, ураховуючи період, при всіх $x\in(2\pi k;\pi+2\pi k)$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Значення функції синус від'ємні (тобто ордината відповідної точки одиничного кола від'ємна) у III і IV чвертях, отже, $\sin x<0$ при $x\in(\pi+2\pi k;2\pi+2\pi k)$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Проміжки зростання і спадання

- Ураховуючи періодичність функції $\sin x$ з періодом $T=2\pi$, достатньо дослідити її на зростання і спадання на будь-якому проміжку довжиною 2π, наприклад на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Якщо $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 18.1.3, *а*), то при збільшенні аргумента x $(x_2>x_1)$ ордината відповідної точки одиничного кола

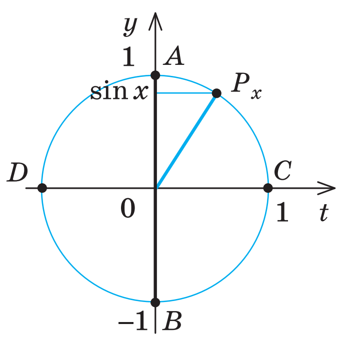


Рис. 18.1.1

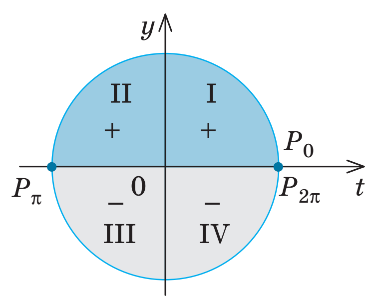
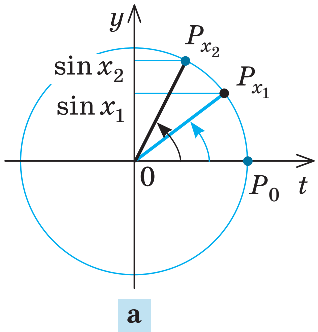


Рис. 18.1.2



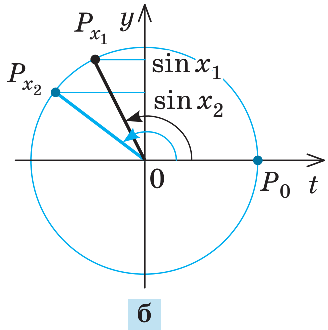


Рис. 18.1.3

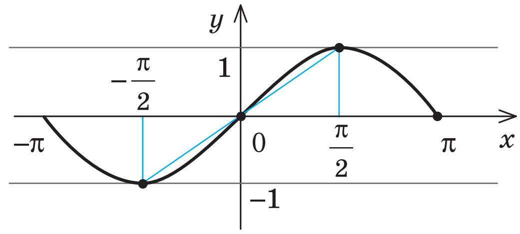


Рис. 18.1.5

збільшується (тобто $\sin x_2 > \sin x_1$, отже, у цьому проміжку функція $\sin x$ зростає. Ураховуючи періодичність, робимо висновок, що вона також зростає в кожному з проміжків $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Якщо $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (рис. 18.1.3, *б*), то при збільшенні аргумента x $(x_2 > x_1)$ ордината відповідної точки одиничного кола зменшується (тобто $\sin x_2 < \sin x_1$), отже, у цьому проміжку функція $\sin x$ спадає. Ураховуючи періодичність, робимо висновок, що вона також спадає в кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ○

Проведене дослідження дозволяє обґрунтовано побудувати графік функції $y = \sin x$. Ураховуючи періодичність цієї функції (з періодом 2π), достатньо спочатку побудувати графік на будь-якому проміжку довжиною 2π, наприклад на проміжку $[-\pi; \pi]$. Для більш точної побудови точок графіка користуємося тим, що значення синуса — це ордината відповідної точки одиничного кола. На рис. 18.1.4 показано побудову* графіка функції $y = \sin x$ на проміжку $[0; \pi]$. Ураховуючи непарність функції $\sin x$ (її графік симетричний відносно початку координат), для того щоб побудувати графік на проміжку $[-\pi; 0]$, відображуємо одержану криву симетрично відносно початку координат (рис. 18.1.5).

Оскільки ми побудували графік на проміжку завдовжки 2π, то, ураховуючи періодичність синуса (з періодом 2π), повторюємо вигляд графіка на кожному проміжку завдовжки 2π (тобто переносимо паралельно графік уздовж осі Ox на $2\pi k$, де k — ціле число).

Одержуємо графік, наведений в табл. 22, який називають *синусоїдою*.

* В інтернет-підтримці підручника наведено динамічну ілюстрацію відповідної побудови.

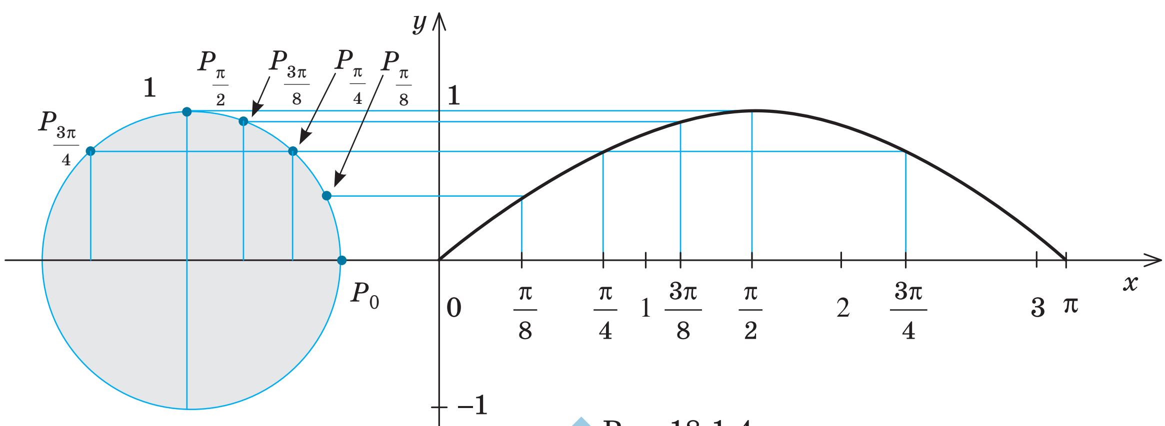


Рис. 18.1.4

Зауваження. **Тригонометричні функції широко застосовують у математиці, фізиці та техніці. Наприклад, багато процесів, таких як коливання струни, маятника, напруги в колі змінного струму тощо, описуються функцією, яку задають формулою** $y = A\sin(\omega x + \varphi)$. **Такі процеси називають** ***гармонічними коливаннями.***

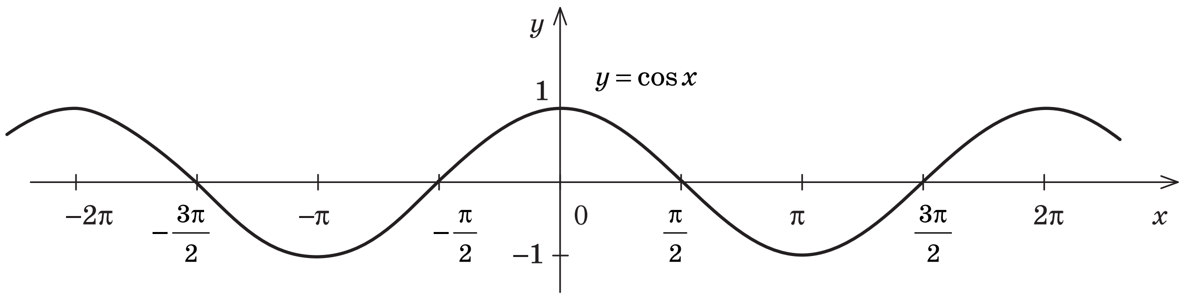
Графік функції $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ можна одержати із синусоїди $y = \sin x$ стискуванням або розтягуванням її вздовж координатних осей і паралельним перенесенням уздовж осі Ox. Найчастіше гармонічне коливання є функцією часу t. Тоді його задають формулою $y = A\sin(\omega t + \varphi)$, де A — амплітуда коливання, ω — кутова частота, φ — початкова фаза, $\frac{2\pi}{\omega}$ — період коливання (якщо $A > 0$, $\omega > 0$, $\varphi \geqslant 0$).

Наведіть інші приклади реальних процесів, які, на вашу думку, можуть бути описані тригонометричними функціями.

18.2. Графік функції $y = \cos x$ та її властивості

Таблиця 23

Графік функції $y = \cos x$ (косинусоїда)



Властивості функції $y = \cos x$

1. *Область визначення*: $x \in \boldsymbol{R}$ (x — будь–яке дійсне число). $\boxed{D(\cos x) = \boldsymbol{R}}$.

2. *Область значень*: $y \in [-1; 1]$.

$\boxed{E = (\cos x) = [-1; 1]}$.

3. ***Функція парна***: $\cos(-x) = \cos x$ (графік симетричний відносно осі Oy).

4. *Функція періодична з періодом* $\boxed{T = 2\pi}$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

5. *Точки перетину з осями координат*:

Oy $\begin{cases} x = 0, \\ y = 1; \end{cases}$ Ox $\begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$

6. *Проміжки знакосталості*:

$\cos x > 0$ **при** $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\cos x < 0$ **при** $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

7. *Проміжки зростання і спадання*:

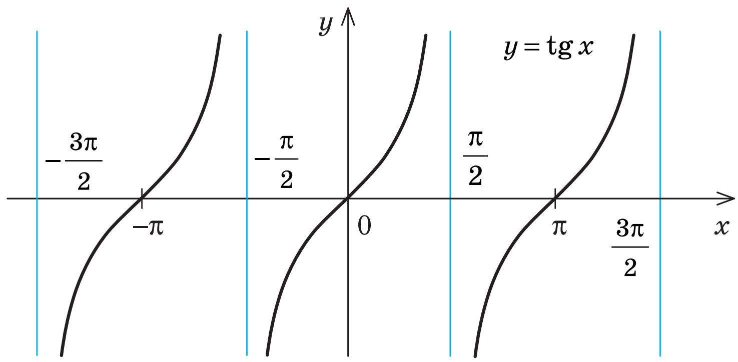
функція $\cos x$ **зростає на кожному з проміжків** $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$ **і спадає на кожному з проміжків** $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$

8. **Найбільше значення** функції дорівнює 1 при $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
Найменше значення функції дорівнює -1 при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$

18.3. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ та її властивості

Таблиця 24

Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ (тангенсоїда)



Властивості функції $y = \operatorname{tg} x$

1. *Область визначення*:
$\boxed{D(\operatorname{tg} x): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}}$.

2. *Область значень*: $y \in \boldsymbol{R}$. $\boxed{E(\operatorname{tg} x) = \boldsymbol{R}}$.

3. *Функція* ***непарна***: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ (*графік симетричний відносно початку координат*).

4. *Функція періодична* з періодом $\boxed{T = \pi}$:
$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$.

5. *Точки перетину з осями координат*:
Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}}$ Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}}$

6. *Проміжки знакосталості*:
$\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

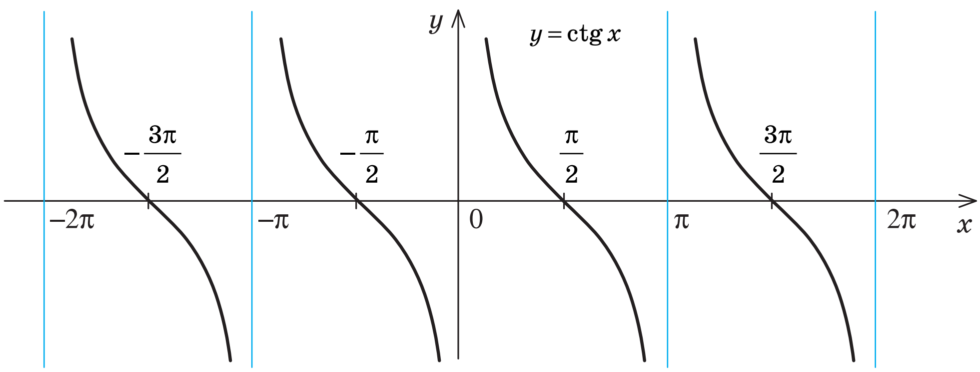
7. *Проміжки зростання і спадання*:
функція $\operatorname{tg} x$ **зростає на кожному з проміжків своєї області визначення**, тобто на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

8. ***Найбільшого і найменшого значень* функція не має.**

18.4. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ та її властивості

Таблиця 25

Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ (котангенсоїда)



Властивості функції $y=\operatorname{ctg}x$

1. *Область визначення:*
$\boxed{D(\operatorname{ctg}x):\ x\neq \pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}}$.

2. *Область значень:* $y\in \boldsymbol{R}$. $\boxed{E(\operatorname{ctg}x)=\boldsymbol{R}}$.

3. *Функція* ***непарна***: $\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg}x$ (*графік симетричний відносно початку координат*).

4. *Функція періодична з періодом* $\boxed{T=\pi}$:
$$\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg}x.$$

5. *Точки перетину з осями координат:*
Oy **немає**, Ox $\boxed{\begin{cases} y=0,\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.\end{cases}}$

6. *Проміжки знакосталості:*
$\operatorname{ctg}x>0$ при $x\in\left(\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in \boldsymbol{Z}$,
$\operatorname{ctg}x<0$ при $x\in\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ \pi+\pi k\right)$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

7. *Проміжки зростання і спадання:*
функція $\operatorname{ctg}x$ **спадає на кожному з проміжків** своєї області визначення, тобто на кожному з проміжків $(\pi k;\ \pi+\pi k)$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

8. ***Найбільшого і найменшого значень функція не має.***

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Побудуйте графік функції та вкажіть нулі функції та проміжки знакосталості функції:

1) $y=2\sin x$; 2) $y=\sin 2x$.

Коментар

Графіки всіх заданих функцій можна одержати за допомогою геометричних перетворень (табл. 4) графіка функції $f(x)=\sin x$. Отже, графіком кожної з цих функцій буде синусоїда, одержана:

1) $y=2\sin x=2f(x)$ розтягуванням графіка $y=\sin x$ удвічі вздовж осі Oy;
2) $y=\sin 2x=f(2x)$ стискуванням графіка $y=\sin x$ удвічі вздовж осі Ox.

Нулі функції — це абсциси точок перетину графіка з віссю Ox.

Щоб записати проміжки знакосталості функції, зазначимо, що функція $y=2\sin x$ періодична з періодом $T=2\pi$, а функція $y=\sin 2x$ періодична з періодом $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

Тому для кожної функції достатньо з'ясувати на одному періоді, де значення функції додатні (графік розташований вище осі Ox) і де від'ємні (графік розташований нижче осі Ox), а потім одержані проміжки повторити через період.

Розв'язання

1) ▶ Графік функції $y=2\sin x$ одержуємо із графіка функції $y=\sin x$ розтягуванням його вдвічі вздовж осі Oy (рис. 18.4.1).
Нулі функції: $x=\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Проміжки знакосталості:
$2\sin x>0$ при $x\in(2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, $k\in \boldsymbol{Z}$;
$2\sin x<0$ при $x\in(\pi+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k)$, $k\in \boldsymbol{Z}$. ◁

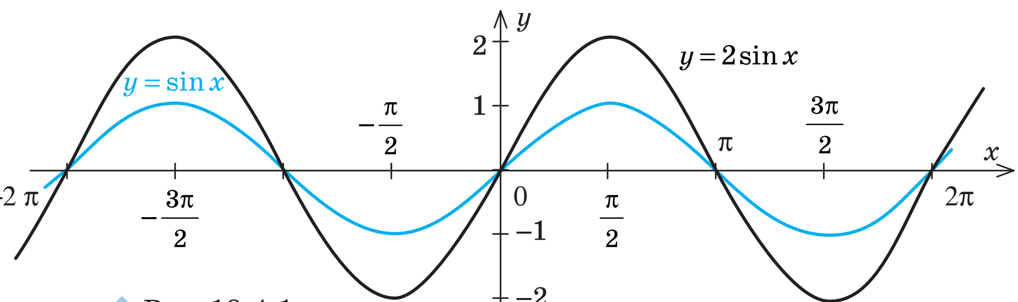


Рис. 18.4.1

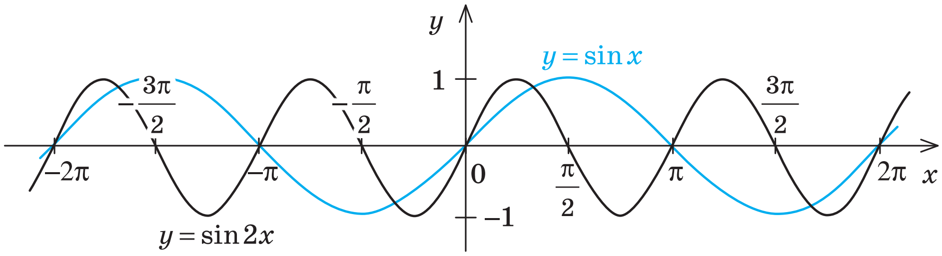


Рис. 18.4.2

2) ▶Графік функції $y=\sin 2x$ одержуємо із графіка функції $y=\sin x$ стискуванням його вдвічі вздовж осі Ox (рис. 18.4.2).

Нулі функції: $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Проміжки знакосталості: $\sin 2x>0$ при $x\in\left(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

$\sin 2x<0$ при $x\in\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi+\pi k\right)$, $k\in \boldsymbol{Z}$. ◁

Приклад 2 Розташуйте в порядку зростання числа: $\sin 1{,}9$; $\sin 3$; $\sin(-1)$; $\sin(-1{,}5)$.

Розв'язання	Коментар
▶ Числа $\sin 1{,}9$ і $\sin 3$ — додатні (точки $P_{1,9}$ і P_3 розташовані в II чверті), а числа $\sin(-1)$ і $\sin(-1{,}5)$ — від'ємні (P_{-1} і $P_{-1,5}$ розташовані в IV чверті). Ураховуючи, що $\frac{\pi}{2}<1{,}9<\pi$, $\frac{\pi}{2}<3<\pi$ і що функція $\sin x$ спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, з нерівності $1{,}9<3$ одержуємо $\sin 1{,}9>\sin 3$. Також $-\frac{\pi}{2}<-1<0$, $-\frac{\pi}{2}<-1{,}5<0$. Функція $\sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ зростає. Ураховуючи, що $-1>-1{,}5$, одержуємо $\sin(-1)>\sin(-1{,}5)$. Отже, у порядку зростання ці числа розташовуються так: $\sin(-1{,}5)$; $\sin(-1)$; $\sin 3$; $\sin 1{,}9$. ◁	Для того щоб розмістити задані числа в порядку їх зростання, з'ясуємо, які з них додатні, а які — від'ємні, а потім порівняємо між собою окремо додатні числа і окремо від'ємні, користуючись відомими проміжками зростання і спадання функції $\sin x$.

Зауваження. Для порівняння заданих чисел можна також зобразити точки $P_{1,9}$, P_3, P_{-1}, $P_{-1,5}$ на одиничному колі і порівняти відповідні ординати (виконайте таке розв'язування самостійно).

Приклад 3 Побудуйте графік функції та вкажіть проміжки її спадання і зростання:

1) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y=-\operatorname{tg} x$.

Коментар

Графіки заданих функцій можна одержати за допомогою геометричних перетворень графіків функцій:

1) $f(x)=\cos x$; 2) $\varphi(x)=\operatorname{tg} x$.

Тоді одержуємо графіки:

1) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ — паралельним перенесенням графіка функції $f(x)$ уздовж осі Ox на $\frac{\pi}{6}$ одиниць;

2) $y=-\operatorname{tg}x=-\varphi(x)$ — симетрією графіка функції $\varphi(x)$ відносно осі Ox.
Щоб записати проміжки спадання і зростання функцій, зазначимо, що функція $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ періодична з періодом $T=2\pi$, а функція $y=-\operatorname{tg}x$ періодична з періодом $T=\pi$. Тому для кожної функції достатньо з'ясувати на одному періоді, де вона спадає і де зростає, а потім одержані проміжки повторити через період.

Розв'язання

1) ► Графік функції $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ одержуємо із графіка функції $y=\cos x$ його паралельним перенесенням уздовж осі Ox на $\frac{\pi}{6}$ одиниць (рис. 18.4.3). Функція спадає на кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$, і зростає на кожному з проміжків $\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$. ◁

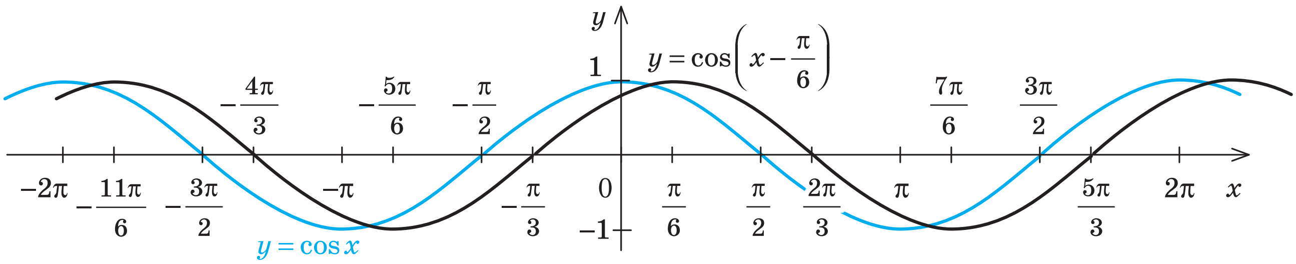


Рис. 18.4.3

2) ► Графік функції $y=-\operatorname{tg}x$ одержуємо симетричним відображенням графіка функції $y=\operatorname{tg}x$ відносно осі Ox (рис. 18.4.4).

Функція спадає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. ◁

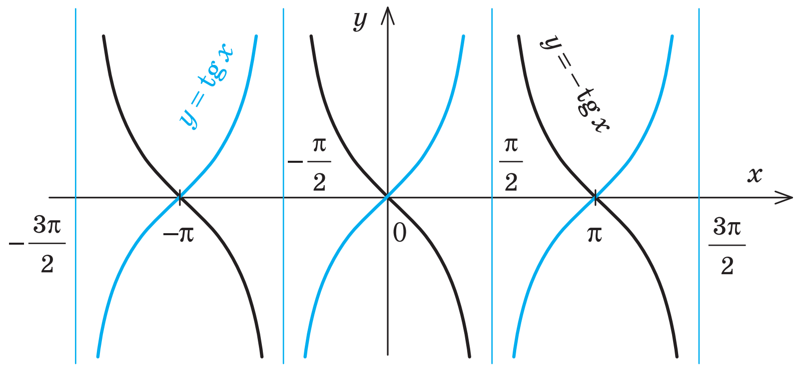


Рис. 18.4.4

Запитання

1. 1) Побудуйте графік функції $y=\sin x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функції.
2*) Обґрунтуйте властивості функції $y=\sin x$.

2. 1) Побудуйте графік функції $y=\cos x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функції.
2*) Обґрунтуйте властивості функції $y=\cos x$.

3. 1) Побудуйте графік функції $y=\operatorname{tg}x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функції.
2*) Обґрунтуйте властивості функції $y=\operatorname{tg}x$.

4. 1) Побудуйте графік функції $y=\operatorname{ctg}x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функції.
2*) Обґрунтуйте властивості функції $y=\operatorname{ctg}x$.

Вправи

18.1. Користуючись властивостями функції $y = \sin x$, порівняйте числа:

1°) $\sin 100°$ і $\sin 130°$; 2) $\sin 1°$ і $\sin 1$; 3°) $\sin \frac{21\pi}{5}$ і $\sin \frac{12\pi}{5}$.

18.2. Користуючись властивостями функції $y = \cos x$, порівняйте числа:

1°) $\cos 10°$ і $\cos 40°$; 2) $\cos(-2)$ і $\cos(-3)$; 3) $\cos \frac{3\pi}{7}$ і $\cos \frac{6\pi}{7}$.

18.3. Користуючись властивостями функції $y = \operatorname{tg} x$, порівняйте числа:

1°) $\operatorname{tg} 15°$ і $\operatorname{tg} 140°$; 2°) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}$ і $\operatorname{tg} \frac{10\pi}{9}$; 3) $\operatorname{tg}(-1{,}2\pi)$ і $\operatorname{tg}(-0{,}1\pi)$.

18.4. Користуючись властивостями функції $y = \operatorname{ctg} x$, порівняйте числа:

1) $\operatorname{ctg} 3°$ і $\operatorname{ctg} 5°$; 2) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{10}$ і $\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{10}$; 3) $\operatorname{ctg}(-1)$ і $\operatorname{ctg}(-1{,}2)$.

18.5. Розташуйте числа в порядку їх зростання:

1) $\sin 3{,}3$, $\sin 3{,}9$, $\sin 1{,}2$; 3) $\operatorname{tg} 0{,}7$, $\operatorname{tg}(-1{,}3)$, $\operatorname{tg} 1{,}5$;

2) $\cos 0{,}3$, $\cos 1{,}9$, $\cos 1{,}2$; 4) $\operatorname{ctg} 0{,}5$, $\operatorname{ctg} 2{,}9$, $\operatorname{ctg} 1{,}1$.

У завданнях 18.6–18.9 побудуйте графік функції та вкажіть нулі функції та проміжки знакосталості.

18.6. 1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $y = \sin(-x)$; 5°) $y = 3\sin x$;

2°) $y = \sin \frac{x}{3}$; 4°) $y = -\sin x$; 6*) $y = \sin x + |\sin x|$.

18.7. 1) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 3) $y = \cos(-x)$; 5°) $y = 2\cos x$;

2°) $y = \cos 3x$; 4°) $y = -\cos x$; 6*) $y = \cos x - |\cos x|$.

18.8. 1) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \operatorname{tg}(-x)$; 5) $y = |\operatorname{tg} x|$.

2) $y = \operatorname{tg} 2x$; 4) $y = \operatorname{tg}|x|$;

18.9. 1) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg}(-x)$; 3) $y = -\operatorname{ctg} x$; 4) $y = 3\operatorname{ctg} x$.

У завданнях 18.10–18.13 побудуйте графік функції та вкажіть проміжки зростання і спадання функції.

18.10. 1°) $y = \sin 3x$; 2°) $y = 3\sin x$; 3°) $y = \sin x + 1$; 4*) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

18.11. 1°) $y = \cos \frac{x}{2}$; 2°) $y = \cos x - 1$; 3) $y = \cos|x|$; 4*) $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

18.12. 1) $y = \operatorname{tg} 4x$; 2) $y = \operatorname{tg} x + 3$; 3) $y = -2\operatorname{tg} x$; 4*) $y = \operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x|$.

18.13. 1) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$; 2) $y = -2\operatorname{ctg} x$; 3) $y = |\operatorname{ctg} x|$; 4*) $y = \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}|x|$.

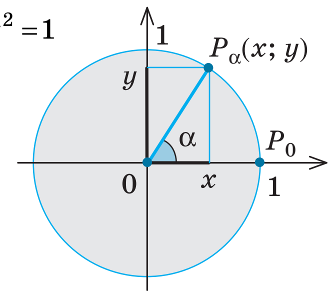
Виявіть свою компетентність

18.14. Спробуйте узагальнити матеріал § 18. Складіть зведену таблицю властивостей тригонометричних функцій.

§ 19 СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

Таблиця 26

$x^2+y^2=1$



$\cos\alpha = x$; $\sin\alpha = y$

Основна тригонометрична тотожність $\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

● На рисунку в табл. 26 зображене одиничне коло, тобто коло радіуса 1 з центром у початку координат. Рівняння цього кола: $x^2+y^2=1$.

Нехай унаслідок повороту на кут α точка $P_0(1;0)$ одиничного кола переходить у точку $P_\alpha(x;y)$ (тобто унаслідок повороту на кут α радіус OP_0 переходить у радіус OP_α. Нагадаємо, що синусом α називають ординату точки $P_\alpha(x;y)$ одиничного кола, тобто $\sin\alpha=y$, а косинусом α — абсцису цієї точки, тобто $\cos\alpha=x$. Координати точки P_α задовольняють рівняння кола, тоді $x^2+y^2=1$, отже, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. ○

Це співвідношення називають *основною тригонометричною тотожністю*.

Нагадаємо також, що:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad(\text{де } \cos\alpha\neq 0);$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad(\sin\alpha\neq 0).$$

Тоді $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$, тобто

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1\ (\sin\alpha\neq 0 \text{ і } \cos\alpha\neq 0).$$

За допомогою цих співвідношень і основної тригонометричної тотожності одержуємо:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

тобто $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\cos\alpha\neq 0)$.

Аналогічно отримуємо:

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

тобто $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\sin\alpha\neq 0)$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Знаючи значення однієї з тригонометричних функцій та інтервал, у якому міститься α, знайдіть значення інших трьох тригонометричних функцій:

1) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $90°<\alpha<180°$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Коментар

1) Рівність $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ пов'язує $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ та дозволяє виразити одну з цих функцій через іншу.

Наприклад, $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$. Тоді $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Ураховуючи, у якій чверті міститься α, ми можемо визначити знак, який потрібно взяти в правій частині формули (це знак косинуса в II чверті). Знаючи $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, знаходимо $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Зазначимо, що після знаходження $\operatorname{tg}\alpha$ значення $\operatorname{ctg}\alpha$ можна також знайти зі співвідношення $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$.

2) Рівність $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ пов'язує $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ і дозволяє виразити одну з цих функцій через іншу як обернену величину.

Рівність $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ пов'язує $\operatorname{tg}\alpha$ та $\cos\alpha$ і дозволяє виразити одну з цих функцій через іншу.

Наприклад, $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Тоді $\cos\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$. Знаючи, у якій чверті міститься α, ми можемо визначити знак, який потрібно взяти в правій частині формули (це знак косинуса в III чверті). Щоб знайти $\sin\alpha$, можна скористатися співвідношенням $\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$.

Розв'язання

1) ▶ Із рівності $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ одержуємо: $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$.

Звідси $\cos^2\alpha=1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$. Оскільки $90°<\alpha<180°$, то $\cos\alpha<0$, а отже, $\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{9}{25}}=-\dfrac{3}{5}$. Тоді $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$

$=\dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\dfrac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\dfrac{3}{4}$. ◁

2) ▶ З рівності $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ отримуємо $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=3$. Підставляємо в рівність $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ значення $\operatorname{tg}\alpha$ і одержуємо $1+\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. Звідси $\cos^2\alpha=\dfrac{9}{10}$.

Оскільки $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha<0$, тоді

$\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{9}{10}}=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. ◁

Приклад 2 Спростіть вираз $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha$.

Коментар

Для перетворення тригонометричних виразів водночас із тригонометричними формулами використовують також алгебраїчні формули, зокрема формули скороченого множення.

Так, вираз $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ можна розглядати як різницю квадратів: $(\sin^2\alpha)^2-(\cos^2\alpha)^2$. Тоді його можна розкласти на множники (як добуток суми і різниці $\sin^2\alpha$ та $\cos^2\alpha$).

Розв'язання

▶ $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha=$
$=1\cdot(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$. ◁

Запитання

1. Запишіть і доведіть співвідношення між тригонометричними функціями одного аргумента.

Вправи

19.1. Чи існує число α, яке одночасно задовольняє умови:

1°) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$;

2°) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$;

3°) $\sin\alpha=0{,}7$, $\cos\alpha=0{,}3$;

4°) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{5}{3}$;

5°) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{7}{4}$;

6) $\operatorname{tg}\alpha=2+\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=2-\sqrt{3}$.

19.2. Знаючи значення однієї з тригонометричних функцій та інтервал, у якому міститься α, обчисліть значення інших трьох тригонометричних функцій:

1°) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

2°) $\cos\alpha=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha=-0{,}2$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

19.3. Спростіть вираз:

1°) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

2°) $(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)$;

3°) $\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$;

4) $\sin^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

5) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

6) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

7) $\frac{\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$;

8) $\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\right)$;

9*) $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$;

10*) $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, якщо $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

19.4*. 1) Відомо, що $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$. Знайдіть $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

2) Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2$. Знайдіть:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$.

19.5. Доведіть тотожність:

1°) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\operatorname{tg}^2\alpha$;

2°) $\frac{1}{\sin^2\alpha}-1=\operatorname{ctg}^2\alpha$;

3) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos^2\alpha$;

4) $\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

5) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}$;

6°) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$;

7) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2=\frac{2}{\cos^2\alpha}$;

8*) $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$;

9) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

10*) $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$.

§ 20 ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ ТА НАСЛІДКИ З НИХ

20.1. Формули додавання

Таблиця 27

1. Косинус різниці і суми	
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
2. Синус суми і різниці	
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
3. Тангенс суми і різниці	
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$	$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Косинус різниці і суми

Щоб одержати формулу для $\cos(\alpha-\beta)$, спочатку розглянемо випадок, коли α і β розташовані в проміжку $[0;\pi]$ і $\alpha>\beta$. На одиничному колі позначимо точки P_α і P_β та зобразимо вектори $\overline{OP_\alpha}$ і $\overline{OP_\beta}$ (рис. 20.1.1). Ці вектори мають ті самі координати, що й точки P_α і P_β, тобто: $\overline{OP_\alpha}(\cos\alpha;\sin\alpha)$, $\overline{OP_\beta}(\cos\beta;\sin\beta)$.

Довжини (модулі) цих векторів дорівнюють одиниці: $\left|\overline{OP_\alpha}\right|=1$, $\left|\overline{OP_\beta}\right|=1$, а кут між ними дорівнює $\alpha-\beta$ (тобто $\angle P_\alpha OP_\beta=\alpha-\beta$). Знайдемо скалярний добуток векторів $\overline{OP_\alpha}$ і $\overline{OP_\beta}$ двома способами:

1) як суму добутків однойменних координат: $\overline{OP_\alpha}\cdot\overline{OP_\beta}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$;
2) як добуток довжин (модулів) векторів на косинус кута між ними:

$$\overline{OP_\alpha}\cdot\overline{OP_\beta}=\left|\overline{OP_\alpha}\right|\cdot\left|\overline{OP_\beta}\right|\cdot\cos\angle P_\alpha OP_\beta=$$
$$=1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta).$$

Отже,

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

Одержану формулу називають *формулою косинуса різниці*. Словесно її можна сформулювати так.

Косинус різниці двох кутів (чисел) дорівнює добутку косинуса першого кута (числа) на косинус другого плюс добуток синуса першого на синус другого.

Щоб обґрунтувати цю формулу в загальному випадку, нагадаємо, що за означенням кут між векторами $(\angle P_\alpha OP_\beta)$ може бути тільки в межах від 0 до π, тому при $\alpha>\beta$ кут між векторами $\overline{OP_\alpha}$ і $\overline{OP_\beta}$ може дорівнювати $\alpha-\beta$ (рис. 20.1.1), або $2\pi-(\alpha-\beta)$ (рис. 20.1.2), або може відрізнятися

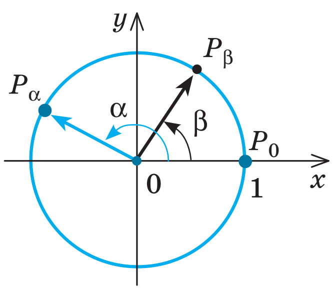


Рис. 20.1.1

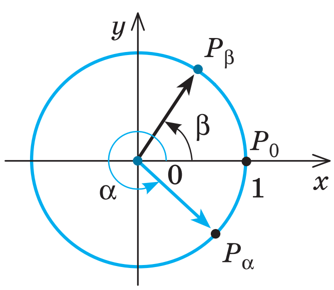


Рис. 20.1.2

від цих значень на ціле число обертів (тобто на $2\pi k$, де $k \in \boldsymbol{Z}$).

Ураховуючи періодичність (з періодом 2π) та парність функції косинус, одержуємо, що в будь-якому випадку $\cos \angle P_\alpha O P_\beta = \cos(\alpha - \beta)$, отже, наведене обґрунтування залишається правильним для будь-яких значень α і β.

За допомогою формули (1) легко вивести інші формули додавання, наведені в табл. 27, зокрема, *формулу косинуса суми*:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Отже,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Формули синуса суми і різниці та тангенса суми і різниці обґрунтуйте самостійно, спираючись на інтернет-підтримку підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Обчисліть:

1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\mathrm{tg}\, 15°$.

Розв'язання

1) ► $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. ◁

2) ► $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. ◁

3) ► $\mathrm{tg}\, 15° = \mathrm{tg}(45° - 30°) = \dfrac{\mathrm{tg}\, 45° - \mathrm{tg}\, 30°}{1 + \mathrm{tg}\, 45° \,\mathrm{tg}\, 30°} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \dfrac{(3 - \sqrt{3})^2}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \dfrac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}$. ◁

Коментар

Подамо $15°$ як різницю: $15° = 45° - 30°$, а значення тригонометричних функцій кутів $45°$ і $30°$ ми знаємо. Тому, записавши синус $15°$ як синус різниці, одержимо значення $\sin 15°$. Аналогічно знайдемо $\cos 15°$ і $\mathrm{tg}\, 15°$.

Зауважимо, що для знаходження $\mathrm{tg}\, 15°$ можна було б використати також формулу $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

У завданні 3 в одержаному виразі $\dfrac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$ зручно позбутися ірраціональності в знаменнику дробу, що значно спрощує відповідь.

Приклад 2 Знайдіть значення виразу $\cos 37° \cos 23° - \sin 37° \sin 23°$.

Розв'язання

► $\cos 37° \cos 23° - \sin 37° \cos 23° = \cos(37° + 23°) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$. ◁

Коментар

Використаємо формулу косинуса суми справа наліво:

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta).$$

Приклад 3 Доведіть тотожність:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Коментар

Для того щоб обґрунтувати ці тотожності, доведемо, що їхні праві частини дорівнюють лівим, використовуючи формули синуса суми і синуса різниці:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

Розв'язання

1) ▶ $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sin\alpha+\cos\alpha$; ◁

2) ▶ $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sin\alpha-\cos\beta$. ◁

Запитання

1. Запишіть формули додавання: косинус суми і косинус різниці; синус суми і синус різниці; тангенс суми і тангенс різниці.

2*. Доведіть формули додавання, про які йдеться в запитанні 1.

3*. Використовуючи інтернет-підтримку підручника, доведіть формулу $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi)$, де $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Наведіть приклади її використання.

Вправи

20.1.1. Обчисліть:

1) $\sin 13°\cos 17°+\cos 13°\sin 17°$;
2) $\sin 16°\cos 29°+\sin 29°\cos 16°$;
3) $\sin 78°\cos 18°-\sin 18°\cos 78°$;
4) $\sin 63°\cos 33°-\sin 33°\cos 63°$;
5) $\cos 66°\cos 6°+\sin 66°\sin 6°$;
6) $\cos 71°\cos 26°+\sin 71°\sin 26°$;
7) $\cos 20°\cos 25°-\sin 20°\sin 25°$;
8) $\cos 18°\cos 12°-\sin 18°\sin 12°$;
9) $\frac{\operatorname{tg}10°+\operatorname{tg}35°}{1-\operatorname{tg}10°\operatorname{tg}35°}$;
10) $\frac{\operatorname{tg}73°-\operatorname{tg}13°}{1+\operatorname{tg}73°\operatorname{tg}13°}$;
11) $\frac{1+\operatorname{tg}67°\operatorname{tg}7°}{\operatorname{tg}37°-\operatorname{tg}7°}$.

20.1.2. Спростіть:

1°) $\sin 5\alpha\cos 3\alpha-\cos 5\alpha\sin 3\alpha$;
2) $\cos 4\alpha\cos 2\alpha+\sin 4\alpha\sin 2\alpha$;
3) $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$;
4) $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)$;
5°) $\frac{\cos 7\alpha\cos 4\alpha+\sin 7\alpha\sin 4\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha}$;
6°) $\frac{\sin 8\alpha\cos 2\alpha-\cos 8\alpha\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha\cos 4\alpha-\sin 2\alpha\sin 4\alpha}$;
7°) $\frac{\operatorname{tg}4\alpha+\operatorname{tg}3\alpha}{1-\operatorname{tg}4\alpha\operatorname{tg}3\alpha}$;
8°) $\frac{\operatorname{tg}7\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}{1+\operatorname{tg}7\alpha\operatorname{tg}2\alpha}$;
9) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$;
10) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta}$.

20.1.3. За допомогою формул додавання обчисліть:

1) $\sin 75°$; 2) $\cos 75°$; 3) $\operatorname{tg}75°$; 4) $\sin 105°$; 5) $\cos 105°$; 6) $\operatorname{tg}105°$.

20.1.4. Знайдіть найбільше та найменше значення виразу:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha$;
2) $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$;
3) $\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha$;
4) $\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{6}\cos\alpha$.

20.1.5. Доведіть тотожність:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$;

2) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$;

4) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha$;

5) $\sin(30^\circ-\alpha)-\cos(60^\circ-\alpha)=-\sqrt{3}\sin\alpha$;

6) $\sin(30^\circ-\alpha)+\sin(30^\circ+\alpha)=\cos\alpha$;

7) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha-1$;

8) $\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\alpha=1+\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\alpha$;

9) $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos(60^\circ+\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$;

10) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(45^\circ+\alpha)}{2\sin(45^\circ+\alpha)-\sqrt{2}\sin\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

20.1.6. Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$;

2) $y=\sin 2x-\cos 2x$;

3) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$;

4) $y=\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}$.

20.1.7. Знайдіть область значень функції:

1) $y=3\sin x+4\cos x$;

2) $y=5\sin 3x-12\cos 3x$;

3) $y=\sin 7x-\cos 7x$;

4) $y=8\sin\dfrac{x}{3}+15\cos\dfrac{x}{3}$.

20.2. Формули подвійного аргумента

Таблиця 28

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

● Щоб одержати формули подвійного аргумента, достатньо у формулах додавання

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

взяти $\beta=\alpha$. Одержимо тотожності:

$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$,

тобто $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$,

тобто $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$, тобто

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$. ○

Із формули $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, користуючись основною тригонометричною тотожністю $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, можна одержати формули, які дозволяють виразити $\cos 2\alpha$ тільки через $\sin\alpha$ або тільки через $\cos\alpha$.

● Дійсно, з основної тригонометричної тотожності одержуємо $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$. Тоді $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$, тобто

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1. \quad (1)$$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, тобто

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha. \quad ○ \quad (2)$$

Із формул (1) і (2) можна одержати наслідки, які корисно запам'ятати:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Ці формули називають *формулами пониження степеня*.

Якщо в останніх формулах позначити $2\alpha = x$, тобто $\alpha = \dfrac{x}{2}$, то можна записати такі формули:

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}, \quad 1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}. \quad (3)$$

Зазначимо, що формули синуса і косинуса подвійного аргумента справедливі для будь-яких значень аргумента, тоді як формула тангенса подвійного аргумента справедлива тільки для тих значень аргумента α, для яких означено $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg} 2\alpha$, тобто тільки при $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ і $2\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, де $k \in \mathbf{Z}$.

Зазначимо також, що, як завжди, одержані формули можна використовувати як зліва направо, так і справа наліво. Наприклад, замість виразу $2\sin 3\alpha \cos 3\alpha$ можна записати $\sin(2\cdot 3\alpha) = \sin 6\alpha$, а замість виразу $\cos^2 1{,}5\alpha - \sin^2 1{,}5\alpha$ записати $\cos 3\alpha$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Обчисліть:

1) $\cos^2\dfrac{\pi}{8} - \sin^2\dfrac{\pi}{8}$; 2) $\sin 15° \cos 15°$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ $\cos^2\dfrac{\pi}{8} - \sin^2\dfrac{\pi}{8} = \cos\left(2\cdot\dfrac{\pi}{8}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ◁ 2) ▶ $\sin 15° \cos 15° = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sin 15° \cos 15° = \dfrac{1}{2}\sin(2\cdot 15°) = \dfrac{1}{2}\sin 30° = \dfrac{1}{4}$. ◁	У першому завданні достатньо «впізнати» праву частину формули косинуса подвійного аргумента й записати результат. У другому завданні слід звернути увагу на те, що заданий вираз відрізняється від правої частини формули синуса подвійного аргумента тільки відсутністю двійки. Тому, якщо цей вираз помножити і поділити на 2, він не зміниться, але тепер за формулою одержуємо: $2\sin 15° \cos 15° = \sin(2\cdot 15°) = \sin(30°) = \dfrac{1}{2}$.

Приклад 2

Доведіть тотожність $\dfrac{1 + \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$.

Розв'язання

▶ $\dfrac{1 + \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \dfrac{2\cos^2 2\alpha}{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$. ◁

Запитання

1. Запишіть формули синуса, косинуса і тангенса подвійного аргумента.
2. Доведіть формули синуса, косинуса і тангенса подвійного аргумента.

Вправи

20.2.1°. Обчисліть:

1) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$; 3) $(\cos 15° + \sin 15°)^2$; 5) $\frac{2\operatorname{tg} 15°}{1-\operatorname{tg}^2 15°}$;

2) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 4) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$; 6) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.

У завданнях 20.2.2–20.2.3 доведіть тотожність.

20.2.2°. 1) $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos x$; 3) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$;

2) $\sin 5x \cos 5x = \frac{1}{2}\sin 10x$; 4) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$.

20.2.3. 1) $\frac{\sin 4\alpha}{4\sin\alpha} = \cos\alpha\cos 2\alpha$; 3) $(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha$;

2) $\frac{\sin 4\alpha}{4\cos\alpha} = \sin\alpha\cos 2\alpha$; 4) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$.

20.2.4. Спростіть вираз:

1°) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha$; 3) $\frac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha - 1}$;

2°) $\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$; 4*) $\frac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha}$.

20.2.5. Знаючи, що $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ і $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, обчисліть:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

20.2.6. Знаючи, що $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ і $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, обчисліть:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

20.2.7. Знаючи, що $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ і $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{4}\right)$, обчисліть:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

20.2.8*. Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\frac{\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = 3$.

20.2.9*. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $\cos 2\alpha - |\cos\alpha|$.

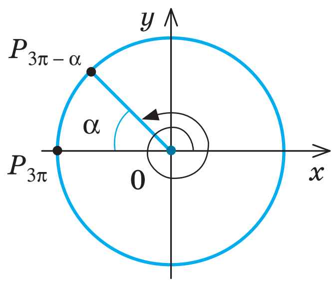
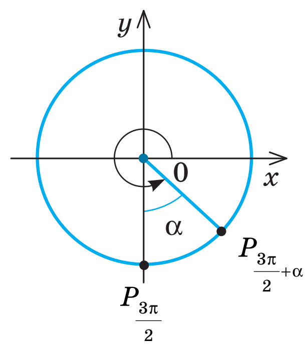
20.2.10. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin x \cos x$; 2) $y = \sin^4 x - \cos^4 x$; 3*) $y = \operatorname{tg} x \sin 2x$.

20.3. Формули зведення

Таблиця 29

Формулами зведення називають формули, за допомогою яких тригонометричні функції від аргументів виду $k\pi \pm \alpha$ і $(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ $(k \in \mathbf{Z})$ зводять до тригонометричних функцій від аргумента α.

Орієнтир	Приклади
1. Якщо до числа α додається число $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ (тобто число, яке зображується на горизонтальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції не змінюється, а якщо додається число $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (тобто число, яке зображується на вертикальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції змінюється на відповідну (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс і котангенс на тангенс).	1. Спростіть за формулами зведення вираз $\mathrm{tg}(3\pi - \alpha)$. ▶ $\mathrm{tg}(3\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$. ◁  *Коментар* Назва заданої функції не змінюється, оскільки 3π зображується на горизонтальному діаметрі (зліва) одиничного кола (див. рисунок). Якщо α — гострий кут, то кут $(3\pi - \alpha)$ розташований у II чверті, де тангенс від'ємний, тому в правій частині формули взято знак «–».
2. Знак одержаного виразу визначається знаком початкового виразу, якщо умовно вважати кут α гострим.	2. Спростіть $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$. ▶ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$. ◁  *Коментар* Назва заданої функції змінюється, оскільки $\frac{3\pi}{2}$ зображується на вертикальному діаметрі (внизу) одиничного кола (див. рисунок). Якщо α — гострий кут, то кут $\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ розташований у IV чверті, де косинус додатний, тому в правій частині формули взято знак «+».

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

● Формули додавання дозволяють обґрунтувати формули зведення, за якими тригонометричні функції від аргументів виду $k\pi \pm \alpha$ і $(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ $(k \in \mathbf{Z})$ зводять до тригонометричних функцій від аргумента α.

Розглянемо декілька прикладів.

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha =$

$= 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin\alpha = \sin\alpha;$

$\cos(\pi + \alpha) = \cos\pi\cos\alpha - \sin\pi\sin\alpha =$

$= (-1)\cdot\cos\alpha - 0\cdot\sin\alpha = -\cos\alpha;$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{7\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{7\pi}{2}\sin\alpha=$$

$$=0\cdot\cos\alpha-(-1)\cdot\sin\alpha=\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\sin\frac{3\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{3\pi}{2}\sin\alpha}{\cos\frac{3\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{3\pi}{2}\sin\alpha}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Аналіз одержаних результатів дозволяє обґрунтувати орієнтир для формул зведення, наведений в табл. 29, та основні формули зведення (детальніше див. інтернет-підтримку підручника). Усі інші випадки можна звести до основних формул, використовуючи періодичність відповідних тригонометричних функцій.

За формулами зведення одержимо *формули доповняльних аргументів* (аргументи α і $\frac{\pi}{2}-\alpha$ доповнюють один одного до $\frac{\pi}{2}$):

$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\quad \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\quad \operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Наприклад, $\sin 60°=\cos(90°-60°)=\cos 30°$;
$\cos 89°=\sin(90°-89°)=\sin 1°$.

Обґрунтуйте формули доповняльних аргументів самостійно.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Обчисліть за допомогою формул зведення:

1) $\cos 210°$; 2) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$.

Розв'язання	Коментар
1) ► $\cos 210°=\cos(180°+30°)=$ $=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ◁ 2) ► $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=-1$. ◁	Подамо задані аргументи так, щоб можна було використати формули зведення (тобто виділимо в аргументі частини, які зображуються на горизонтальному чи вертикальному діаметрі одиничного кола). Наприклад, $210°=180°+30°$. Звичайно, можна було подати цей аргумент ще й так: $210°=270°-60°$ і теж використати формули зведення.

Приклад 2*

Доведіть тотожність $\frac{\cos(3\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}-\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cos 2\alpha$.

Коментар

Доведемо, що ліва частина тотожності дорівнює правій. Спочатку використаємо формули зведення, а потім спростимо одержані вирази за допомогою формул: $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ і $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$. Під час спрощення виразів $\cos(3\pi-\alpha)$ і $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$ можна застосувати як безпосередньо формули зведення, так і періодичність відповідних функцій. Наприклад, ураховуючи, що періодом функції $\cos x$ є 2π, одержуємо: $\cos(3\pi-\alpha)=\cos(2\pi+\pi-\alpha)=\cos(\pi-\alpha)=$ $=-\cos\alpha$.

Розв'язання

▶ $$\frac{\cos(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}-\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{(-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha}{(-\operatorname{ctg}\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha}-(-\sin\alpha)^2=\frac{-\cos^2\alpha}{-1}-\sin^2\alpha=$$

$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha.$$ ◁

Запитання

1. Проілюструйте на прикладах використання формул зведення. Поясніть одержаний результат.

2*. Доведіть декілька формул зведення.

Вправи

20.3.1. Обчисліть за допомогою формул зведення:

1) $\sin 240°$; 3) $\cos 330°$; 5) $\cos\frac{4\pi}{3}$; 7) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$;

2) $\operatorname{tg}300°$; 4) $\operatorname{ctg}315°$; 6) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

20.3.2. Обчисліть:

1) $\cos 8°\cos 37°-\cos 82°\cos 53°$; 2) $\sin 68°\sin 38°-\sin 52°\cos 112°$.

20.3.3. Спростіть вираз:

1°) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$; 3°) $\dfrac{\sin(3\pi+\alpha)\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-2\alpha)}$;

2°) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}$; 4) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi+\alpha)}{(\cos(3{,}5\pi-\alpha)+\sin(1{,}5\pi+\alpha))^2-1}$.

20.3.4. Доведіть тотожність:

1°) $2\sin(90°+\alpha)\sin(180°+\alpha)=-\sin 2\alpha$;

2°) $\operatorname{ctg}20°\cdot\operatorname{ctg}70°=1$;

3) $\dfrac{\sin(\pi-2\alpha)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin^2\alpha}=-2\operatorname{ctg}\alpha$;

4*) $\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$.

20.4. Формули суми і різниці однойменних тригонометричних функцій та формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

Таблиця 30

1. Формули суми і різниці тригонометричних функцій	
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
2. Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму	
$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$	$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$
$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$	

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Формули суми і різниці тригонометричних функцій

За формулами додавання:

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$;

$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$.

Додаючи почленно ці рівності, одержуємо:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y. \quad (1)$$

Якщо позначити:

$$x+y=\alpha, \quad (2)$$

$$x-y=\beta, \quad (3)$$

то, додаючи і віднімаючи рівності (2) і (3), маємо: $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Тоді з формули (1) одержуємо *формулу перетворення суми синусів у добуток*:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (4)$$

Словесно її можна сформулювати так.

Сума синусів двох аргументів дорівнює подвоєному добутку синуса півсуми цих аргументів на косинус їх піврізниці.

Якщо замінити у формулі (4) β на $(-\beta)$ і врахувати непарність синуса: $\sin(-\beta)=-\sin\beta$, то одержимо формулу

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Аналогічно, додаючи почленно рівності

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y, \quad (5)$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y, \quad (6)$$

одержуємо:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y, \quad (7)$$

і, виконуючи заміни (2) і (3), маємо:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Інші формули, наведені в табл. 30, обґрунтуйте самостійно, спираючись на інтернет-підтримку підручника.

Зазначимо, що в процесі обґрунтування формул перетворення суми та різниці синусів і косинусів у добуток ми фактично отримали і формули перетворення добутків тригонометричних функцій у суму. Наприклад, якщо поділити обидві частини рівності (1) на 2 і записати одержану рівність справа наліво, маємо:

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y)).$$

Аналогічно з формули (7) одержуємо:

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y)).$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Перетворіть задану суму чи різницю в добуток і, якщо можливо, спростіть:

1) $\sin 75° + \sin 15°$; 2*) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$.

Коментар

1) У першому завданні можна безпосередньо застосувати формулу $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, а потім використати табличні значення $\sin 45°$ і $\cos 30°$.

2) Якщо вираз $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$ розглянути як різницю квадратів, то його можна розкласти на множники, а потім до кожного з одержаних виразів застосувати формули перетворення різниці чи суми косинусів у добуток. Для подальшого спрощення одержаного виразу використовуємо формулу синуса подвійного аргумента, а саме: $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin(\alpha+\beta)$ і $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin(\alpha-\beta)$.

Розв'язання

1) ► $\sin 75° + \sin 15° = 2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2} = 2\sin 45°\cos 30° = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. ◁

2) ► $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = (\cos\alpha - \cos\beta)(\cos\alpha + \cos\beta) = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$
$= -\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$. ◁

Приклад 2

Перетворіть у добуток суму $\sin\alpha + \cos\beta$.

Коментар

Ми вміємо перетворювати в добуток суму синусів чи косинусів. Для переходу до таких виразів достатньо згадати, що $\cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ (або $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$).

Розв'язання

► $$\sin\alpha + \cos\beta = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 2\sin\frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{2} =$$
$$= 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$ ◁

Приклад 3

Спростіть вираз $\frac{(\sin 8\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha)}{1 - \cos 6\alpha}$.

Розв'язання

► $$\frac{(\sin 8\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha)}{1 - \cos 6\alpha} = \frac{2\sin 3\alpha\cos 5\alpha\cdot(-2)\sin 5\alpha\sin(-3\alpha)}{2\sin^2 3\alpha} = 2\cos 5\alpha\sin 5\alpha = \sin 10\alpha.$$ ◁

Запитання

1. Запишіть і доведіть формули перетворення суми і різниці синусів, косинусів, тангенсів у добуток. Наведіть приклади використання цих формул.
2. Запишіть і доведіть формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.

Вправи

20.4.1. Перетворіть суму (або різницю) тригонометричних функцій у добуток і спростіть:

1°) $\cos 152° + \cos 28°$; 4) $\dfrac{\sin 25° + \sin 15°}{\sin 25° - \sin 15°}$;

2°) $\cos 48° - \cos 12°$; 5*) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$;

3) $\cos 20° - \sin 20°$; 6*) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$;

7*) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$.

20.4.2. Доведіть тотожність:

1°) $\dfrac{\sin 75° + \sin 15°}{\cos 75° - \cos 15°} = -\sqrt{3}$; 4) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$;

2°) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$; 5) $\dfrac{(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha)}{1 - \cos 8\alpha} = \sin 4\alpha$;

3) $\dfrac{\cos 6\alpha - \cos 10\alpha}{\sin 8\alpha} = 2\sin 2\alpha$; 6*) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha - \sin\beta} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

7*) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$.

20.4.3. Перетворіть у суму:

1) $\cos 45° \cos 15°$; 3) $\sin 20° \sin 10°$;

2) $\sin\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{5\pi}{24}$; 4) $\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

20.4.4. Обчисліть:

1) $2\cos 20° \cdot \cos 40° - \cos 20°$; 2*) $4\sin 10° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70°$.

20.4.5*. Доведіть, що при $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ виконується рівність:

1) $\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$;

2) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

20.4.6. Доведіть формули:

1) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

§ 21 ФОРМУЛИ ПОТРІЙНОГО ТА ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТІВ. ВИРАЖЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

Таблиця 31

1. Формули потрійного аргумента

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \alpha \ne \dfrac{\pi}{6}(2k+1), \quad k \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{ctg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha}, \quad \alpha \ne \dfrac{\pi k}{3}, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

2. Формули пониження степеня

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

3. Формули половинного аргумента

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \alpha \ne \pi + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}, \quad \alpha \ne 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \ne \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \ne \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

(Знак перед коренем вибирають залежно від знака тригонометричної функції, що стоїть у лівій частині рівності.)

4. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргумента

$\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \ne \pi + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

$\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \ne \pi + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}, \quad \alpha \ne \pi + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \ne \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Формули потрійного аргумента

Використовуючи формули додавання, формули подвійного аргумента, основну тригонометричну тотожність і формулу $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, одержуємо такі формули:

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha) \cdot \sin\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha) + (1 - 2\sin^2\alpha) \cdot \sin\alpha =$$
$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Отже, $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

$\cos 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cdot\cos\alpha - \sin 2\alpha\cdot\sin\alpha = (2\cos^2\alpha - 1)\cdot\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha = (2\cos^2\alpha-1)\cdot\cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cdot\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Отже, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg} 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\frac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Отже, $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha} = \frac{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha} = \frac{1-\frac{3}{\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\frac{3}{\operatorname{ctg}\alpha}-\frac{1}{\operatorname{ctg}^3\alpha}} = \frac{(\operatorname{ctg}^2\alpha-3)\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1} = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Отже, $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Зауваження. **Функції $\sin 3\alpha$ і $\cos 3\alpha$ існують при будь-яких значеннях α, а $\operatorname{tg} 3\alpha$ існує тільки тоді, коли $3\alpha \ne \frac{\pi}{2}+\pi k$, де $k\in \boldsymbol{Z}$, тобто $\alpha \ne \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, отже, $\alpha\ne\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Аналогічно $\operatorname{ctg} 3\alpha$ існує тільки тоді, коли $3\alpha\ne\pi k$, де $k\in\boldsymbol{Z}$. Тоді $\alpha\ne\frac{\pi k}{3}$, $k\in\boldsymbol{Z}$.**

2 Формули пониження степеня

З формул $\cos 2\alpha = 1-\sin^2\alpha$ та $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ одержуємо формули пониження степеня:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad (1)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}. \qquad (2)$$

3 Формули половинного аргумента

Якщо у формулах (1) і (2) замість α взяти аргумент $\frac{\alpha}{2}$, то одержимо:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Із формул (3) і (4) одержуємо формули половинного аргумента для синуса і косинуса:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad (5)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \qquad (6)$$

У цих формулах знак перед коренем вибирають залежно від знака тригонометричної функції, що стоїть у лівій частині рівності.

Якщо почленно розділити формули (5) і (6) та врахувати, що $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а $\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, то одержуємо:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \qquad (7)$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}. \qquad (8)$$

У формулах (7) і (8) знак перед коренем також вибирають залежно від знака тригонометричної функції, що стоїть у лівій частині рівності.

Зазначимо, що формули (5) і (6) можна використовувати при будь-яких значеннях α, а формули (7) і (8) тільки тоді, коли існують значення $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ та $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ відповідно. Отже, формулу (7) можна використовувати, якщо $\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, тобто $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, а формулу (8) — якщо $\frac{\alpha}{2}\neq\pi k$, тобто $\alpha\neq 2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Зауважимо, що для тангенса і котангенса половинного аргумента можна одержати формули, які не містять квадратних коренів. Наприклад,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (9)$$

Дійсно, ураховуючи, що аргумент α вдвічі більший за аргумент $\frac{\alpha}{2}$, маємо: $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $1+\cos\alpha\neq 0$. Тобто формулу (9) можна використовувати при $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Аналогічно обґрунтовують формулу

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (10)$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

якщо $\sin\alpha\neq 0$, тобто формулу (10) можна використовувати при $\alpha\neq\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Ураховуючи, що $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, одержуємо формули:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

4 Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргумента

Щоб одержати відповідні формули для $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, запишемо кожен із цих виразів за формулами подвійного аргумента і поділимо на $1=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Потім, щоб перейти до тангенсів, поділимо чисельник і знаменник одержаного дробу на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ (звичайно, за умови, що $\cos^2\frac{\alpha}{2}\neq 0$, тобто при $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$).

$$\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{1}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+1}=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}.$$

Отже,

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}. \qquad (11)$$

$$\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{1}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}.$$

Отже,

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}. \qquad (12)$$

Якщо почленно поділити рівності (11) і (12), то одержимо формули:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,$$

$$n\in\boldsymbol{Z},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}, \qquad (13)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Зауважимо, що формулу (13) можна одержати і за формулою тангенса подвійного аргумента, оскільки $\alpha=2\cdot\frac{\alpha}{2}$.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад

Обчисліть, не користуючись таблицями і калькулятором:

1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\mathrm{tg}\, 15°$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ $\sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; ◁ 2) ▶ $\cos 15° = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; ◁ 3) ▶ $\mathrm{tg}\, 15° = \frac{1-\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{3}$. ◁	Оскільки аргумент 15° становить половину від аргумента 30°, а косинус 30° нам відомий, то можна знайти шукані значення за формулами половинного аргумента. Ураховуючи, що аргумент 15° розташований у I чверті (де значення всіх тригонометричних функцій додатні), у формулах (5) і (6) перед знаком квадратного кореня вибираємо знак «+». Для того щоб знайти тангенс 15°, можна застосувати будь-яку з формул: (7), (9) або (10), але зручніше використати формули (9) або (10), запис яких не містить квадратних коренів. Після того як знайдено значення $\sin 15°$ і $\cos 15°$, можна також скористатися формулою $\mathrm{tg}\, 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°}$.

Зауваження. **Записи відповідей для $\sin 15°$ і $\cos 15°$ можна дещо спростити, записавши під знаком зовнішнього квадратного кореня квадрат двочлена. Щоб подати, наприклад, вираз $2-\sqrt{3}$ у вигляді квадрата двочлена, помножимо і поділимо цей вираз на 2 (та розглянемо вираз $2\sqrt{3}$ як подвоєний добуток чисел $\sqrt{3}$ і 1). Одержуємо:**

$$2-\sqrt{3} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2},\quad 2+\sqrt{3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}.$$

Тоді $\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Виконуючи аналогічні перетворення, маємо $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Запитання

1. Запишіть формули потрійного та половинного аргументів і формули вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргумента. Проілюструйте на прикладах застосування цих формул.

2. Обґрунтуйте формули потрійного та половинного аргументів і формули вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргумента.

Вправи

21.1. Обчисліть, не користуючись таблицями і калькулятором:
1) $\sin 22°30'$; 2) $\cos 22°30'$; 3) $\operatorname{tg} 22°30'$.

21.2. Знайдіть $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо:

1) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

21.3. Обчисліть $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ і $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$.

21.4. Обчисліть $\cos\frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

21.5. Обчисліть $\sin\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

21.6. Обчисліть $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{5}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

21.7. Обчисліть $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$.

21.8. Ураховуючи, що $\sin 36° = \cos 54°$, обчисліть $\sin 18°$.

Виявіть свою компетентність

21.9. Вантаж масою 0,16 кг коливається на пружині зі швидкістю, яка змінюється за законом $v = v_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$, де t — час із моменту початку коливань, $T = 24$ с — період коливань, $v_0 = 0{,}5$ м/с. Кінетичну энергію E (в джоулях) вантажу обчислюють за формулою $E = \frac{mv^2}{2}$, де m — маса вантажу в кілограмах, v — швидкість руху вантажу (в м/с). Знайдіть кінетичну энергію вантажу через 4 с після початку коливань. Відповідь подайте у джоулях.

Додаткові завдання до теми «Тригонометричні функції» та відомості з історії наведено на сайті interactive.ranok.com.ua.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 3

1. Кутом якої чверті є кут, радіанна міра якого дорівнює 3,5 радіана?

А I **Б** II **В** III **Г** IV

2. Знайдіть значення виразу $\dfrac{\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right) - \sin\frac{7\pi}{6}}{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

А 0 **Б** 1 **В** -1 **Г** $-\sqrt{3}$

3. Установіть відповідність між функціями, заданими формулами (1–3), та властивостями (А–Г) цих функцій.

1 $y=\sin x$	**А** Функція не має найбільшого значення
2 $y=\cos x$	**Б** Функція є спадною на всій області визначення
3 $y=\operatorname{tg} x$	**В** Найбільше значення функції дорівнює 1 при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$
	Г Функція парна

4. Знайдіть $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

А 0,2 **Б** –0,2 **В** –0,6 **Г** 0,6

5. Спростіть вираз $\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

А $\cos^2\alpha$ **Б** $\sin^2\alpha$ **В** $2\sin^2\alpha$ **Г** $2\cos^2\alpha$

6. Спростіть вираз $16\sin 15°\cdot\cos 30°\cdot\sin 75°$.

А 4 **Б** $2\sqrt{3}$ **В** $4\sqrt{3}$ **Г** 2

7. Знайдіть найменший додатний період функції $y=5\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)-2$.

А 2π **Б** $\frac{2\pi}{5}$ **В** $\frac{\pi}{2}$ **Г** 8π

8. Установіть відповідність заданими виразами (1–3), та тотожно рівними їм виразами (А–Г).

1 $\sin 25°+\sin 35°$	**А** $\sin 20°$
2 $\cos 25°-\cos 35°$	**Б** $\cos 20°$
3 $\cos 40°+\cos 80°$	**В** $\sin 5°$
	Г $\cos 5°$

9. Побудуйте графік функції $y=\frac{|\cos x|}{\cos x}$ (запишіть розв'язання).

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua.

Теми навчальних проектів

1. Фінансова математика.
2. Екологія та математика.
3. Забруднення навколишнього середовища: географічний і математичний аспект.

Розділ 4

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ознайомитеся з оберненими тригонометричними функціями, їх графіками і властивостями;
- навчитеся розв'язувати тригонометричні рівняння та їх системи і найпростіші тригонометричні нерівності

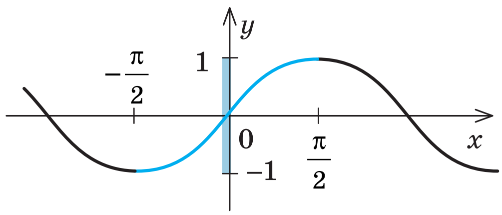
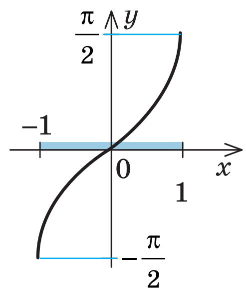
§ 22 ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Для одержання обернених тригонометричних функцій для кожної тригонометричної функції виділяють проміжок, на якому вона зростає (або спадає). Для позначення обернених тригонометричних функцій перед відповідною функцією ставиться буквосполучення «arc» (читається: «арк»).

22.1. Функція $y = \arcsin x$

Таблиця 32

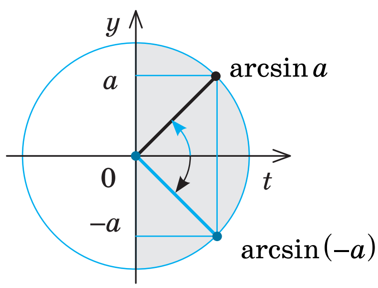
1. Графік

$y = \sin x$	$y = \arcsin x$
 На проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin x$ зростає.	

2. Значення $\arcsin a$ $(\lvert a \rvert \leqslant 1)$

Орієнтир	Приклад
$\arcsin a$ — це таке число з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a. $\arcsin a = \varphi$, якщо $\begin{cases} \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \sin \varphi = a \end{cases}$	$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Непарність функції $y = \arcsin x$



$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Графік функції $y = \arcsin x$

Функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і набуває всіх значень від -1 до 1. Отже, на цьому проміжку функція $y = \sin x$ має обернену функцію (див. п. 2.3), яку позначають $y = \arcsin x$, з областю визначення $[-1; 1]$ і областю значень $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функція $y = \arcsin x$ теж зростає, і її графік можна одержати з графіка функції $y = \sin x$ (на заданому проміжку) симетричним відображенням відносно прямої $y = x$ (рис. 22.1.1).

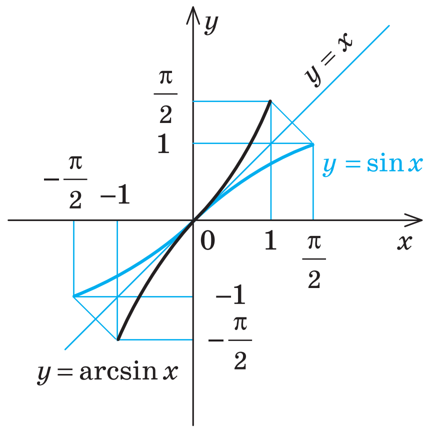


Рис. 22.1.1

2 Значення $\arcsin a$

За означенням оберненої функції (на вибраному проміжку), якщо $\sin \varphi = a$, то $\arcsin a = \varphi$, причому $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $|a| \leqslant 1$.

Отже, запис $\arcsin a = \varphi$ $(|a| \leqslant 1)$ означає, що $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin \varphi = a$. Тобто

$\arcsin a$ — ***це таке число з проміжку*** $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ***синус якого дорівнює*** a.

Наприклад, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, оскільки

$$\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Аналогічно $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, оскільки

$$-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3 Непарність функції $y = \arcsin x$

Для знаходження арксинусів від'ємних чисел можна користуватися також непарністю функції $\arcsin a$, тобто формулою

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a.$$

● Це випливає з того, що графік функції $y = \arcsin x$ (рис. 22.1.1) симетричний відносно початку координат, а точки a і $(-a)$ на осі Oy (рис. 22.1.2) симетричні відносно осі Ox. Тоді відповідні точки A і B на одиничному колі (у проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$) теж будуть симетричними відносно осі Ox. Отже, $\angle COA = \angle COB$.

Але $\arcsin a = \angle COA$, $\arcsin(-a) = -\angle COB$ (рис. 22.1.2 наведено для випадку $a > 0$). Одержуємо $\arcsin(-a) = -\arcsin a$. ○

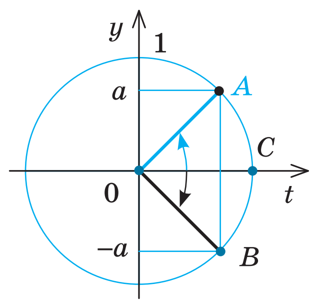


Рис. 22.1.2

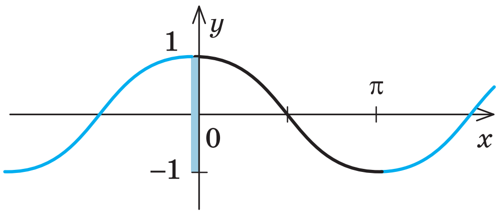
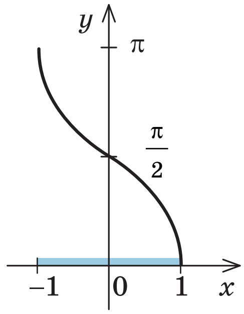
Наприклад, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

Інші обернені тригонометричні функції розгляньте самостійно за табл. 33–35 та графіками, наведеними на рис. 22.4.1–22.4.3, використовуючи інтернет-підтримку підручника.

22.2. Функція $y = \arccos x$

Таблиця 33

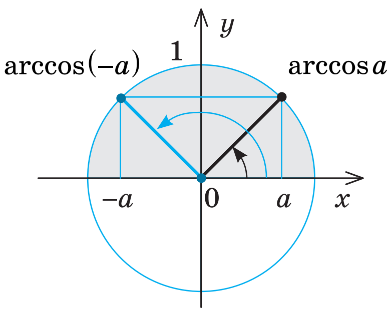
1. Графік

$y = \cos x$	$y = \arccos x$
 На проміжку $[0; \pi]$ $\cos x$ спадає.	

2. Значення $\arccos a$ $(|a| \leqslant 1)$

Орієнтир	Приклад
$\arccos a$ — це таке число з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює a. $\arccos a = \varphi$, якщо $\begin{cases} \varphi \in [0; \pi], \\ \cos\varphi = a \end{cases}$	$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, оскільки $\frac{\pi}{4} \in [0; \pi]$ і $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Формула для $\arccos(-a)$

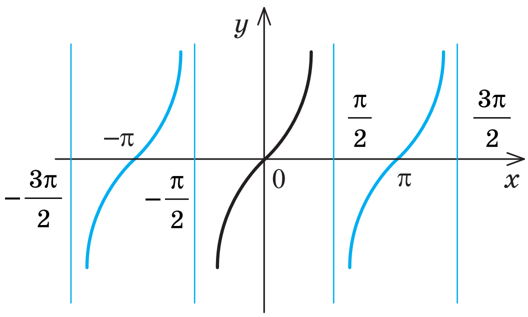
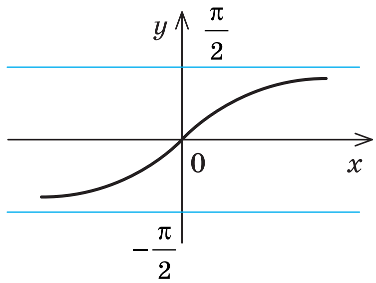


$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

22.3. Функція $y = \mathrm{arctg}\,x$

Таблиця 34

1. Графік

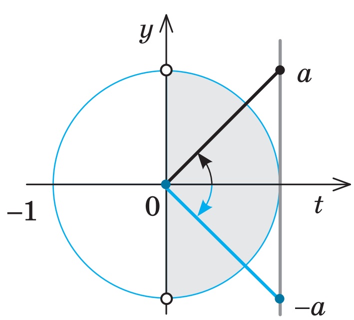
$y = \mathrm{tg}\,x$	$y = \mathrm{arctg}\,x$
	

На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $\mathrm{tg}\,x$ зростає.

2. Значення $\mathrm{arctg}\,a$

Орієнтир	Приклад
$\mathrm{arctg}\,a$ — це таке число з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a. $\mathrm{arctg}\,a = \varphi$, якщо $\begin{cases} \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \\ \mathrm{tg}\,\varphi = a \end{cases}$	$\mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

3. Непарність функції $y = \mathrm{arctg}\,x$



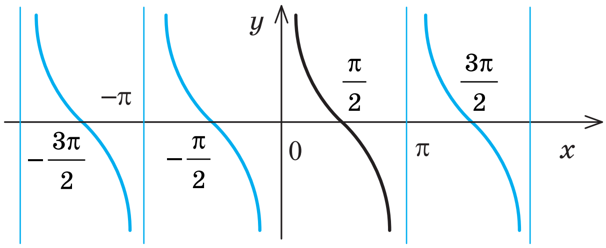
$$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\,a$$

22.4. Функція $y = \mathrm{arcctg}\,x$

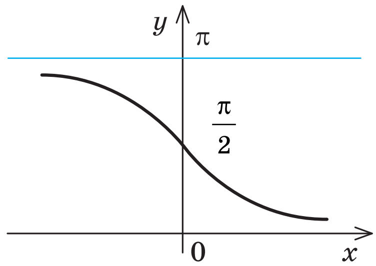
Таблиця 35

1. Графік

$y = \mathrm{ctg}\,x$	$y = \mathrm{arcctg}\,x$



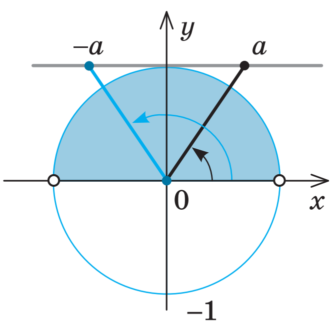
На проміжку $(0; \pi)$ $\mathrm{ctg}\,x$ спадає.



2. Значення $\mathrm{arcctg}\,a$

Орієнтир	Приклад
$\mathrm{arcctg}\,a$ — це таке число з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a. $\mathrm{arcctg}\,a = \varphi$, якщо $\begin{cases} \varphi \in (0; \pi), \\ \mathrm{ctg}\,\varphi = a \end{cases}$	$\mathrm{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$ і $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

3. Формула для $\mathrm{arcctg}(-a)$



$$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\,a$$

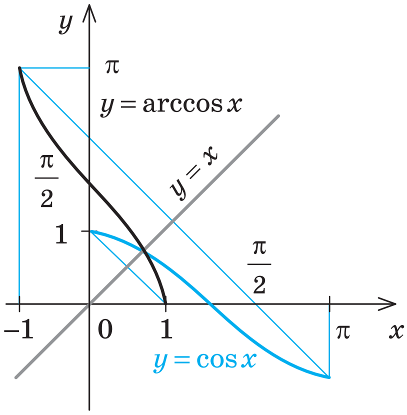


Рис. 22.4.1

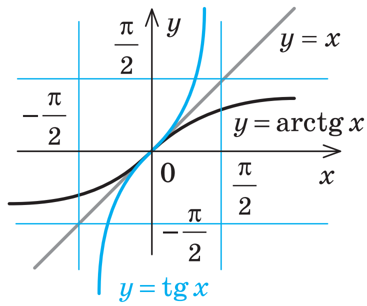


Рис. 22.4.2

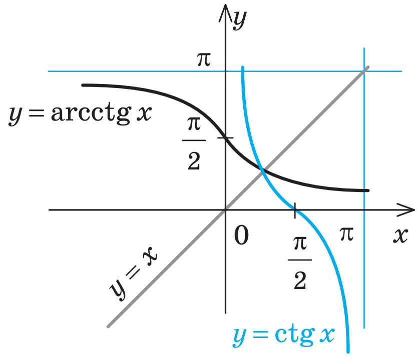


Рис. 22.4.3

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Знайдіть: 1) $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$; 2*) $\cos\left(\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$.

Розв'язання

1) ► Нехай $\arcsin\dfrac{1}{3}=\varphi$. Тоді за означенням арксинуса одержуємо, що $\sin\varphi=\dfrac{1}{3}$.

Отже, $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$. ◁

2*) ► Нехай $\arcsin\dfrac{3}{5}=\varphi$. За означенням арксинуса одержуємо, що $\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\varphi=\dfrac{3}{5}$. Ураховуючи, що $\cos\varphi\geqslant 0$, маємо: $\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$.

Отже, $\cos\left(\arcsin\dfrac{3}{5}\right)=\cos\varphi=\dfrac{4}{5}$. ◁

Коментар

1) Оскільки запис $\varphi=\arcsin a$ $(|a|\leqslant 1)$ означає, що $\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\varphi=a$, то завжди виконується рівність

$$\sin(\arcsin a)=a,\quad |a|\leqslant 1.$$

Проте цю формулу можна не запам'ятовувати: достатньо позначити вираз у дужках через φ і використати означення арксинуса.

2) Якщо позначити вираз у дужках через φ, то за вимогою задачі потрібно знайти $\cos\varphi$. Використавши означення арксинуса, одержуємо стандартну задачу: знаючи синус кута, знайти його косинус, якщо кут розташований у проміжку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Тоді $\cos\varphi=\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$. Оскільки $\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, то в цьому проміжку $\cos\varphi\geqslant 0$, а отже, $\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}$.

Приклад 2 Знайдіть: $\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$.

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай $\arccos\frac{2}{3}=\varphi$, тоді за означенням арккосинуса одержуємо, що $\cos\varphi=\frac{2}{3}$. Отже, $\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$. ◁	Оскільки запис $\varphi=\arccos a$ $(\lvert a\rvert\leqslant 1)$ означає, що $\varphi\in[0;\pi]$ і $\cos\varphi=a$, то завжди виконується рівність $\cos(\arccos a)=a$, $\lvert a\rvert\leqslant 1$. Проте цю формулу можна не запам'ятовувати: достатньо позначити вираз у дужках через φ і використати означення арккосинуса.

Приклад 3* Доведіть, що $\operatorname{arctg} a+\operatorname{arcctg} a=\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай $\varphi=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg} a$. 1) Оскільки $\operatorname{arcctg} a\in(0;\pi)$, то $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. 2) Якщо $\operatorname{arcctg} a=\beta$, то $\operatorname{ctg}\beta=a$ і $\varphi=\frac{\pi}{2}-\beta$. Тоді $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\operatorname{ctg}\beta=a$. За означенням арктангенса одержуємо $\operatorname{arctg} a=\varphi$. Отже, $\operatorname{arctg} a=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg} a$, а це й означає, що $\operatorname{arctg} a+\operatorname{arcctg} a=\frac{\pi}{2}$. ◁	Запишемо задану рівність у вигляді $\operatorname{arctg} a=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg} a$. Якщо позначити $\varphi=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg} a$, то для доведення рівності $\operatorname{arctg} a=\varphi$ за означенням арктангенса достатньо довести, що: 1) $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і 2) $\operatorname{tg}\varphi=a$. Під час доведення слід також урахувати означення арккотангенса: якщо $\operatorname{arcctg} a=\beta$, то $\beta\in(0;\pi)$ і $\operatorname{ctg}\beta=a$.

Запитання

1. Поясніть, яке число позначають вирази:

1) $\arcsin a$; 2) $\arccos a$; 3) $\operatorname{arctg} a$; 4) $\operatorname{arcctg} a$.

При яких значеннях a існують ці вирази? Проілюструйте пояснення прикладами.

2. Поясніть, як можна одержати графіки обернених тригонометричних функцій. Охарактеризуйте властивості цих функцій.

3. Обґрунтуйте формули:

1) $\arcsin(-a)=-\arcsin a$; 3) $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$;

2) $\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg} a$; 4) $\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a$.

Вправи

У завданнях 22.1–22.9 обчисліть:

22.1°. 1) $\arcsin 0$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\arcsin(-1)$;

2) $\arcsin 1$; 4) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

22.2°. 1) $\operatorname{arctg} 0$; 2) $\operatorname{arctg} 1$; 3) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

22.3°. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\arccos(-1)$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

22.4°. 1) $\operatorname{arcctg} 0$; 2) $\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

22.5. 1) $\sin\left(\arcsin \frac{2}{7}\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin \frac{1}{5}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{4}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)$.

22.6. 1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 7)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)$; 3) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{3}{5}\right)$; 4) $\cos(\operatorname{arctg} \sqrt{2})$.

22.7. 1) $\cos\left(\arccos \frac{2}{7}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{3}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\arccos \frac{1}{5}\right)$.

22.8. 1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} \sqrt{7})$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg} \frac{2}{3}\right)$; 3) $\sin(\operatorname{arcctg} 5)$; 4) $\cos\left(\operatorname{arcctg} \frac{3}{4}\right)$.

22.9*. 1) $\arcsin\left(\sin \frac{15\pi}{7}\right)$; 2) $\arcsin(\sin 7)$; 3) $\arccos\left(\cos \frac{21\pi}{3}\right)$; 4) $\arccos(\cos 8)$; 5) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{6\pi}{5}\right)$; 6) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4)$; 7) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{10\pi}{9}\right)$; 8) $\arccos(\cos 8)$.

22.10*. Доведіть, що $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$ при $|a| \leqslant 1$.

Виявіть свою компетентність

22.11. Спробуйте узагальнити матеріал § 22. Складіть таблицю властивостей обернених тригонометричних функцій.

§ 23 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НАЙПРОСТІШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

До найпростіших тригонометричних рівнянь належать рівняння

$$\boxed{\cos x = a,\ \sin x = a,\ \operatorname{tg} x = a,\ \operatorname{ctg} x = a.}$$

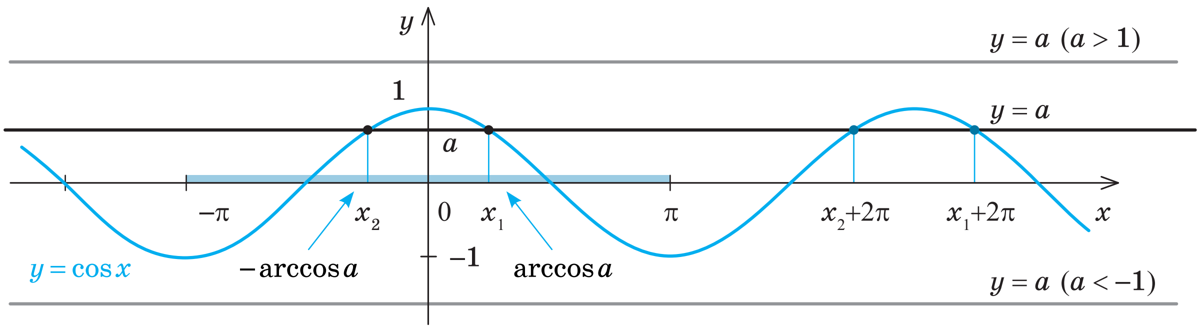
Щоб міркування щодо знаходження коренів цих рівнянь були більш наочними, скористаємося графіками відповідних функцій.

23.1. Рівняння $\cos x = a$

Таблиця 36

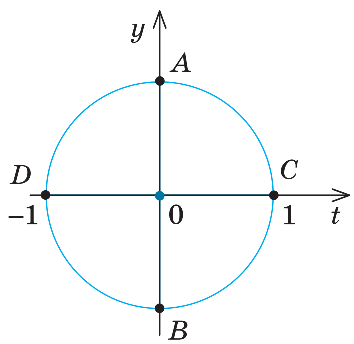
1. Графічна ілюстрація і розв'язки рівняння $\cos x = a$

Графічна ілюстрація



Розв'язки	Приклади
$\boxed{\cos x = a}$ $\lvert a\rvert > 1$: $\boxed{\text{Коренів немає}}$ $\lvert a\rvert \leqslant 1$: $\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}}$	1. ▶ $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁ 2. ▶ $\cos x = \sqrt{3}$. Коренів немає, оскільки $\sqrt{3} > 1$. ◁

2. Окремі випадки розв'язування рівняння $\cos x = a$



$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (в точках A і B);

$\cos x = 1$; $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (в точці C);

$\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (в точці D)

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Розв'язки рівняння $\cos x = a$

При $|a|>1$ рівняння не має коренів, оскільки $|\cos x|\leqslant 1$ для будь-якого x (пряма $y=a$ на рисунку до п. 1 табл. 36 при $a>1$ або при $a<-1$ не перетинає графік функції $y=\cos x$).

Нехай $|a|\leqslant 1$. Тоді пряма $y=a$ перетинає графік функції $y=\cos x$. На проміжку $[0;\pi]$ функція $y=\cos x$ спадає від 1 до −1, тому рівняння $\cos x=a$ має тільки один корінь $x_1=\arccos a$ на цьому проміжку (рисунок до п. 1 табл. 36).

Косинус — парна функція, тому на проміжку $[-\pi;0]$ рівняння $\cos x=a$ теж має тільки один корінь — число, протилежне до x_1 тобто $x_2=-\arccos a$.

Отже, на проміжку $[-\pi;\pi]$ (довжиною 2π) рівняння $\cos x=a$ при $|a|\leqslant 1$ має тільки корені $x=\pm\arccos a$.

Ураховуючи, що функція $y=\cos x$ періодична з періодом 2π, а отже, усі інші корені відрізняються від знайдених на $2\pi n$ $(n\in \boldsymbol{Z})$, одержуємо таку формулу коренів рівняння $\cos x=a$ при $|a|\leqslant 1$:

$$x=\pm\arccos+2\pi n,\quad n\in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

2 Окремі випадки розв'язування рівняння $\cos x = a$

Корисно пам'ятати спеціальні записи розв'язків рівняння $\cos x=a$ при $a=0$, $a=-1$, $a=1$, які можна легко одержати, використовуючи одиничне коло.

Ураховуючи, що косинус дорівнює абсцисі відповідної точки одиничного кола, одержуємо, що $\cos x=0$, якщо відповідною точкою одиничного кола є точка A або точка B (рисунок до п. 2 табл. 36). Тоді $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$. Аналогічно $\cos x=1$, коли відповідною точкою одиничного кола є точка C, отже, $x=2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Також $\cos x=-1$, коли відповідною точкою одиничного кола є точка D, отже, $x=\pi+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ*

Приклад Розв'яжіть рівняння $\cos x=-\frac{1}{2}$.

Розв'язання	Коментар
▶ $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; $x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. *Відповідь*: $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. ◁	Оскільки $\left\|-\frac{1}{2}\right\|<1$, то задане рівняння виду $\cos x=a$ має корені, які можна знайти за формулою (1). Для обчислення $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ можна скористатися формулою: $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$. Тоді $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

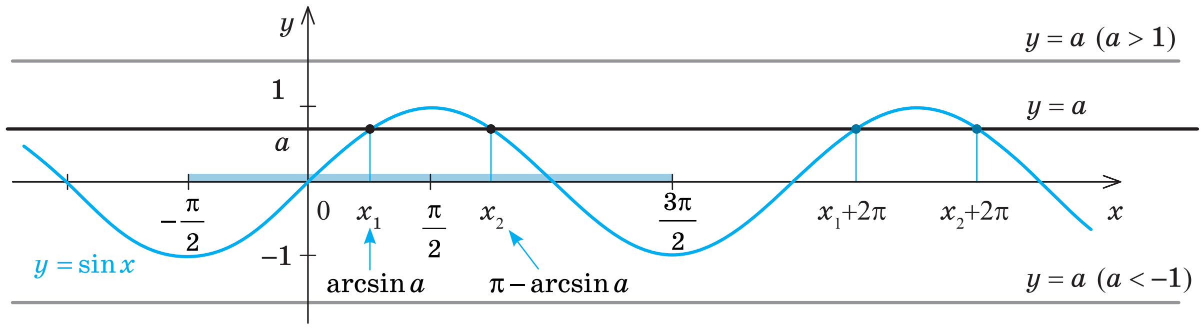
* Див. також приклади в інтернет-підтримці підручника.

23.2 Рівняння $\sin x = a$

Таблиця 37

1. Графічна ілюстрація і розв'язки рівняння $\sin x = a$

Графічна ілюстрація



Розв'язки*

$\sin x = a$

$|a| > 1$ — Коренів немає

$|a| \leqslant 1$ — $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$

Приклади**

1. ▶ $\sin x = \dfrac{1}{2}$,

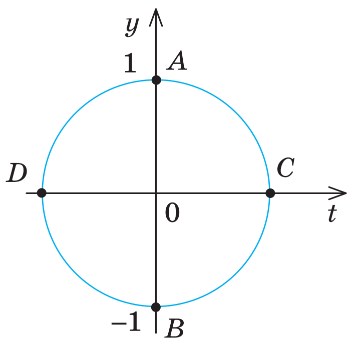
$x = (-1)^n \arcsin \dfrac{1}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$.

$x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

2. ▶ $\sin x = \sqrt{3}$.

Коренів немає, оскільки $\sqrt{3} > 1$. ◁

2. Окремі випадки розв'язування рівняння $\sin x = a$



$\sin x = 0$; $x = \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}$ (в точках C і D);

$\sin x = 1$; $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}$ (в точці A);

$\sin x = -1$; $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}$ (в точці B)

---

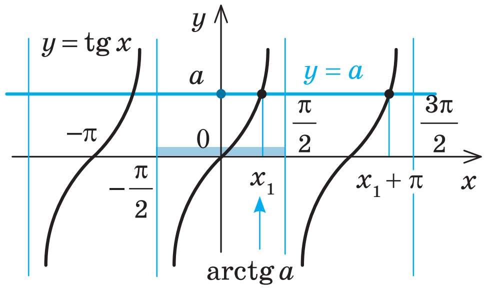
* Як видно з графічної ілюстрації, при $|a| \leqslant 1$ коренями рівняння $\sin x = a$ є тільки значення $x = \arcsin a + 2\pi k$ і $x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}$. Обидві серії коренів можна задати однією формулою $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$. Дійсно, при $n = 2k$ (парне число) з останньої формули одержуємо першу серію коренів, а при $n = 2k + 1$ (непарне число) — другу серію (більш детально див. в інтернет-підтримці підручника).

** Див. також приклади в інтернет-підтримці підручника.

23.3. Рівняння $\operatorname{tg}x = a$ і $\operatorname{ctg}x = a$

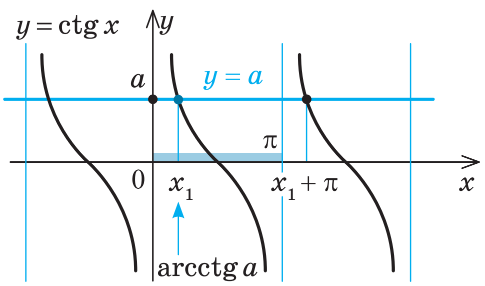
Таблиця 38

1. Графічна ілюстрація і розв'язки рівняння $\operatorname{tg}x = a$



Формула	Приклад
$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{tg} x = a.\\ x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{gathered}}$ Окремий випадок: $\operatorname{tg} x = 0.$ $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	▶ $\operatorname{tg} x = 1.$ $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

2. Графічна ілюстрація і розв'язки рівняння $\operatorname{ctg}x = a$



Формула	Приклад
$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{ctg} x = a.\\ x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{gathered}}$ Окремий випадок: $\operatorname{ctg} x = 0.$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	▶ $\operatorname{ctg} x = 7.$ $x = \operatorname{arcctg} 7 + \pi n,$ $n \in \boldsymbol{Z}$ ◁

Докладніше пояснення й обґрунтування розв'язування зазначених рівнянь див. в інтернет-підтримці підручника.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Розв'язки рівнянь $\operatorname{tg}x = a$ і $\operatorname{ctg}x = a$

● Розглянемо рівняння $\operatorname{tg} x = a$. На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає (від $-\infty$ до $+\infty$), тому рівняння $\operatorname{tg} x = a$ при будь-якому значенні a має тільки один корінь $x_1 = \operatorname{arctg} a$ на цьому проміжку (рисунок до п. 1 табл. 38).

З урахуванням того, що функція $y = \operatorname{tg} x$ періодична з періодом π і всі інші корені відрізняються від знайденого на πn $(n \in \boldsymbol{Z})$, одержуємо таку формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

При $a = 0$ $\operatorname{arctg} 0 = 0$, отже, рівняння $\operatorname{tg} x = 0$ має корені $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ○

● Розглянемо рівняння $\operatorname{ctg} x = a$. На проміжку $(0; \pi)$ функція $y = \operatorname{ctg} x$ спадає (від $+\infty$ до $-\infty$), тому рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ при будь-якому значенні a має тільки один корінь $x_1 = \operatorname{arcctg} a$ на цьому проміжку (рисунок до п. 2 табл. 38).

Ураховуючи, що функція $y = \operatorname{ctg} x$ періодична з періодом π і всі інші корені відрізняються від знайденого на πn $(n \in \boldsymbol{Z})$, одержуємо таку формулу коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (2)$$

При $a = 0$ $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, отже, рівняння $\operatorname{ctg} x = 0$ має корені $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ○

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Розв'язання	Коментар
▶ $x = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n$, $n \in Z$. $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$. *Відповідь*: $-\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$. ◁	Рівняння $\operatorname{tg} x = a$ має розв'язки при будь-якому значенні a, отже, завжди можна скористатися формулою (1): $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$. Для знаходження $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$ можна використати формулу $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$. Тоді $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$.

Розв'язання	Коментар
▶ $3x + \frac{\pi}{6} = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi n$, $n \in Z$, $3x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. *Відповідь*: $\frac{7\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. ◁	Спочатку за формулою (2) знайдемо значення виразу $3x + \frac{\pi}{6}$, а потім з одержаного лінійного рівняння — значення змінної x. Для того щоб знайти $\operatorname{arcctg}(-1)$, можна скористатися формулою $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$. Тоді $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Запитання

1. Які рівняння називають найпростішими тригонометричними?
2. Назвіть формули розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь. У яких випадках не можна знайти корені найпростішого тригонометричного рівняння за цими формулами?
3. Виведіть формули розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.
4. Обґрунтуйте формули розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь для окремих випадків (для $\sin x = a$ і $\cos x = a$ випадки $a = 0$; 1; −1, для $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$ випадок $a = 0$).

Вправи

У завданнях 23.1–23.11 розв'яжіть рівняння.

23.1°. 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = \sqrt{3}$; 3) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

23.2°. 1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{1}{2}$; 4) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

23.3°. 1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{tg} x = -1$; 4) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

23.4°. 1) $\operatorname{ctg} x = 1$; 2) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{ctg} x = -1$; 4) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

23.5. 1) $\sin x = -0{,}6$; 2) $\cos x = 0{,}3$; 3) $\operatorname{tg} x = -3{,}5$; 4) $\operatorname{ctg} x = 2{,}5$.

23.6. 1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin 4x = 0$; 3) $\operatorname{tg} 3x = 1$; 4) $\operatorname{tg} 4x = 3$.

23.7. 1) $\sin\left(-\frac{t}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\cos\frac{t}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{7} = 1$.

23.8°. 1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$; 3) $\sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$; 4) $\cos 4x = 0$.

23.9. 1) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg}(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$.

23.10. 1) $2\cos\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$; 3) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$;

2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 3$; 4) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$.

23.11. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$; 3) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$;

2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -1$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2}$.

У завданнях 23.12–23.13 знайдіть корені рівняння на заданому проміжку.

23.12*. 1) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0; 2\pi]$; 3) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $[-3\pi; 3\pi]$;

2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\pi; \pi]$; 4) $\operatorname{ctg} 4x = -1$, $[0; \pi]$.

23.13*. 1) $\sin 3x = -\frac{1}{2}$, $[-4; 4]$; 3) $\cos x = 1$, $[-6; 16]$;

2) $\sin\frac{x}{2} = 0$, $[-12; 18]$; 4) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[1; 7]$.

23.14*. Розв’яжіть рівняння залежно від значення a:

1) $\sin x = 2a$; 4) $\operatorname{ctg} 3x = 2a$;

2) $\cos x = 1 + a^2$; 5) $a\sin x = a^2$;

3) $\operatorname{tg} 2x = 3a$; 6) $a\cos x = a^2 + 2a$.

§ 24 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Як правило, розв'язування тригонометричних рівнянь зводиться до розв'язування найпростіших рівнянь за допомогою перетворень тригонометричних виразів, розкладання на множники та заміни змінних.

24.1. Заміна змінних при розв'язуванні тригонометричних рівнянь

Слід пам'ятати загальний **орієнтир**, коли заміну змінних можна виконувати без перетворення заданих тригонометричних виразів.

> Якщо до рівняння, нерівності або тотожності змінна входить в одному й тому самому вигляді, то відповідний вираз зі змінною зручно позначити однією буквою (новою змінною).

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай $\sin x = t$, тоді одержуємо: $2t^2 - 7t + 3 = 0$. Звідси $t_1 = 3$, $t_2 = \frac{1}{2}$. 1. При $t = 3$ маємо: $\sin x = 3$ — це рівняння не має коренів, оскільки $\lvert 3 \rvert > 1$. 2. При $t = \frac{1}{2}$ маємо: $\sin x = \frac{1}{2}$, тоді $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Відповідь*: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁	Аналізуючи вигляд цього рівняння, помічаємо, що до нього входить тільки одна тригонометрична функція — $\sin x$. Отже, зручно ввести нову змінну $\sin x = t$. Після того як квадратне рівняння розв'язане, необхідно виконати обернену заміну і розв'язати одержані найпростіші тригонометричні рівняння.

Зауваження. Записуючи розв'язання прикладу 1, можна при введенні заміни $\sin x = t$ урахувати, що $\lvert \sin x \rvert \leqslant 1$, і записати обмеження $\lvert t \rvert \leqslant 1$, а далі зазначити, що один із коренів $t = 3$ не задовольняє умову $\lvert t \rvert \leqslant 1$, і після цього обернену заміну виконувати тільки для $t = \frac{1}{2}$.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\mathrm{tg}^3 2x - \mathrm{tg}\, 2x = 0$.

Коментар

До заданого рівняння змінна входить тільки у вигляді $\mathrm{tg}\, 2x$. Отже, зручно ввести нову змінну $\mathrm{tg}\, 2x = t$. Після виконання оберненої заміни і розв'язування одержаних найпростіших тригонометричних рівнянь слід записати до відповіді всі одержані корені.

Розв’язання

▶ Нехай $\operatorname{tg} 2x = t$. Тоді одержуємо $t^3 - t = 0$. Звідси $t(t^2 - 1) = 0$, тобто $t = 0$ або $t^2 - 1 - 0$. З останнього рівняння маємо $t^2 = 1$, звідси

$$t = 1 \text{ або } t = -1.$$

Виконуємо обернену заміну:

1. При $t = 0$ маємо $\operatorname{tg} 2x = 0$, тоді $2x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Отже, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
2. При $t = 1$ маємо $\operatorname{tg} 2x = 1$, тоді $2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi m$, $2x = \frac{\pi}{4} + \pi m$. Отже, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \boldsymbol{Z}$.
3. При $t = -1$ маємо $\operatorname{tg} 2x = -1$, тоді $2x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k$, $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$. Отже, $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ ◁

Складаючи план розв’язування більш складних тригонометричних рівнянь, можна скористатися таким **орієнтиром.**

1. Пробуємо звести всі тригонометричні функції до одного аргумента.
2. Якщо вдалося звести до одного аргумента, то пробуємо всі тригонометричні вирази звести до однієї функції.
3. Якщо до одного аргумента вдалося звести, а до однієї функції — ні, то пробуємо звести рівняння до однорідного.
4. В інших випадках переносимо всі члени рівняння в один бік і пробуємо одержати добуток, що дорівнює нулю, або використовуємо спеціальні прийоми розв’язування.

24.2. Розв’язування тригонометричних рівнянь зведенням до однієї функції (з однаковим аргументом)

Приклад

Розв’яжіть рівняння $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$.

▶ Використовуючи формулу косинуса подвійного аргумента й основну тригонометричну тотожність, одержуємо:

$$\cos^2 x - \sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0,$$

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0,$$

$$-2\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0.$$

Заміна $\sin x = t$ дає рівняння $-2t^2 - 5t - 2 = 0$.

Усі тригонометричні функції зводимо до одного аргумента x, використовуючи формулу $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Потім усі тригонометричні вирази зводимо до однієї функції $\sin x$ (ураховуємо, що $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$). В одержане рівняння змінна входить в одному й тому самому вигляді — $\sin x$, отже, зручно виконати заміну $\sin x = t$.

Тоді $2t^2+5t+2=0$, $t_1=-2$; $t_2=-\frac{1}{2}$.

Виконуємо обернену заміну:

1. При $t=-2$ маємо $\sin x=-2$ — коренів немає, оскільки $|-2|>1$.
2. При $t=-\frac{1}{2}$ маємо $\sin x=-\frac{1}{2}$.

   Тоді $x(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n$,

   $x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь: $(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. ◁

Зазначимо, що для розв'язування заданого прикладу можна було також використати формулу

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,$$

що дозволить за один крок звести всі тригонометричні вирази і до одного аргумента, і до однієї функції.

Зауваження. За бажання відповідь можна записати у вигляді $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

24.3. Розв'язування однорідних тригонометричних рівнянь та зведення тригонометричного рівняння до однорідного

Розглянемо рівняння

$$\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x=0. \qquad (1)$$

Для пошуку плану розв'язування цього рівняння (але не для його розв'язування) виконаємо заміни: $\sin x=u$, $\cos x=v$. Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$u^2-uv-2v^2=0 \qquad (2)$$

Усі одночлени, які стоять у лівій частині цього рівняння, мають степені 2 (нагадаємо, що степінь одночлена uv теж дорівнює 2). У цьому випадку рівняння (2) (і відповідно рівняння (1)) називають однорідним, і для розпізнавання таких рівнянь та їх розв'язування можна використовувати такий **орієнтир.**

Якщо всі члени рівняння, у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної), **мають однаковий сумарний степінь*, то рівняння називається однорідним**. Розв'язують однорідне рівняння діленням на найвищий степінь однієї зі змінних.

* Звичайно, якщо рівняння має вигляд $f=0$, ідеться тільки про степінь членів многочлена f, оскільки нуль-многочлен (тобто 0) степеня не має.

Зауваження. Дотримуючись цього орієнтира, доводиться ділити обидві частини рівняння на вираз зі змінною. При цьому можна втратити корені (якщо коренями є ті числа, при підстановці яких дільник дорівнює нулю). Щоб уникнути цього, необхідно окремо розглянути випадок, коли вираз, на який ми збираємося ділити обидві частини рівняння, дорівнює нулю, і лише після цього виконувати ділення на вираз, що не дорівнює нулю (див. також приклад в інтернет-підтримці підручника).

Приклад Розв’яжіть рівняння $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Розв’язання

▶ При $\cos x = 0$ рівняння не має коренів, тому розділимо обидві його частини на $\cos^2 x \neq 0$. Одержуємо

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 2\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0,$$

тобто $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - 2 = 0$.

Тоді $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

Заміна $\operatorname{tg} x = t$ дає рівняння $t^2 - t - 2 = 0$;

$$t_1 = -1, \quad t_2 = 2.$$

Виконуємо обернену заміну:

1) При $t = -1$ маємо $\operatorname{tg} x = -1$, тоді

$$x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

2) При $t = 2$ маємо $\operatorname{tg} x = 2$, тоді

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi m, \quad m \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

$\operatorname{arctg} 2 + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Коментар

Задане рівняння однорідне, оскільки всі його члени мають однаковий сумарний степінь 2. Його можна розв’язати діленням обох частин на $\sin^2 x$ або на $\cos^2 x$.

Якщо ми будемо ділити на $\cos^2 x$, то, щоб не втратити корені, випадок $\cos x = 0$ розглянемо окремо. Підставляючи $\cos x = 0$ в задане рівняння, одержуємо $\sin x = 0$. Але одночасно $\sin x$ і $\cos x$ не можуть дорівнювати нулю (оскільки $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Таким чином, значення змінної x, для яких $\cos x = 0$, не є коренями заданого рівняння. А при $\cos x \neq 0$ можна розділити обидві частини заданого рівняння на $\cos^2 x \neq 0$ і одержати рівносильне рівняння (та врахувати при цьому, що $\frac{\sin x}{\cos} = \operatorname{tg} x$).

В одержане рівняння змінна входить в одному й тому самому вигляді $\operatorname{tg} x$, тому зручно виконати заміну $\operatorname{tg} x = t$.

24.4. Розв’язування тригонометричних рівнянь виду $f(x) = 0$ за допомогою розкладання на множники

Приклад Розв’яжіть рівняння $\sin x + \sin 3x = \sin 4x$.

Розв’язання

▶ $2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2} - \sin 4x = 0$,

$$2\sin 2x \cos x - \sin 4x = 0,$$

$$2\sin 2x \cos x - 2\sin 2x \cos 2x = 0,$$

$$2\sin 2x(\cos x - \cos 2x) = 0,$$

$$\sin 2x = 0 \text{ або } \cos x - \cos 2x = 0.$$

Із першого з цих рівнянь:

$$2x = \pi n, \quad x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Друге рівняння перетворимо так:

$$-2\sin\frac{x+2x}{2}\sin\frac{x-2x}{2} = 0, \quad 2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0.$$

Звідси $\sin\frac{3x}{2} = 0$ або $\sin\frac{x}{2} = 0$.

Коментар

Відразу скористаємося четвертим пунктом орієнтира, наведеного в п. 24.1: *переносимо всі члени рівняння в один бік і пробуємо одержати добуток, що дорівнює нулю.*

Для цього застосуємо формулу перетворення суми синусів, яка стоїть у лівій частині рівняння, на добуток:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(і врахуємо, що $\cos(-x) = \cos x$).

Для того щоб винести який-небудь вираз за дужки і одержати добуток, достатньо записати $\sin 4x$ як синус подвійного аргумента (тоді за дужки можна винести $\sin 2x$).

Якщо добуток дорівнює нулю, то хоча б один зі співмножників дорівнює нулю.

Із цих рівнянь одержуємо:

$\frac{3x}{2}=\pi m$, $m\in\boldsymbol{Z}$ або $\frac{x}{2}=\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

$x=\frac{2\pi m}{3}$, $m\in\boldsymbol{Z}$ або $x=2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Відповідь: $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{2\pi m}{3}$, $m\in\boldsymbol{Z}$;

$2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. ◁

У другому з одержаних рівнянь перетворимо різницю косинусів на добуток. У кінці враховуємо, що всі задані й одержані вирази існують на всій множині дійсних чисел. Отже, задане рівняння на цій множині рівносильне сукупності рівнянь:

$\sin 2x=0$ або $\sin\frac{3x}{2}=0$, або $\sin\frac{x}{2}=0$,

і тому до відповіді потрібно записати всі корені кожного з цих рівнянь.

Зауваження. Запис відповіді можна скоротити. Так, якщо зобразити всі знайдені розв'язки на одиничному колі, то побачимо, що розв'язок $x=2\pi k$ дає ті самі точки, що й формула $x=\frac{\pi n}{2}$ при n, кратному 4 $(n=4k)$, або формула $x=\frac{2}{3}\pi m$ при m, кратному 3 $(m=3k)$. Отже, формула $x=2\pi k$ не дає нових розв'язків порівняно з формулами $x=\frac{\pi n}{2}$ або $x=\frac{2}{3}\pi m$, і тому відповідь може бути записана у вигляді тільки двох останніх формул. Але таке скорочення відповіді не є обов'язковим.

24.5. Відбір коренів тригонометричних рівнянь

Якщо при розв'язуванні тригонометричних рівнянь необхідно відбирати корені, то найчастіше це роблять так: знаходять спільний період (бажано найменший) усіх тригонометричних функцій, що входять у запис рівняння (звичайно, якщо цей спільний період існує); потім на цьому періоді відбирають корені (відкидають сторонні), а ті, що залишаються, періодично продовжують.

Приклади відбору коренів при розв'язуванні тригонометричних рівнянь наведені в інтернет-підтримці підручника.

Запитання

1. Які способи використовують при розв'язуванні тригонометричних рівнянь? Наведіть приклади.
2. Яку заміну змінних можна виконати при розв'язуванні рівняння $8\cos^2 x-2\cos x-1=0$? Яке рівняння одержимо після заміни?
3. 1) Поясніть, чому рівняння $3\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$ є однорідним.

   2)* Як можна розв'язати це однорідне рівняння?
4. Як можна виконати відбір коренів тригонометричного рівняння? Проілюструйте відбір коренів тригонометричного рівняння на прикладі.

Вправи

У завданнях 24.1–24.20 розв'яжіть рівняння.

24.1. 1)° $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$; 3)° $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$;

2) $3\sin^2 2x + 10\sin 2x + 3 = 0$; 4) $2\sin^2 \frac{x}{2} - 3\sin \frac{x}{2} + 1 = 0$.

24.2. 1)° $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; 3)° $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$;

2) $2\cos^2 3x - 5\cos 3x - 3 = 0$; 4) $2\cos^2 \frac{x}{3} + 3\sin \frac{x}{3} - 2 = 0$.

24.3. 1)° $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$; 3)° $5\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$;

2) $8\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$; 4) $4\sin 3x + \cos^2 3x = 4$.

24.4. 1)° $3\,\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$; 3)° $2\,\mathrm{tg}^2 x + 3\,\mathrm{tg}\, x - 2 = 0$;

2) $\mathrm{ctg}^2 2x - 6\,\mathrm{ctg}\, 2x + 5 = 0$; 4) $7\,\mathrm{ctg}^2 \frac{x}{2} + 2\,\mathrm{ctg} \frac{x}{2} = 5$.

24.5. 1) $3\cos 2x = 7\sin x$; 2) $2\cos 2x = 7\cos x$.

24.6. 1) $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$;

2) $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$;

3) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$;

4) $3\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

24.7. 1) $\cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x$; 3) $5\cos x + 12\sin x = 13$;

2) $\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = 1$; 4) $3\cos x - 2\sin 2x = 0$.

24.8. 1) $1 - \cos x = 2\sin \frac{x}{2}$; 3) $\cos 2x = 2\frac{1}{3}\sin x$;

2) $1 + \cos x = 2\cos \frac{x}{2}$; 4) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$.

24.9. 1) $\cos x + \sin x = 0$; 3) $3\cos^2 x = 4\sin x \cos x - \sin^2 x$;

2) $\cos^2 x - 3\sin x \cos x = -1$; 4) $4\cos^2 x - 7\sin 2x = 2$.

24.10. 1) $\frac{5}{3\cos x + 4} = 2$; 3) $\frac{2}{3\sqrt{2}\sin x - 1} = 1$;

2) $\frac{3}{3\sin x + 4} = 2$; 4) $\frac{2}{3\sqrt{2}\cos x - 1} = 1$.

24.11. 1) $\frac{3}{5\,\mathrm{tg}\, x + 8} = 1$; 3) $\frac{4}{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x + 5} = \frac{1}{2}$;

2) $\frac{3}{5\,\mathrm{ctg}\, x + 8} = 1$; 4) $\frac{2}{\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\, x + 5} = \frac{1}{4}$.

24.12. 1) $\frac{2\sin x + 7}{1{,}5\sin x + 3} = 2$; 3) $\frac{2\sin x + 7}{1{,}5\sin x + 3} = 2$;

2) $\frac{2\cos x + 7}{1{,}5\cos x + 3} = 2$; 4) $\frac{6}{\mathrm{ctg}\, x + 2} = 3 - \mathrm{ctg}\, x$.

24.13. 1) $\frac{15}{\sin x+1}=11-2\sin x$; 3) $\frac{1}{\operatorname{tg} x+1}=2\operatorname{ctg} x-1$;

2) $\frac{15}{\cos x+1}=11-2\cos x$; 4) $\frac{10}{\operatorname{tg} x+2}=3-\operatorname{ctg} x$.

24.14. 1) $\sin x+\sin 3x=0$; 3) $\cos 2x-\cos 6x=0$;

2) $\sin 5x-\sin x=0$; 4) $\cos 4x+\cos 2x=0$.

24.15*. 1) $|\sin x|=|\cos x|$; 2) $|\sin 2x|=|\sqrt{3}\cos 2x|$.

24.16*. 1) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{13\pi}{6}-2x\right)=0$;

2) $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{47\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)$.

24.17*. 1) $\sin^2 x-5\cos x=\sin x\cos x-5\sin x$;

2) $\cos^2 x-7\sin x+\sin x\cos x=7\cos x$.

24.18. 1) $\sin^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-2\sin^2 x=0$;

2) $\sin^2 3x+3\cos^2 x-4\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)=0$;

3) $\sin^2 x+2\sin(\pi-x)\cos x-3\cos^2(2\pi-x)=0$;

4) $\sin^2(2\pi-3x)+5\sin(\pi-3x)\cos 3x+4\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)=0$.

24.19. 1) $3\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=2$;

2) $2\cos^2\frac{x}{2}-3\sin\left(\pi-\frac{x}{2}\right)\cos\left(2\pi-\frac{x}{2}\right)+7\sin^2\frac{x}{2}=3$;

3) $4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\sin(\pi+x)+3\cos^2(\pi+x)=3$;

4) $3\sin^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)-2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos(\pi+x)+2\sin^2(x-\pi)=2$.

24.20. 1) $\sin^2(\pi+x)-5\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+2=0$; 3) $2\cos^2 x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1=0$;

2) $2\cos^2 x+5\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-4=0$; 4) $5-5\sin 3(\pi-x)=\cos^2(\pi-3x)$.

Виявіть свою компетентність

24.21. Спробуйте запропонувати для однорідних рівнянь (вправа 24.6) інший спосіб розв'язування, який не буде пов'язаний із діленням на вираз зі змінною. *Вказівка*. Спробуйте розглянути ці рівняння як квадратні відносно $\sin x$ або $\cos x$.

§ 25 СИСТЕМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ. СКЛАДНІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

25.1. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь

Системи тригонометричних рівнянь розв'язують за допомогою тих самих методів, що й алгебраїчні системи, зокрема це виключення невідомих і заміна змінних. Виключити невідомі можна за допомогою одного з двох прийомів: з одного рівняння виразити якесь невідоме (або функцію від нього) і підставити його в інші або перетворити задані рівняння і потім скласти з них комбінації, у яких число невідомих зменшується.

Приклад 1 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x+\sin y=1. \end{cases}$

Розв'язання

► Із першого рівняння знаходимо $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ і підставляємо в друге.

Одержуємо $\cos x+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=1$,

тобто $\cos x+\cos x=1$; $2\cos x=1$;

$\cos x=\dfrac{1}{2}$. Отже,

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

1) Якщо $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, то

$$y=\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\frac{\pi}{6}-2\pi n.$$

2) Якщо $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, то

$$y=\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\frac{5\pi}{6}-2\pi n.$$

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{6}-2\pi n\right)$,

$\left(-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;\ \dfrac{5\pi}{6}-2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. ◁

Зауваження. Якби для знаходження значення y ми не розглянули формулу (1) окремо зі знаком «+» і знаком «−», то разом із правильними розв'язками одержали б і сторонні розв'язки заданої системи.

Дійсно, у такому випадку маємо

$$\begin{cases} x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, \\ y=\dfrac{\pi}{2}-\left(\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right), \end{cases} n\in \boldsymbol{Z}.$$

Тоді, наприклад, при $n=0$ одержуємо

$$\begin{cases} x=\pm\dfrac{\pi}{3}, \\ y=\dfrac{\pi}{2}-\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right), \end{cases} \text{тобто} \begin{cases} x=\pm\dfrac{\pi}{3}, \\ y=\dfrac{\pi}{6} \text{ або } y=\dfrac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

Отже, крім розв'язків, які ввійшли до відповіді, ми маємо ще дві пари значень:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}, \\ y=\dfrac{5\pi}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{3}, \\ y=\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Але ці пари значень x і y не є розв'язками заданої системи, оскільки вони не задовольняють перше рівняння.

Тому слід запам'ятати: **коли розв'язок рівняння $\cos x=a$ доводиться використовувати для подальших перетворень, то зручно записувати його у вигляді двох формул: окремо зі знаком «+» і окремо зі знаком «−».**

Приклад 2 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\cos x\cos y=\dfrac{1}{4},\\ \sin x\sin y=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$.

Розв'язання

▶ Виконаємо почленно додавання і віднімання цих рівнянь. Одержимо рівносильну систему $\begin{cases}\cos(x-y)=1,\\ \cos(x+y)=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ Звідси $\begin{cases}x-y=2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z},\\ x+y=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.\end{cases}$

Подамо останню систему у вигляді сукупності двох систем, записуючи розв'язки другого рівняння окремо зі знаком «+» і окремо зі знаком «−»: $\begin{cases}x-y=2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z},\\ x+y=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}\end{cases}$ або

$$\begin{cases}x-y=2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z},\\ x+y=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.\end{cases}$$

Почленно додаючи і віднімаючи рівняння цих систем, знаходимо x і y:

$$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{3}+\pi n+\pi k,\\ y=\dfrac{\pi}{3}+\pi n-\pi k\end{cases}\quad \text{або}\quad \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi n+\pi k,\\ y=-\dfrac{\pi}{3}+\pi n-\pi k.\end{cases}$$

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{3}+\pi n+\pi k;\ \dfrac{\pi}{3}+\pi n-\pi k\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{3}+\pi n+\pi k;\ -\dfrac{\pi}{3}+\pi n-\pi k\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$, $k\in \boldsymbol{Z}$. ◁

Зауваження. До запису відповіді ввійшли два параметри n і k, що незалежно один від одного «пробігають» множину цілих чисел. Якщо спробувати при розв'язуванні заданої системи скористатися лише одним параметром, наприклад n, то це спричинить втрату розв'язків. Отже, у кожному випадку, *коли система тригонометричних рівнянь зводиться до системи, що складається з елементарних тригонометричних рівнянь* (тобто з рівнянь виду $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$, $\operatorname{ctg} x=a$), *при розв'язуванні кожного з цих рівнянь необхідно використовувати свій цілочисловий параметр.*

Запитання

1. Які методи використовують для розв'язування систем тригонометричних рівнянь?

2. Поясніть, у якому випадку при формальному розв'язуванні системи $\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \cos(x-y)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ми можемо втратити частину розв'язків, а в якому — одержати сторонні розв'язки. Розв'яжіть цю систему.

Вправи

У завданнях 25.1.1–25.1.8 розв'яжіть систему рівнянь.

25.1.1°. 1) $\begin{cases}\sin x+\sin y=1,\\ x+y=\pi;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\cos x+\cos y=1,\\ x+y=2\pi.\end{cases}$

25.1.2°. 1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos x - \cos y = \frac{1}{2}, \\ x - y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

25.1.3°. 1) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 0{,}5, \\ \sin x \cdot \sin y = -0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos x + \cos y = -0{,}5, \\ \cos x \cdot \cos y = -0{,}5. \end{cases}$

25.1.4. 1) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}. \end{cases}$

25.1.5. 1) $\begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}75, \\ \sin x \sin y = 0{,}25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}75, \\ \sin y \cos x = 0{,}25. \end{cases}$

25.1.6. 1) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \sin y - \cos x \cos y = -1, \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

25.1.7*. 1) $\begin{cases} \cos x \cos y = \sin^2 y, \\ \sin x \sin y = \cos^2 y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \cos y = \sin^2 y, \\ \cos x \sin y = \cos^2 y. \end{cases}$

25.1.8*. 1) $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 1, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \cos x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 1, \\ \cos^2 x + \sin^2 y = \sin x. \end{cases}$

25.2. Приклади розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь

Для розв'язування деяких тригонометричних рівнянь можна застосовувати властивості функцій (відповідні загальні підходи до розв'язування було розглянуто в § 4), зокрема оцінку значень лівої і правої частин рівняння.

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\cos 6x + \sin\frac{5x}{2} = 2$.

Розв'язання

▶ Оцінимо область значень функції $f(x) = \cos 6x + \sin\frac{5x}{2}$.

Оскільки $|\cos 6x| \leqslant 1$ і $\left|\sin\frac{5x}{2}\right| \leqslant 1$, то $|f(x)| \leqslant 2$, тобто $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

З'ясуємо, чи існують такі значення x, при яких функція $f(x)$ може набувати найбільшого значення 2. Якщо $\cos 6x$ буде менший від 1, то для того, щоб сума $\cos 6x + \sin\frac{5x}{2}$ дорівнювала 2, необхідно, щоб значення $\sin\frac{5x}{2}$ було більшим за 1, що неможливо. Аналогічно, якщо припустити, що $\sin\frac{5x}{2}$ менший від 1, то для того, щоб сума $\cos 6x + \sin\frac{5x}{2}$ дорівнювала 2, необхідно, щоб значення $\cos 6x$ було більшим за 1, що неможливо. Отже, рівність у даному рівнянні можлива тоді й тільки тоді, коли $\cos 6x$ і $\sin\frac{5x}{2}$ дорівнюють 1.

Тому задане рівняння рівносильне системі рівнянь $\begin{cases}\cos 6x = 1,\\ \sin\dfrac{5x}{2} = 1.\end{cases}$ Звідси

$\begin{cases}6x = 2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z},\\ \dfrac{5x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.\end{cases}$ Тоді $\begin{cases}x = \dfrac{\pi k}{3},\\ x = \dfrac{\pi + 4\pi n}{5}.\end{cases}$

Прирівнюючи праві частини цих рівностей, одержуємо $\dfrac{\pi k}{3} = \dfrac{\pi + 4\pi n}{5}$. Звідси $k = \dfrac{3+12n}{5}$.

Оскільки k і n — цілі числа, то спробуємо підставити в праву частину останньої рівності замість n цілі числа і знайти, для яких значень n за цією формулою k також буде цілим числом. При $n = 1$ одержуємо $k = 3$. У випадку, коли коефіцієнт 12 при змінній n у чисельнику дробу і знаменник 5 — взаємно прості числа, повторення подільності націло буде тільки через знаменник, тобто через 5. Тому останнє рівняння має розв'язки в цілих числах вигляду $n = 1 + 5m$, $m\in \boldsymbol{Z}$. Підставляючи значення n в один із розв'язків системи, одержуємо $x = \pi + 4\pi m$. Ці значення і є розв'язками останньої системи, а отже, і розв'язками заданого рівняння.

Відповідь: $\pi + 4\pi m$, $m\in \boldsymbol{Z}$. ◁

З іншими прикладами розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь ви можете ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Іноді для того, щоб розв'язати тригонометричні рівняння, доводиться застосовувати тригонометричні формули, які призводять до звуження ОДЗ заданого рівняння. Такі перетворення можуть приводити до втрати коренів рівняння. Щоб цього не сталося, слід користуватися таким **орієнтиром**.

Якщо для розв'язування рівнянь (чи нерівностей) доводиться виконувати перетворення, що звужують ОДЗ початкового рівняння (чи нерівності), то ті значення, на які звужується ОДЗ, потрібно розглядати окремо.

У табл. 39 указано тригонометричні *формули, які можуть приводити до звуження ОДЗ*, та відповідні значення змінної, які слід перевіряти при використанні цих формул.

Таблиця 39

Формула (використовують зліва направо)	**Значення змінної, які треба перевірити окремо, якщо вони входять до ОДЗ початкового рівняння**
$\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ $\operatorname{tg}(x\pm\alpha) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg}\alpha}{1 \mp \operatorname{tg} x\cdot \operatorname{tg}\alpha}$ $\left(\alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}\right)$ $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$	$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$ $\operatorname{ctg}(x\pm\alpha) = \dfrac{\operatorname{ctg} x\cdot \operatorname{ctg}\alpha \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg} x}$ $(\alpha \ne \pi n,\ n\in \boldsymbol{Z})$ $\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$	$x = \pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$

Формула (використовують зліва направо)		**Значення змінної, які треба перевірити окремо, якщо вони входять до ОДЗ початкового рівняння**
$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{\sin x}$		$x=\pi+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$		$x=2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$
$\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$	$\operatorname{tg} x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\operatorname{ctg} x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$	$x=\pi+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$

Щоб упевнитися, що наведені формули приводять до звуження ОДЗ, достатньо порівняти області допустимих значень їх лівих і правих частин.

Наприклад, розглянемо формулу $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

- ОДЗ лівої частини: $x\neq \pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. Щоб знайти ОДЗ правої частини формули, ураховуємо, що знаменник дробу не дорівнює нулю: $\operatorname{tg} x\neq 0$, отже, $x\neq \pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$, а також умову існування тангенса: $x\neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. Тобто ОДЗ правої частини задано системою обмежень $\begin{cases} x\neq \pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}, \\ x\neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$ Порівнюючи ОДЗ лівої і правої частин розглянутої формули, бачимо, що ОДЗ правої частини містить додаткове обмеження $\left(x\neq \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$. Отже, при переході за цією формулою від її лівої частини до правої відбувається звуження ОДЗ (відкидаються саме ті значення, які вказано в табл. 39: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$). Щоб не загубити корені заданого рівняння, використовуючи формулу $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, значення $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$, потрібно розглянути окремо (звичайно, тільки в тому випадку, коли воно входить до ОДЗ заданого рівняння).

Із прикладом використання зазначеного орієнтира ви можете ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Деякі тригонометричні рівняння вдається розв'язати, використовуючи такий **орієнтир**, який умовно можна назвати «Шукайте квадратний тричлен»:

спробуйте розглянути задане рівняння як квадратне відносно якоїсь змінної (чи відносно якоїсь функції).

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $x^2-2x\sin\frac{\pi x}{2}+1=0$.

Розв'язання

▶ Розглянемо рівняння як квадратне відносно x: $x^2-\left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right)\cdot x+1=0$.

Це рівняння може мати корені тоді і тільки тоді, коли його дискримінант буде невід'ємним:

$D=4\sin^2\frac{\pi x}{2}-4\geqslant 0$. Тоді $\sin^2\frac{\pi x}{2}\geqslant 1$.

Але $\sin^2\frac{\pi x}{2}$ не може бути більшим за 1.

Отже, $\sin^2\frac{\pi x}{2}=1$, тобто $\sin\frac{\pi x}{2}=1$ або $\sin\frac{\pi x}{2}=-1$. Підставляючи ці значення в задане рівняння, одержуємо, що воно рівносильне сукупності систем:

$$\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2}=1,\\ x^2-2x+1=0\end{cases} \text{ або } \begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2}=-1,\\ x^2+2x+1=0.\end{cases}$$

Із другого рівняння першої системи маємо $x=1$, що задовольняє і перше рівняння системи. Таким чином, $x=1$ — розв'язок першої системи, а отже, і розв'язок заданого рівняння. Аналогічно одержуємо $x=-1$ — розв'язок другої системи, а отже, і розв'язок заданого рівняння.

Відповідь: 1; –1. ◁

Коментар

Можна застосувати декілька підходів до розв'язування заданого рівняння:

1) розглянути задане рівняння як квадратне відносно змінної x і врахувати, що воно може мати корені тоді й тільки тоді, коли його дискримінант буде невід'ємним;
2) якщо в лівій частині рівняння виділити повний квадрат $\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2$, то одержимо рівняння
$$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2+\left(1-\sin^2\frac{\pi x}{2}\right)=0.$$
Урахуємо, що завжди
$$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2\geqslant 0 \text{ і } 1-\sin^2\frac{\pi x}{2}\geqslant 0.$$
А сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю.
Також можна останнє рівняння записати у такому вигляді: $\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2=\sin^2\frac{\pi x}{2}-1$ і оцінити ліву і праву частини цього рівняння.

Виконайте розв'язування, запропоновані в п. 2, самостійно.

Розв'язуючи **рівняння з оберненими тригонометричними функціями**, корисно пам'ятати, що при $|a|\leqslant 1$ $\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}$ і для довільних значень a $\operatorname{arctg} a+\operatorname{arcctg}=\frac{\pi}{2}$.

Також при розв'язуванні рівнянь з оберненими тригонометричними функціями часто буває зручним від обох частин рівняння взяти якусь тригонометричну функцію і скористатися означенням відповідних обернених тригонометричних функцій.

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $2\arcsin x=\arcsin\frac{10}{13}x$.

Коментар

Якщо взяти від обох частин заданого рівняння функцію синус, то одержимо рівняння-наслідок: якщо числа рівні, то й синуси будуть рівними, але якщо синуси двох чисел рівні, то це ще не означає, що числа обов'язково будуть рівними.

Правильна рівність буде зберігатися при прямих перетвореннях, але не обов'язково буде зберігатися при обернених перетвореннях. Отже, у кінці необхідно виконати перевірку одержаних розв'язків. Якщо позначити $\arcsin x = \alpha$, то за означенням арксинуса $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\alpha = x$. Щоб знайти $\cos\alpha$, ураховуємо, що при $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ значення $\cos\alpha \geqslant 0$, отже, $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

Перевіряючи одержані розв'язки, у тих випадках, коли знайдені числа не є коренями заданого рівняння, іноді зручно порівняти одержані розв'язки з табличними значеннями. Наприклад, $\frac{12}{13} \approx 0{,}9$ більше за $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$. Ураховуючи зростання функції $y = \arcsin t$, одержуємо, що $\arcsin\frac{12}{13} > \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання

► Якщо позначити $\arcsin x = \alpha$, де $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, і $\arcsin\frac{10}{13}x = \beta$, де $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то задане рівняння матиме вигляд

$$2\alpha = \beta. \qquad (1)$$

Візьмемо від обох частин рівняння (1) функцію синус і одержимо

$$\sin 2\alpha = \sin\beta,$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin\beta. \qquad (2)$$

За означенням арксинуса $\sin\alpha = x$, $\sin\beta = \frac{10}{13}x$.

Ураховуючи, що $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, одержуємо $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$.

Тоді рівняння (2) матиме вигляд

$$2x\sqrt{1-x^2} = \frac{10}{13}x.$$

Звідси $x\left(2\sqrt{1-x^2} - \frac{10}{13}\right) = 0$.

Отже, $x = 0$ або $\sqrt{1-x^2} = \frac{5}{13}$, тобто

$$1 - x^2 = \frac{25}{169},\quad x^2 = \frac{144}{169},\quad x = \pm\frac{12}{13}.$$

Перевірка:

1) $x = 0$ — корінь $\left(2\arcsin 0 = \arcsin\left(\frac{10}{13}\cdot 0\right);\ 0 = 0\right)$;

2) $x = \pm\frac{12}{13}$ — сторонні корені. Дійсно, для $x = \frac{12}{13}$ маємо $2\arcsin\frac{12}{13} \neq \arcsin\frac{120}{169}$ (оскільки $\frac{12}{13} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$2\arcsin\frac{12}{13} > 2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

а $\arcsin\frac{120}{169} < \frac{\pi}{2}$). Аналогічно при $x = -\frac{12}{13}$ маємо $2\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right) < -\frac{\pi}{2}$ і рівність теж не може виконуватися.

Відповідь: 0. ◁

Зауваження. Для того щоб розв'язати рівняння $2\arcsin x = \arcsin\frac{10}{13}x$, можна було б використати не тільки рівняння-наслідки, а й рівносильні перетворення рівнянь. Але в цьому випадку доведеться врахувати ОДЗ заданого рівняння:

$$\begin{cases} |x| \leqslant 1, \\ \left|\frac{10}{13}x\right| \leqslant 1, \end{cases} \qquad (3)$$

а також те, що для всіх коренів рівняння його права частина $\left(\arcsin\frac{10}{13}x\right)$ розташована в проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (за означенням арксинуса). Отже, і ліва частина рівняння повинна перебувати в цьому самому проміжку. Таким чином, для всіх коренів заданого рівняння виконується умова: $-\frac{\pi}{2} \leqslant 2\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, тобто

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{4}. \qquad (4)$$

У проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функція $\sin t$ є зростаючою, тоді при виконанні умови (4) (звичайно, на ОДЗ (3)), якщо від обох частин заданого рівняння взяти синус, то одержимо рівносильне йому рівняння (тобто задане рівняння рівносильне рівнянню (2) за умов (3) і (4)). Виконуючи міркування й перетворення, наведені вище в розв'язанні прикладу 3, одержуємо $x = 0$ або $x = \pm\frac{12}{13}$. Усі знайдені корені входять до ОДЗ (задовольняють умову (3)), але умову (4) задовольняє тільки $x = 0$, отже, коренем заданого рівняння є тільки $x = 0$.

Запитання

1. Поясніть, як можна розв'язати рівняння $\cos x = 1 + x^2$ за допомогою оцінки значень лівої і правої частин рівняння. Розв'яжіть це рівняння.
2. Поясніть, як можна розв'язувати тригонометричні рівняння, до запису яких входять лише сума чи різниця синуса і косинуса одного й того самого аргумента та їх добуток. (Див. інтернет-підтримку підручника.) Наведіть приклад такого рівняння.
3. Наведіть приклад тригонометричної формули, застосування якої може привести до звуження ОДЗ заданого рівняння й до втрати його коренів. Поясніть, чому відбувається звуження ОДЗ. Як потрібно використовувати такі формули, щоб не втратити корені заданого рівняння? Поясніть це на прикладі рівняння

$$2\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Вправи

25.2.1. 1) $\sin x - \cos x = \sin 2x - \frac{1}{2}$; 2) $\sin x + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 0{,}5\sin 2x$.

25.2.2. 1) $\sin 7x + \cos 12x = 2$; 3) $\cos \pi x + \sin \frac{5\pi x}{2} = -2$;

2) $\sin 2x \sin 6x = 1$; 4) $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$;

5) $5\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + 5\,\mathrm{tg}^2 5x + 5\,\mathrm{ctg}^2 5x = 12$.

25.2.3. 1) $5\,\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{ctg}\, x - 5$; 2) $\sin 2x + \mathrm{tg}\, 2x = -\frac{8}{3}\mathrm{ctg}\, x$.

25.2.4. 1) $9x^2 - 6x\cos 6\pi x + 1 = 0$;

2) $4x^2 - 4x\sin(xy) + 1 = 0$ (знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, які задовольняють рівняння).

25.2.5. 1) $2(\arcsin x)^2 + \pi^2 = 3\pi \arcsin x$; 4) $\mathrm{arctg}\, x \cdot \mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi^2}{16}$;

2) $9(\arccos 2x)^2 - 3\pi \arccos 2x - 2\pi^2 = 0$; 5) $2\arcsin 2x = \arccos 7x$;

3) $2\arcsin x + 3\arccos x = \pi$; 6) $\arcsin x = 2\,\mathrm{arctg}\, x$.

25.2.6 1) $\arcsin(x + 2{,}5) = \frac{\pi}{6}$; 3) $(x^2 - 4)\arcsin x = 0$;

2) $\arcsin\left(\frac{x}{2} - 3\right) = \frac{\pi}{6}$; 4) $\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\arccos x = 0$.

25.2.7. 1) $\arccos(\sin x) = \frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}$; 3) $\arcsin(3 - 2x) = -\frac{\pi}{4}$;

2) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) - \frac{x}{4} = \frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{3}$.

25.2.8. 1) $\arcsin x \cdot \arccos x = \frac{\pi^2}{18}$; 3) $3\arcsin x - \pi = 0$;

2) $\mathrm{arctg}\, x \cdot \mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi^2}{16}$; 4) $4\,\mathrm{arctg}\, x - 6\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, x\right) = \pi$.

25.2.9. 1) $(\arcsin x)^2 - 4\arcsin x = 0$; 3) $\mathrm{arctg}(1 + x) + \mathrm{arctg}(1 - x) = \frac{\pi}{4}$;

2) $(\arccos x)^2 - 5\arccos x = 0$; 4) $\arcsin(1 - x) - 2\arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

25.2.10. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x = -\sqrt{3}\sin y, \\ \sqrt{3}\cos x = \cos y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}, \\ \cos 2x + 2\cos y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4\sin(3x + 2y) + \sin x = 0, \\ 4\sin(2x + 3y) + \sin y = 0. \end{cases}$

§ 26 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ

26.1. Розв'язування рівнянь із параметрами

Якщо крім змінної та числових коефіцієнтів до запису тригонометричного рівняння входять також буквені коефіцієнти — параметри, то, розв'язуючи ці рівняння, можна користуватися таким **орієнтиром** (див. § 9).

> Будь-яке рівняння чи нерівність із параметрами можна розв'язувати як звичайне рівняння чи нерівність доти, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Якщо якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язування необхідно розбити на кілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно.

На етапі пошуку плану розв'язування рівняння чи нерівності з параметрами або в ході міркувань, пов'язаних із самим розв'язуванням як таким, часто зручно супроводжувати відповідні міркування схемами. За цими схемами легко простежити, у який саме момент ми не змогли однозначно виконати необхідні перетворення, на скільки випадків довелося розбити розв'язання і чим відрізняється один випадок від іншого. Щоб на таких схемах (чи в записах громіздких розв'язань) не втратити якусь відповідь, доцільно поміщати остаточні відповіді в прямокутні рамки.

Приклад Розв'яжіть рівняння $\sin 2x = 4a\cos x$.

Розв'язання	Коментар
▶ $2\sin x\cos x - 4a\cos x = 0$; $2\cos x(\sin x - 2a) = 0$. (1) Тоді $\cos x = 0$ або $\sin x - 2a = 0$. Звідси $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z}$ або $\sin x = 2a$. $\sin x = 2a$ $\lvert 2a \rvert > 1$ → $\boxed{\text{Коренів немає}}$ $\lvert 2a \rvert \leqslant 1$ → $\boxed{x = (-1)^n \arcsin(2a) + \pi n,\ n \in Z}$ *Відповідь*: (див. після зауваження). ◁	Спочатку зведемо всі тригонометричні функції до одного аргумента x, використовуючи формулу $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. Якщо перенести всі члени рівняння в ліву частину, то можна винести за дужки спільний множник $2\cos x$. Оскільки обидва множники мають зміст при будь-яких значеннях змінної x, то рівняння (1) рівносильне сукупності рівнянь $\cos x = 0$ або $\sin x - 2a = 0$, тобто сукупності $\cos x = 0$ або $\sin x = 2a$. Для рівняння $\cos x = 0$ ми можемо записати корені при будь-яких значеннях a (у цьому рівнянні параметра a немає), а в рівнянні $\sin x = 2a$ все залежить від правої частини: якщо $\lvert 2a \rvert > 1$, то коренів немає, а якщо $\lvert 2a \rvert \leqslant 1$, то корені є. Отже, доводиться розбивати розв'язування цього рівняння на два випадки.

Зауваження. Для запису одержаних відповідей (вони на схемах розміщені в прямокутних рамках) доцільно уточнити, при яких значеннях a виконуються обмеження $|2a|\leqslant 1$ та $|2a|>1$. Для цього розв'язуємо відповідні нерівності:

якщо $|2a|\leqslant 1$, тоді $-1\leqslant 2a\leqslant 1$, тобто $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}$;

якщо $|2a|>1$, тоді $2a<-1$ або $2a>1$, тобто $a<-\frac{1}{2}$ або $a>\frac{1}{2}$.

Нагадаємо (див. § 9): щоб полегшити запис відповіді *у складних або громіздких випадках, зобразимо вісь параметра* (a) *і позначимо на ній усі особливі значення параметра, які з'явилися в процесі розв'язування* (рис. 26.1.1). *Під віссю параметра (ліворуч від неї) випишемо всі одержані розв'язки (крім «коренів немає») і напроти кожної відповіді позначимо, при яких значеннях параметра цю відповідь можна використовувати. Після цього записуємо відповідь для кожного з особливих значень параметра і для кожного з одержаних проміжків осі параметра.*

1. $x=\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in \boldsymbol{Z}$.
2. $x=(-1)^n \arcsin(2a)+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

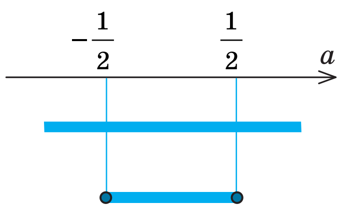


Рис. 26.1.1

Із цієї схеми добре видно, що при $a<-\frac{1}{2}$ або $a>\frac{1}{2}$ у відповідь потрібно записати тільки одну формулу, а при $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}$ — дві формули.

Відповідь: 1) якщо $a<-\frac{1}{2}$ або $a>\frac{1}{2}$, то $x=\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in \boldsymbol{Z}$;

2) якщо $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}$, то $x=\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in \boldsymbol{Z}$, $x=(-1)^n \arcsin(2a)+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

Ще один приклад використання зазначених орієнтирів наведено в інтернет-підтримці підручника.

26.2. Дослідницькі задачі з параметрами

Крім завдань із параметрами, у яких вимагається «розв'язати рівняння чи нерівність», часто пропонуються дослідницькі завдання з параметрами. Такі завдання іноді вдається розв'язати за допомогою безпосередніх обчислень: розв'язати задане рівняння чи нерівність і після цього дати відповідь на запитання задачі. Проте досить часто дослідницькі завдання не вдається розв'язати безпосередніми обчисленнями (або такі обчислення є дуже громіздкими), і тому доводиться спочатку обґрунтувати якусь властивість заданого рівняння чи нерівності, а потім, користуючись цією властивістю, уже давати відповідь на запитання задачі.

Розглянемо деякі з таких властивостей. Наприклад, беручи до уваги парність функцій, що входять до запису заданого рівняння, використовують такий **орієнтир**.

Якщо в рівнянні $f(x)=0$ функція $f(x)$ є парною або непарною, то разом із будь-яким коренем α ми можемо вказати ще один корінь цього рівняння $(-\alpha)$.

Приклад

Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння

$$a^2\cos^2 x - x^2 - a = 0 \qquad (1)$$

має єдиний корінь.

Розв'язання

▶ Функція $f(x)=a^2\cos^2 x - x^2 - a$ є парною ($D(f)=\mathbf{R}$, $f(-x)=f(x)$). Якщо $x=\alpha$ — корінь рівняння (1), то $x=-\alpha$ теж є коренем цього рівняння. Тому єдиний корінь у заданого рівняння може бути тільки тоді, коли $\alpha=-\alpha$, тобто $\alpha=0$. Отже, єдиним коренем заданого рівняння може бути тільки $x=0$.

Якщо $x=0$, то з рівняння (1) одержуємо $a^2-a=0$, тобто $a(a-1)=0$. Звідси

$$a=0 \text{ або } a=1.$$

При $a=0$ з рівняння (1) одержуємо рівняння $x^2=0$, яке має єдиний корінь $x=0$. Отже, $a=0$ задовольняє умову задачі.

При $a=1$ маємо рівняння $\cos^2 x - x^2 - 1 = 0$, тобто

$$\cos^2 x = 1 + x^2 \qquad (2)$$

Оскільки $\cos^2 x \leqslant 1$, а $1+x^2 \geqslant 1$, то рівняння (2) рівносильне системі $\begin{cases}\cos x^2 = 1,\\ 1+x^2=1.\end{cases}$

Із другого рівняння системи одержуємо $x=0$, що задовольняє й перше рівняння, тобто ця система, а отже, і рівняння (2) має єдиний розв'язок — $x=0$. Таким чином, $a=1$ також задовольняє умову задачі.

Відповідь: $a=0$, $a=1$. ◁

Коментар

Помічаємо, що в лівій частині заданого рівняння стоїть парна функція, і використовуємо орієнтир, наведений вище. Дійсно, якщо $x=\alpha$ — корінь рівняння $f(x)=0$, то $f(\alpha)=0$ — правильна числова рівність. Ураховуючи парність функції $f(x)$, маємо $f(-\alpha)=f(\alpha)=0$. Отже, $x=-\alpha$ теж є коренем рівняння $f(x)=0$. Єдиний корінь це рівняння може мати тільки тоді, коли корені α і $-\alpha$ збігаються. Тоді $x=\alpha=-\alpha=0$.

З'ясуємо, чи існують такі значення параметра a, при яких $x=0$ є коренем рівняння (1). (Це $a=0$ і $a=1$.)

Оскільки значення $a=0$ і $a=1$ ми одержали з умови, що $x=0$ — корінь рівняння (1), то необхідно перевірити, чи дійсно при цих значеннях a задане рівняння матиме єдиний корінь.

Для розв'язування рівняння (2) оцінимо його ліву і праву частини:

$f(x)=\cos^2 x$, $g(x)=1+x^2$.

$$\cos^2 x = 1+x^2 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x^2 = 1,\\ 1+x^2=1.\end{cases}$$

$$\boxed{0\leqslant f(x)\leqslant 1} \qquad \boxed{g(x)\geqslant 1}$$

Розв'язати деякі дослідницькі задачі з параметрами допомагає використання такого **орієнтира**.

Якщо в умові задачі з параметрами йдеться про те, що розв'язками заданого рівняння чи нерівності є всі значення змінної з деякої множини, то іноді корисно підставити конкретні значення змінної із заданої множини і одержати деякі обмеження на параметр.

Із прикладом використання зазначеного орієнтира ви можете ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Вправи

У завданнях 26.1–26.2 розв'яжіть рівняння.

26.1. 1) $a\sin x = 1$; 3) $a\operatorname{tg} x = \sin x$;
2) $a\sin 2x = \cos x$; 4) $\operatorname{ctg} x = a\cos x$.

26.2. 1) $\cos 2x + 2\sin x + a - 1 = 0$; 3) $\frac{\operatorname{tg} ax}{\sin bx} = 0$;
2) $\sin 3x - \sin 2x = a\sin x$; 4) $a\sin x + \operatorname{tg} x + 1 = \frac{1}{\cos x}$.

26.3. Знайдіть усі значення параметра, при яких рівняння має корені:
1) $2\sin x + 4\cos x = a$; 3) $a\cos 2x - \sin x = 0$;
2) $3\sin x - 4\cos x = b$; 4) $\cos 2x + a\cos x = 0$;
5) $\arcsin^2 x + (3a - 3)\arcsin x + (a - 2)(5 - 4a) = 0$.

26.4. При яких значеннях параметра a рівняння $\cos^2 2x + (a - 3)\cos 2x = 0$ має на відрізку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ рівно чотири корені?

26.5. Знайдіть усі пари чисел $(a; b)$, для яких коренями рівняння $a(\cos 3x - 1) + b^2 - 2b = \cos\left(3ax + (b-1)^2\right) - 2$ будуть усі дійсні числа.

26.6. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $(4a + 2)\sin x + 2a\cos x + a + 1 = 0$ має точно один корінь, який належить відрізку $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$.

26.7. При яких значеннях параметра a задані рівняння рівносильні?
1) $\sin x + \frac{1}{2} = 0$ і $\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \frac{a}{2}\right) = 0$;
2) $\cos x - \frac{1}{2} = 0$ і $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x + \frac{a-2}{2}\right) = 0$;
3) $\sin 2x + a = \sin x + 2a\cos x$ і $2\cos 2x + a^2 = 5a\cos x - 2$.

26.8. Розв'яжіть систему рівнянь:
1) $\begin{cases} \cos x\cos y = a^2, \\ \sin x\sin y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x\cos y = \sqrt{a}, \\ \sin y\cos x = 1. \end{cases}$

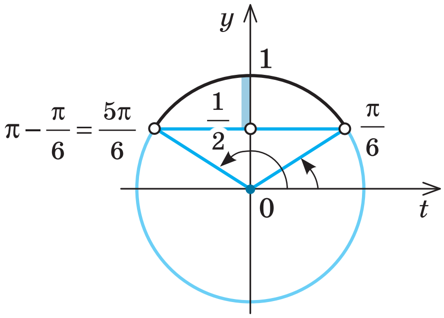
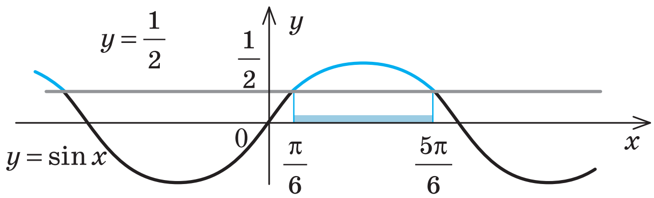
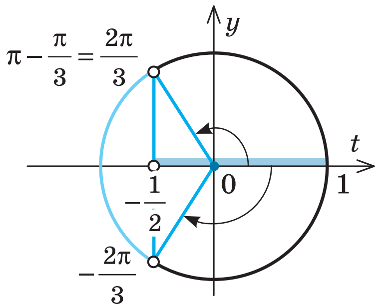
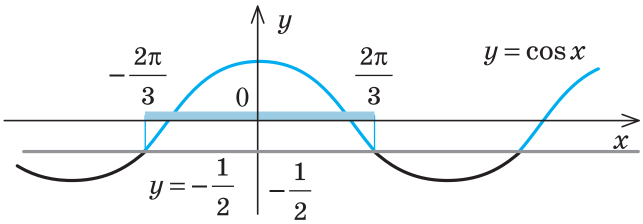
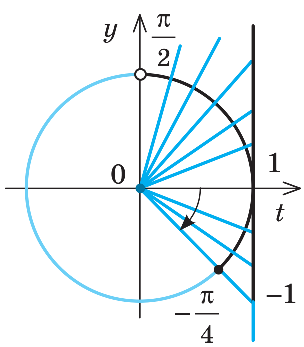
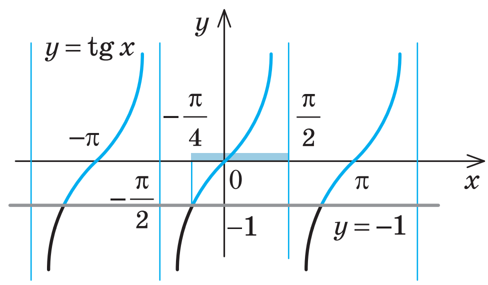
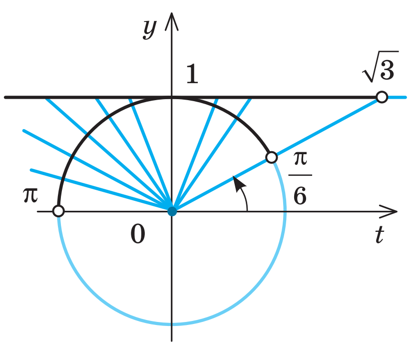
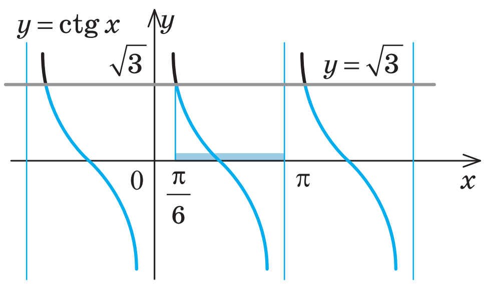
Виявіть свою компетентність

26.9. Висловіть свою думку з приводу того, представникам яких із наведених професій може стати у пригоді знання теми «Тригонометричні рівняння з параметрами»: мікробіолог, астронавт-навігатор, інженер-акустик, модельєр одягу.

§ 27 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Таблиця 40

1. Приклади розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

за допомогою одиничного кола	за допомогою графіків
	 $\sin x > \frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$
	 $\cos x > -\frac{1}{2}$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$
	 $\operatorname{tg} x \geqslant -1$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$
	 $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$; $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$

2. Способи розв'язування більш складних тригонометричних нерівностей

а) Використання рівносильних перетворень, зокрема *зведення до алгебраїчної нерівності за схемою:*

1) *до одного аргумента*; 2) *до однієї функції*; 3) *заміна змінної*

(аналогічно до схеми розв'язування тригонометричних рівнянь, наведеної в п. 24.1)

і наступне розв'язування одержаних найпростіших тригонометричних нерівностей.

б) Використання методу інтервалів (після зведення нерівності до вигляду $f(x) \gtrless 0$) за схемою:

1) *Знайти ОДЗ нерівності.*
2) *Знайти* спільний період (якщо він існує) для всіх функцій, що входять до запису нерівності, тобто *період функції* $f(x)$.
3) *Знайти нулі функції*: $f(x)=0$.
4) *Позначити нулі функції на ОДЗ усередині одного періоду та знайти знак функції* $f(x)$ *у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ* (усередині одного періоду).
5) *Записати відповідь*, ураховуючи знак заданої нерівності й період функції $f(x)$.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

Найпростішими тригонометричними нерівностями вважають нерівності виду $\sin x > a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{ctg} x > a$ (на місці знака «>» може стояти будь-який зі знаків нерівності: «<», «$\geqslant$», «$\leqslant$»).

Щоб міркування щодо знаходження розв'язків цих нерівностей були більш наочними, використовують одиничне коло або графіки відповідних функцій, як це показано в табл. 40 (відповідні пояснення наведено в інтернет-підримці підручника).

2 Способи розв'язування більш складних тригонометричних нерівностей

Приклад 1 Розв'яжіть нерівність $\frac{5}{4}\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 2x<\cos 2x$.

Розв'язання

▶ $\frac{5}{4}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}\left(1-\cos^2 2x\right)<\cos 2x$.

Тоді $2\cos^2 2x+13\cos 2x-7>0$.

Заміна $\cos 2x=t$ дає нерівність $2t^2+13t-7>0$, розв'язки якої (рис. 27.1): $t<-7$ або $t>\frac{1}{2}$.

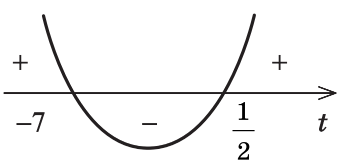


Рис. 27.1

Коментар

Використаємо рівносильні перетворення заданої нерівності. Для цього зведемо її до алгебраїчної за схемою, аналогічною до схеми розв'язування тригонометричних рівнянь:

1) до одного аргумента $(2x)$;

2) до однієї функції $(\cos 2x)$;

3) заміна змінної $(\cos 2x = t)$.

Після оберненої заміни розв'яжемо одержані найпростіші тригонометричні нерівності.

Розв'язання *(продовження)*

Обернена заміна дає: $\cos 2x < -7$ (розв'язків немає) або $\cos 2x > \frac{1}{2}$.

Тоді $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

Отже, $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Розв'язуючи більш складні тригонометричні нерівності, можна також використати *метод інтервалів*, трохи змінивши його. Необхідність корекції відомої схеми розв'язування нерівностей $f(x) \gtrless 0$ методом інтервалів (табл. 6 в § 3) пов'язана з тим, що у випадку, коли функція $f(x)$ тригонометрична, вона, як правило, має нескінченну множину коренів (які одержують при цілих значеннях параметра). Тому, якщо намагатися позначити корені на ОДЗ, доведеться позначити їх нескінченну множину, що неможливо. Уникнути цього можна, якщо знайти період функції $f(x)$ (якщо він існує) і розглянути знак функції на кожному проміжку всередині одного періоду.

Таким чином, метод інтервалів для розв'язування тригонометричних нерівностей $f(x) \gtrless 0$ може застосовуватися за схемою:

1. Знайти ОДЗ нерівності.
2. Знайти період функції $f(x)$ (якщо він існує).
3. Знайти нулі функції $(f(x) = 0)$.
4. Позначити нулі на ОДЗ усередині одного періоду та знайти знак функції в кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (усередині одного періоду).
5. Записати відповідь (ураховуючи знак заданої нерівності й період функції $f(x)$).

Приклад 2 Розв'яжіть нерівність $\cos 2x \leqslant \cos 3x - \cos 4x$.

Розв'язання

▶ Розв'яжемо дану нерівність методом інтервалів. Для цього зведемо її до вигляду $f(x) \leqslant 0$:

$$\cos 2x + \cos 4x - \cos 3x \leqslant 0.$$

1. ОДЗ: x — будь-яке дійсне число.
2. Як ми знаємо, період функції $\cos x$ дорівнює 2π. Тоді період функції $\cos 2x$ буде $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$, період функції $\cos 3x$ — $T_2 = \frac{2\pi}{3}$ і період функції $\cos 4x$ — $T_3 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

   На відрізку довжиною 2π періоди T_1, T_2, T_3 вміщуються ціле число разів. Тоді 2π буде спільним періодом для всіх цих трьох функцій, і тому 2π є періодом функції $f(x) = \cos 2x + \cos 4x - \cos 3x$.

3. Знайдемо нулі цієї функції: $\cos 2x+\cos 4x-\cos 3x=0$.
Тоді $2\cos 3x\cos x-\cos 3x=0$; $\cos 3x(2\cos x-1)=0$.
Звідси $\cos 3x=0$ або $2\cos x-1=0$. Розв'язуючи останні рівняння, одержуємо $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in \boldsymbol{Z}$, або $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

4. Позначимо всі нулі на періоді довжиною 2π, наприклад, на відрізку від 0 до 2π і одержимо 9 проміжків (рис. 27.2).

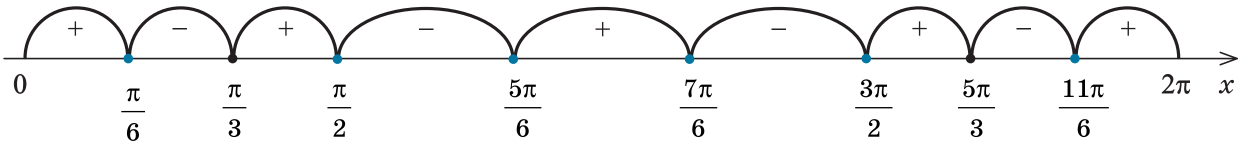


Рис. 27.2

Знаходимо знаки функції $f(x)$ на кожному з проміжків. Для цього зручно записати функцію $f(x)$ у вигляді добутку:
$$f(x)=\cos 3x(2\cos x-1).$$

Відповідь (записуємо з урахуванням періоду):
$$x\in\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right]\cup\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]\cup\left[\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]\cup$$
$$\cup\left[\frac{5\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi k\right],\ k\in \boldsymbol{Z}.\ \triangleleft$$

Зауваження. При розв'язуванні тригонометричних нерівностей методом інтервалів часто доводиться знаходити знак функції у великій кількості проміжків. Для того щоб зменшити обсяг роботи, можна запропонувати такий спосіб: стежити за тим, через який нуль ми проходимо при переході з одного інтервалу до іншого і чи змінюється знак даної функції в цьому нулі.

У випадку, коли функція $f(x)$, що стоїть у лівій частині нерівності, записана у вигляді добутку $\varphi(x)\cdot g(x)$, необхідно звертати увагу на те, що знак добутку не зміниться, якщо одночасно обидва множники (функції $\varphi(x)$ і $g(x)$) змінюють знаки на протилежні.

Практично для використання цієї властивості у випадку, якщо ліва частина нерівності записана як добуток кількох функцій, нулі кожного множника позначають на проміжку різним кольором (так, як це зроблено на рис. 27.2), або, якщо множників лише два, нулі першого множника позначають під віссю, а нулі другого — над віссю.

Якщо у функцій-множників немає однакових нулів, то знак функції $f(x)$ змінюється автоматично при переході через кожний нуль (за умови, що тільки одна з функцій-множників змінює знак при переході через цей нуль). У цьому випадку для знаходження всіх знаків функції $f(x)$ на періоді достатньо знайти її знак лише в одному проміжку, а в інших розставити знаки, чергуючи їх. Якщо ж у функцій-множників є однакові нулі, то при переході через такий нуль знак добутку може не змінюватися, і це враховують, розставляючи знаки.

Запитання

1. Поясніть на прикладах, як можна розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності за допомогою:

   1) одиничного кола; 2) графіка відповідної функції.

2. Чи завжди мають розв'язки нерівності:

   1) $\sin x < a$; 3) $\cos x < a$; 5) $\operatorname{tg} x < a$; 7) $\operatorname{ctg} x < a$;

   2) $\sin x > a$; 4) $\cos x > a$; 6) $\operatorname{tg} x > a$; 8) $\operatorname{ctg} x > a$?

   Чи можуть бути розв'язками якихось із цих нерівностей усі дійсні числа? Наведіть приклади.

3. Якими способами можна розв'язувати тригонометричні нерівності, що відрізняються від найпростіших? Наведіть приклади.

Вправи

У завданнях 27.1–27.14 розв'яжіть нерівність.

27.1. 1) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$; 2) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x < -2$; 4) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

27.2. 1) $\cos x > \frac{1}{2}$; 2) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x \leqslant 3$; 4) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

27.3. 1) $\operatorname{tg} x < -1$; 2) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{tg} x \leqslant 1$.

27.4. 1) $\operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg} x \geqslant 1$; 3) $\operatorname{ctg} x \leqslant -1$; 4) $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

27.5. 1) $\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{3} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \geqslant -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} 5x < 1$.

27.6. 1) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 1$; 3) $\sqrt{2} \sin x\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$;

2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < 3$; 4) $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$.

27.7. 1) $\sin\frac{\pi}{6}\cos 3x - \cos\frac{\pi}{6}\sin 3x > \frac{1}{2}$; 3) $\sin x + \cos x < 1$.

2) $\sin 5x \cos 5x \leqslant \frac{1}{4}$;

27.8. 1) $\left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right| < \frac{1}{2}$; 2) $|\operatorname{tg} x| > 1$.

27.9. 1) $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > \sqrt{3}$; 2) $\sin 4x - \cos 4x \operatorname{ctg} 2x < \sqrt{3}$.

27.10. 1) $\sin x > \cos^2 x$; 2) $\cos^2 x - \sin^2 x > \sin 2x$.

27.11. 1) $\cos 2x + 5\cos x + 3 \geqslant 0$; 2) $\sin x < \cos x$.

27.12. 1) $\cos 2x + \cos 6x > 1 + \cos 8x$; 2) $\sin x \sin 7x > \sin 3x \sin 5x$.

27.13. 1) $\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}$; 2) $\sin x > \sqrt{1 - \sin 2x}$.

27.14. 1) $\sin 9x - \sin 5x + 2\sin^2 x < 2\sin 2x + 1 - \cos 2x$;

2) $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$.

27.15. Знайдіть розв'язки нерівності $\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x$, які задовольняють умову $|x| < \pi$.

27.16. Знайдіть значення x на відрізку $0 \leqslant x \leqslant \pi$, які задовольняють нерівність $\sin 2x - \cos x + \sqrt{2}\sin x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

У завданнях 28.17–28.14 розв'яжіть нерівність.

27.17. 1) $\sin 4x > a(\sin 3x - \sin x)$; 2) $a(\cos x - \sin x)^2 + b\cos^2 x \geqslant 0$.

27.18. 1) $2\arccos x > \arcsin x$; 3) $2(\arcsin x)^2 - 3\arcsin x + 1 > 0$;

2) $2\arcsin x > \arccos x$; 4) $(\arccos x)^2 - 6\arccos x + 8 < 0$.

27.19. 1) $\sin(2x + 10°) + \sin(x + 10°) - \sin x < 0$;

2) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$;

3) $(\operatorname{arctg})^3 + (\operatorname{arcctg})^3 > \frac{\pi^3}{32}$;

4) $\operatorname{arctg}(3x^2 - 3x + 1) < \operatorname{arcctg}(3x^2 - 3x + 1)$.

27.20. Розв'яжіть нерівність:

1) $2\sin x > a$; 3) $a\sin^2 x + 2\cos x - a + 1 > 0$;

2) $(5a - 7)\cos x < a + 5$; 4) $\cos x + \frac{1}{\cos x} \geqslant a$.

27.21. При яких значеннях параметра a задана нерівність виконується при всіх значеннях x?

1) $\sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x \geqslant 0$; 2) $\sin^4 x + \cos^4 x > 3a\sin x\cos x$.

Додаткові завдання до теми «Тригонометричні рівняння і нерівності» наведено на сайті interactive.ranok.com.ua.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 4

1. Обчисліть $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

А $\frac{\pi}{6}$ **Б** $-\frac{\pi}{6}$ **В** $\frac{\pi}{3}$ **Г** $-\frac{\pi}{3}$

2. Яке з наведених рівнянь не має коренів?

А $\cos x = \frac{1}{3}$ **Б** $\sin x = \frac{4}{3}$ **В** $\operatorname{tg} x = 3$ **Г** $\operatorname{ctg} x = \frac{4}{3}$

3. Розв'яжіть рівняння $2\cos x = -1$.

А $x = \pm\frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ **В** $x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Б $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ **Г** $x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

4. Установіть відповідність між рівняннями (1–3), та множинами всіх їх коренів (А–Г).

1 $\dfrac{\sin x}{\cos x+1}=0$	А $\boldsymbol{R}$
2 $\sin^2 x=\sqrt{2}-\cos^2 x$	Б $\varnothing$
3 $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$	В $x=2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$
	Г $x=\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$

5. Розв'яжіть нерівність $\cos x\geqslant \dfrac{1}{2}$.

А $\left[-\dfrac{5\pi}{3}+2\pi n;\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in \boldsymbol{Z}$ В $\left[-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in \boldsymbol{Z}$

Б $\left[-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in \boldsymbol{Z}$ Г $\left[-\dfrac{11\pi}{6}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in \boldsymbol{Z}$

6. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1+\cos x}=\sin x$ (запишіть розв'язання).

7. Розв'яжіть рівняння $\cos^2 x-4\sin x+a-1=0$ залежно від значень параметра a (запишіть розв'язання).

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua.

Теми навчальних проектів

1. Аркфункції в рівняннях і нерівностях.

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

У кожному періоді історії математики були свої видатні вчені, які мали різні долі. Одні зажили слави і безсмертя ще за життя, іншим судилося пройти складні шляхи і розділити трагічну долю свого народу. Звернувшись до інтернет-підтримки, ви дізнаєтеся про життєвий шлях математиків з України, які зробили значний внесок у світову та європейську науку.

М. В. Остроградський (1801–1862)

М. П. Кравчук (1892–1942)

О. С. Дубинчук (1919–1994)

Н. О. Вірченко (нар. 1930)

М. С. В'язовська (нар. 1984)

Розділ 5

ПОХІДНА

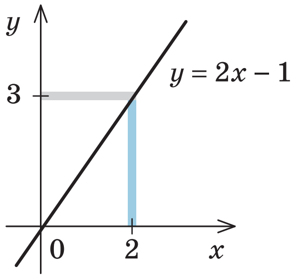
У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ознайомитеся з поняттями похідної та границі функції;
- навчитеся досліджувати функції та будувати їх графіки;
- дізнаєтеся про те, як можна розв'язувати рівняння та нерівності, застосовуючи похідну

§ 28 ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ ТА НЕПЕРЕРВНОСТІ ФУНКЦІЇ*

Таблиця 41

1. Поняття границі функції в точці



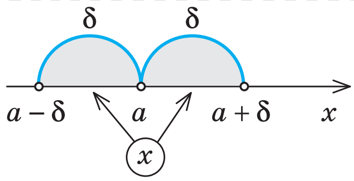
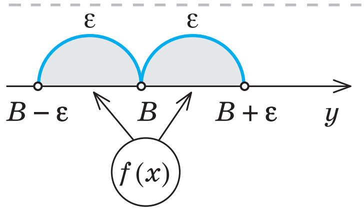
Нехай задано деяку функцію, наприклад $f(x)=2x-1$. Розглянемо графік цієї функції та таблицю її значень у точках, які на числовій прямій розташовані достатньо близько від числа 2.

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	2,8	2,98	2,998	3,002	3,02	3,2

З таблиці та графіка видно, що чим ближче аргумент x до числа 2 (це позначають $x \to 2$ і кажуть, що x *прямує* до 2), тим ближче значення функції $f(x)=2x-1$ до числа 3 (позначають $f(x)\to 3$ і кажуть, що $f(x)$ прямує до 3). Це записують також так: $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$ (читають: «ліміт $2x-1$ при x, що прямує до 2, дорівнює 3») і кажуть, що границя функції $2x-1$ при x, що прямує до 2 (або *границя функції в точці* 2), дорівнює 3.

У загальному випадку запис $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$ означає, що при $x\to a$ $f(x)\to B$, тобто B — число, до якого прямує значення функції $f(x)$, коли x прямує до a.

2. Запис позначень $x\to a$ і $f(x)\to B$ за допомогою знака модуля

Позначення і його зміст	Ілюстрація	Запис за допомогою знака модуля
$x\to a$ На числовій прямій точка x розташована від точки a на малій відстані (меншій від δ).		$\lvert x-a\rvert<\delta$** (оскільки $\lvert x-a\rvert$ на координатній осі Ox — це відстань між точками x і a)
$f(x)\to B$ Значення $f(x)$ на числовій прямій розташоване на малій відстані від B (меншій від ε).		$\lvert f(x)-B\rvert<\varepsilon$ (оскільки $\lvert f(x)-B\rvert$ на координатній осі Oy — це відстань між точками $f(x)$ і B)

3. Означення границі функції в точці

$$\lim_{x\to a} f(x)=B$$

Число B називають *границею функції* $f(x)$ *у точці* a (при x, що прямує до a), якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число δ, що при всіх $x\neq a$, які задовольняють нерівність $\lvert x-a\rvert<\delta$, виконується нерівність $\lvert f(x)-B\rvert<\varepsilon$.

* Пояснення й обґрунтування до § 28 наведені в інтернет-підтримці підручника, а доведення властивостей границі — в § 29.

** Якщо значення x задовольняє нерівність $\lvert x-a\rvert<\delta$, то кажуть, що точка x розташована в δ-околі точки a.

4. Властивості границі функції

Зміст правил граничного переходу	Запис і формулювання правил граничного переходу
Якщо $f(x)=c$, то при $x\to a$ $f(x)\to c$	$\lim\limits_{x\to a} c=c$ Границя сталої функції дорівнює цій самій сталій.
Якщо при $x\to a$ $f(x)\to A$ і $g(x)\to B$, то $f(x)\pm g(x)\to A\pm B$	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$ Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) їх границь, якщо границі доданків існують.
$f(x)g(x)\to A\cdot B$	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$ Границя добутку двох функцій дорівнює добутку їх границь, якщо границі множників існують.
$c\cdot f(x)\to c\cdot A$	$\lim\limits_{x\to a}\left(cf(x)\right)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$ Сталий множник можна виносити за знак границі.
$\frac{f(x)}{g(x)}\to\frac{A}{B}$ (де $B\neq 0$)	$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (де $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$) Границя частки двох функцій дорівнює частці їх границь, якщо границі чисельника й знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю.

5. Неперервність функції в точці

Означення. **Функцію $f(x)$ називають *неперервною в точці* a, якщо при $x\to a$ $f(x)\to f(a)$, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.**

Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній точці деякого проміжку I, то її називають *неперервною на проміжку I*.

***Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці a, то* сума, добуток і частка неперервних у точці a функцій неперервні в точці a (*частка у випадку, коли дільник* $g(a)\neq 0$).**

Графік функції, неперервної на проміжку, — нерозривна лінія на цьому проміжку.

Усі елементарні функції* неперервні в кожній точці своєї області визначення, тому на кожному проміжку з області визначення їх **графіки — нерозривні лінії.**

Якщо на інтервалі $(a;b)$ функція $f(x)$ неперервна і не перетворюється на нуль, то на цьому інтервалі вона **зберігає сталий знак.** (Ця властивість є основою методу інтервалів.)

---

* Елементарними зазвичай називають такі функції: $y=c$ $(c=\text{const})$; $y=x^n$, $n\in\boldsymbol{N}$; $y=\sqrt[n]{x}$, $n\in\boldsymbol{N}$; $y=a^x$ $(a>0)$; $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$; $y=\sin x$; $y=\cos x$; $y=\operatorname{tg} x$; $y=\operatorname{ctg} x$; $y=\arcsin x$; $y=\arccos x$; $y=\operatorname{arctg} x$; $y=\operatorname{arcctg} x$ і всі функції, які одержують із перелічених вище за допомогою скінченної кількості дій додавання, віднімання, множення, ділення та утворення складеної функції (функції від функції).

6. Метод інтервалів (розв’язування нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$)

План

1. Знайти ОДЗ нерівності.
2. Знайти нулі функції:
$$f(x)=0.$$
3. Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які вони розбивають ОДЗ.
4. Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності.

(*Якщо розв'язуємо нестрогу нерівність, то всі нулі функції слід включити до відповіді.*)

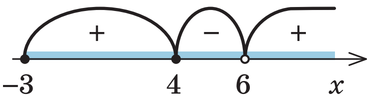
Приклад

Розв’яжіть нерівність $\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x+3}-3}>0$.

▶ Нехай $f(x)=\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x+3}-3}$. Функція $f(x)$ неперервна на кожному з проміжків своєї області визначення як частка двох неперервних функцій. Тому для розв’язування можна використати метод інтервалів.

1. ОДЗ: $\begin{cases} x+3\geqslant 0, \\ \sqrt{x+3}-3\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant -3, \\ \sqrt{x+3}\neq 3. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x\geqslant -3, \\ x\neq 6. \end{cases}$

2. Нулі функції: $f(x)=0$.
$$\frac{x^2-16}{\sqrt{x+3}-3}=0;\quad x^2-16=0;$$
$x_1=4$ (входить до ОДЗ),
$x_2=-4$ (не входить до ОДЗ).

3.


Відповідь: $[-3;4)\cup(6;+\infty)$. ◁

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Визначте, чи є функція неперервною в кожній точці даного проміжку:

1) $f(x)=x^5-3x^2+2$, $(-\infty;+\infty)$;

2) $g(x)=\dfrac{x^3-x}{2x-6}$, $[5;+\infty)$;

3) $g(x)=\dfrac{x^3-x}{2x-6}$, $(0;+\infty)$.

Розв’язання

▶ 1) Областю визначення функції $f(x)$ є множина всіх дійсних чисел. Многочлен є неперервною функцією в кожній точці своєї області визначення, тому в кожній точці проміжку $(-\infty;+\infty)$ функція $f(x)$ неперервна.

2) Область визначення функції $g(x)$: $x\neq 3$, тобто $D(g)=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$.

Дробово-раціональна функція $g(x)$ є неперервною в кожній точці її області визначення.

Коментар

Многочлен $f(x)$ і дробово-раціональна функція $g(x)$ є неперервними в кожній точці їх області визначення (зокрема, функція $g(x)$ неперервна як частка двох многочленів — неперервних функцій, за умови, що знаменник дробу не дорівнює нулю).

Тому в кожному із завдань потрібно знайти область визначення функції та порівняти її із заданим проміжком.

Проміжок $[5;+\infty)$ повністю входить до області визначення цієї функції, тому в кожній точці проміжку $[5;+\infty)$ функція $g(x)$ неперервна.

3) Проміжок $(0;+\infty)$ містить точку 3, яка не входить до області визначення функції $g(x)$. Отже, у цій точці функція $g(x)$ не може бути неперервною (оскільки не існує значення $g(3)$). Тому функція $g(x)$ не є неперервною в кожній точці проміжку $(0;+\infty)$. ◁

Якщо проміжок повністю входить до області визначення відповідної функції, то функція буде неперервною в кожній його точці. І навпаки, функція не буде неперервною в тих точках, які не входять до її області визначення.

Зазначимо, що коли в точці $x=a$ не виконується умова $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, то функцію $f(x)$ називають *розривною в точці a* (а точку *a* — *точкою розриву функції* $f(x)$).

Приклад 2

З'ясуйте, до якого числа прямує функція $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-5}$ при $x\to 0$.

Розв'язання	Коментар
▶ Дробово-раціональна функція $f(x)$ є неперервною в кожній точці її області визначення $(x\neq 5)$. Число 0 входить до області визначення цієї функції, тому при $x\to 0$ значення $f(x)\to f(0)=\dfrac{0^2-1}{0-5}=\dfrac{1}{5}$. *Відповідь*: $\dfrac{1}{5}$. ◁	Фактично в умові задачі йдеться про знаходження границі функції $f(x)$ при $x\to 0$. Дробово-раціональна функція $f(x)$ є неперервною в кожній точці її області визначення $(x\neq 5)$ як частка двох неперервних функцій — многочленів. Ураховуючи це, одержуємо, що при $x\to 0$ значення $f(x)\to f(0)$, тобто $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Приклад 3*

Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^3+2x-1)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-9}{x-5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Розв'язання	Коментар
▶ 1) Многочлен $f(x)=x^3+2x-1$ є неперервною функцією в кожній точці числової прямої, тому $\lim\limits_{x\to 3}(x^3+2x-1)=f(3)=3^3+2\cdot 3-1=32$. 2) Дробово-раціональна функція $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-5}$ є неперервною в кожній точці її області визначення $(x\neq 5)$. Число 1 входить до області визначення цієї функції, тому $\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{x^2-9}{x-5}=f(1)=\dfrac{1^2-9}{1-5}=2$. 3) При $x\neq 1$ $\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1=\varphi(x)$.	Многочлени і дробово-раціональні функції є неперервними в кожній точці їх областей визначення. Це означає, що в тому випадку, коли число *a* (до якого прямує *x*) входить до області визначення функції $f(x)$ (завдання 1 і 2), одержуємо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Якщо ж число *a* не входить до області визначення функції $f(x)$ (завдання 3), то при $x\neq a$ слід виконати тотожні перетворення виразу $f(x)$, одержати функцію, означену при $x=a$, і використати її неперервність при $x=a$ (для завдання 3 це функція $\varphi(x)=x+1$ при $x=1$).

Тоді $\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=\varphi(1)=1+1=2.$ ◁

Нагадаємо, що з позначення $x\to a$ випливає тільки те, що x прямує до a (але не обов'язково набуває значення a). Тому при $x\to 1$ значення $x+1\to 1+1=2$.

Запитання

1. Поясніть, що означають записи $x\to a$ і $f(x)\to B$.
2. Поясніть, що означає запис $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$.
3. Якщо при $x\to a$ $f(x)\to A$ і $g(x)\to B$, то до яких чисел при $x\to a$ прямуватимуть функції: $f(x)\pm g(x)$; $f(x)\cdot g(x)$; $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (якщо $B\neq 0$)?
4. Коли функцію $f(x)$ називають неперервною в точці a? Наведіть приклади.
5. Яку функцію називають неперервною на проміжку? Що можна сказати про графік такої функції на розглядуваному проміжку?
6. На якій властивості неперервної функції ґрунтується метод інтервалів, за допомогою якого розв'язують нерівності виду $f(x)\gtrless 0$? Поясніть, спираючись на графічну ілюстрацію, справедливість цієї властивості (див. інтернет-підтримку підручника).

Вправи

28.1. Чи є функція неперервною в кожній точці даного проміжку:

1) $f(x)=x^2-3x$, $(-\infty;+\infty)$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$, $(0;+\infty)$;
3) $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$, $[2;+\infty)$?

28.2. З'ясуйте, до якого числа прямує функція f, якщо:

1) $f(x)=x^2-5x+1$ при $x\to 1$;
2) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^3-7}$ при $x\to 2$;
3) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^3}$ при $x\to -1$;
4) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-x}$ при $x\to 3$.

28.3*. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x+5)$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x}{4x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$; 4) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x+4}$.

28.4. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:

1) $(x^2-9)(\sqrt{x-1}-1)\leqslant 0$;
2) $\dfrac{2-\sqrt{2x+6}}{2x-1}>0$;
3) $\dfrac{3x^2-2x-1}{\sqrt{x-3}-1}<0$;
4) $\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{x^2-16}\geqslant 0$.

28.5. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x-5}{2-\sqrt{x+2}}}$;
2) $y=\left(x-\sqrt{2x-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$;
3) $y=\sqrt{(x^4-4x^2+3)|2x-3|}$;
4) $y=\left(\dfrac{5-\sqrt{x-3}}{x-4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

§ 29 ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

29.1. Доведення основних теорем про границі

Таблиця 42

1. Означення границі функції в точці

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$	Число B називають *границею функції* $f(x)$ *у точці* a (при x, що прямує до a), якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число δ, що при всіх $x \neq a$, які задовольняють нерівність $\lvert x-a \rvert < \delta$, виконується нерівність $\lvert f(x)-B \rvert < \varepsilon$.

2. Основні теореми про границі функції

$\lim\limits_{x \to a} c = c$	Границя сталої функції дорівнює цій самій сталій.
$\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$	Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) їх границь, якщо границі доданків існують.
$\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$	Границя добутку двох функцій дорівнює добутку їх границь, якщо границі множників існують.
$\lim\limits_{x \to a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$	Сталий множник можна виносити за знак границі.
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ (де $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$)	Границя частки двох функцій дорівнює частці їх границь, якщо границі чисельника й знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю.

Теорема про єдиність границі

Якщо функція $f(x)$ у точці a має границю, то ця границя єдина.

Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$, причому в деякому околі точки a (крім, можливо, самої точки a) справедлива нерівність $f(x) \leqslant \varphi(x)$, то $A \leqslant B$.

Границя проміжної функції. Якщо $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$ і в деякому околі точки a (крім, можливо, самої точки a) справедлива нерівність $f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g(x)$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$.

3. Поняття нескінченно малої функції при $x \to a$

Функцію $f(x)$, визначену в деякому околі точки a, називають *нескінченно малою функцією* при x, що прямує до a, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

4. Властивості нескінченно малих функцій

1. *Якщо функції* $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ *нескінченно малі при* $x \to a$, *то їх сума* $\alpha(x)+\beta(x)$ *і добутки* $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ *та* $c \cdot \alpha(x)$ (*де* $c = \text{const}$) *теж є нескінченно малими функціями при* $x \to a$.

2. Якщо функція $\beta(x)$ нескінченно мала при $x \to a$ і для всіх x, які задовольняють умову $|x-a|<\delta$ (крім, можливо, $x=a$), виконується нерівність $|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)|$, то функція $\alpha(x)$ — теж нескінченно мала при $x \to a$.

5. Зв'язок означення границі функції в точці з нескінченно малими функціями

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Знаходження границі функції в точці за означенням

Проілюструємо застосування означення границі функції в точці, наведеного в табл. 42, до обґрунтування того, що границя функції $f(x)$ при x, що прямує до a, дорівнює B. У найпростіших випадках таке обґрунтування проводять за схемою:

1) *для довільного додатного числа* ε *розглядають нерівність* $|f(x)-B|<\varepsilon$;

2) *при всіх значеннях* $x \neq a$ *з деякого околу точки* a *з цієї нерівності одержують нерівність* $|x-a|<\delta$;

3) пояснюють (спираючись на рівносильність виконаних перетворень нерівності або на властивості нерівностей), *що при одержаному значенні* δ (яке записують через ε) *з нерівності* $|x-a|<\delta$ (при $x \neq a$) випливає нерівність $|f(x)-B|<\varepsilon$;

4) *використовуючи означення границі функції в точці а, роблять висновок:* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$.

Приклад 1 Використовуючи означення границі функції, перевірте, що $\lim\limits_{x \to 2}(2x+3)=7$.

Розв'язання

▶ Нехай $f(x)=2x+3$ і ε — деяке додатне число ($\varepsilon>0$). Розглянемо нерівність

$$|f(x)-7|<\varepsilon \qquad (1)$$

і знайдемо таке число $\delta>0$, щоб за умови $|x-2|<\delta$ виконувалася нерівність (1).

Оскільки

$|f(x)-7|=|(2x+3)-7|=|2x-4|=|2(x-2)|=2|x-2|$,

то нерівність $|f(x)-7|<\varepsilon$ рівносильна нерівності $2|x-2|<\varepsilon$, яка, у свою чергу, рівносильна нерівності $|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$. Тому якщо обрати $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, то за умови $|x-2|<\delta$ буде виконуватися нерівність $|(2x+3)-7|<\varepsilon$, а це й означає, що $\lim\limits_{x \to 2}(2x+3)=7$. ◁

Зауваження. Як бачимо, вибір δ залежить від заданого значення ε. Щоб підкреслити цей факт, іноді записують $\delta=\delta(\varepsilon)$.

Зазначимо, що точка a, у якій розглядають границю, може належати області визначення функції $f(x)$ (як у прикладі 1), а може і не належати їй (як у прикладі 2).

Приклад 2 Доведіть, що $\lim\limits_{x\to 3} = \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$.

Розв'язання

▶ Нехай $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ і $\varepsilon > 0$. Тоді на області визначення функції $f(x)$ (при $x \neq 3$) маємо

$$\left|f(x)-6\right| = \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right| = \left|(x+3)-6\right| = \left|x-3\right|.$$

Якщо обрати $\delta = \varepsilon$, то одержимо, що $\left|f(x)-6\right| = \left|(x+3)-6\right| = \left|x-3\right| < \varepsilon$, як тільки $\left|x-3\right| < \delta$.

Тому згідно з означенням границі $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$. ◁

Приклад 3 Доведіть, що границя сталої функції дорівнює тій самій сталій.

Розв'язання

▶ Нехай $f(x) = c$ для всіх x із деякого околу точки a. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$: $\left|f(x)-c\right| = \left|c-c\right| = 0 < \varepsilon$ для всіх x з обраного околу точки a. Тому $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} c = c$. ◁

Приклад 4 Доведіть, що $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

Розв'язання

▶ Нехай $f(x) = x$ і вибране деяке додатне число ε. Якщо взяти $\delta = \varepsilon > 0$, одержимо, що $\left|f(x)-a\right| = \left|x-a\right| < \varepsilon$, як тільки $\left|x-a\right| < \delta$. Отже, за означенням границі $\lim\limits_{x\to a} x = a$. ◁

Приклад 5 Доведіть, що $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

Розв'язання

▶ Нехай $f(x) = x^2$ і обрано деяке додатне число ε. Якщо взяти $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$, одержимо, що $\left|f(x)-0\right| = \left|x^2\right| < \varepsilon$, як тільки $\left|x-0\right| = \left|x\right| < \delta$. Тому за означенням границі $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$. ◁

2 Основні теореми про границі функції. Поняття нескінченно малої функції при $x \to a$

За допомогою означення границі функції можна довести також **теорему про границю суми двох функцій.**

✓ **Теорема. Границя суми двох функцій дорівнює сумі їх границь, якщо границі доданків існують:**

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

● Задамо $\varepsilon > 0$. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то знайдеться таке число $\delta_1 > 0$, що при $\left|x-a\right| < \delta_1$ (крім, можливо, $x = a$) виконується нерівність

$$\left|f(x)-A\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Аналогічно, якщо $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то знайдеться таке число $\delta_2 > 0$, що при $\left|x-a\right| < \delta_2$ (крім, можливо, $x = a$) виконується нерівність

$$\left|g(x)-B\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Якщо вибрати як число δ найменше з чисел δ_1 і δ_2 (це можна позначити так: $\delta=\min\{\delta_1;\delta_2\}$), то ми виберемо спільну частину обох околів точки a, і при $|x-a|<\delta$ (крім, можливо, $x=a$) будуть виконуватися обидві нерівності (1) і (2). Тоді, ураховуючи означення границі функції та обґрунтовану в п. 1.2 нерівність $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ (модуль суми не перевищує суми модулів доданків), одержуємо

$$\left|(f(x)+g(x))-(A+B)\right|=$$
$$=\left|(f(x)-A)+(g(x)-B)\right|\leqslant$$
$$\leqslant|f(x)-A|+|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

А це й означає, що

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B$, тобто

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$. ○

Для доведення властивостей границі добутку і частки функцій зручно ввести поняття *нескінченно малої функції*.

Означення. **Функція $f(x)$, визначена в деякому околі точки a, називається *нескінченно малою функцією при x, що прямує до a*, якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.**

Наприклад,

1) $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ (див. приклад 4), отже, $f(x)=x$ — нескінченно мала функція при $x\to 0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ (див. приклад 5), отже, $f(x)=x^2$ — нескінченно мала функція при $x\to 0$.

Зауваження. Якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, то це еквівалентно тому, що $f(x)=A+\alpha(x)$, де $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція при $x\to a$.

● Дійсно, якщо розглянути функцію

$$\alpha(x)=f(x)-A, \qquad (3)$$

то

$\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}(f(x)-A)=\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}A=$ $=A-A=0$. А це й означає, що функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою при $x\to a$. Але тоді з рівності (3) одержуємо, що $f(x)=A+\alpha(x)$, де $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція при $x\to a$. ○

Властивості нескінченно малих функцій

1. *Якщо функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі при $x\to a$, то їх сума $\alpha(x)+\beta(x)$ і добутки $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ і $c\cdot\alpha(x)$ (де $c=\mathrm{const}$) теж є нескінченно малими функціями при $x\to a$.*

2. *Якщо функція $\beta(x)$ нескінченно мала при $x\to a$ і для всіх x, які задовольняють умову $|x-a|<\delta$ (крім, можливо, $x=a$), виконується нерівність $|\alpha(x)|\leqslant|\beta(x)|$, то функція $\alpha(x)$ теж нескінченно мала при $x\to a$.*

Доведіть ці властивості самостійно (перевірити правильність доведення ви можете, звернувшися до інтернет-підтримки підручника).

Доведемо ***теорему про границю добутку***.

● Якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, то це еквівалентно тому, що $f(x)=A+\alpha(x)$, де $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція при $x\to a$.

Аналогічно, якщо $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$, то це еквівалентно тому, що $g(x)=B+\beta(x)$, де $\beta(x)$ — нескінченно мала функція при $x\to a$. Тоді $f(x)g(x)=(A+\alpha(x))(B+\beta(x))=$ $=A\cdot B+A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$.

Ураховуючи властивості нескінченно малих функцій, одержуємо, що функція $\varphi(x)=A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$ — нескінченно мала.

Отже, $f(x)\cdot g(x)=AB+\varphi(x)$, де $\varphi(x)$ — нескінченно мала функція, а це й означає, що $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))=A\cdot B$, тобто

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x). \ ○$$

Границя добутку двох функцій дорівнює добутку їх границь, якщо границі множників існують.

Використовуючи метод математичної індукції, правила обчислення границі суми і добутку можна узагальнити для довільної кількості доданків або множників.

За правилом обчислення границі добутку одержуємо:

$$\lim_{x\to a}(cf(x))=\lim_{x\to a}c\cdot\lim_{x\to a}f(x)=c\lim_{x\to a}f(x).$$

Отже,

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x))=c\cdot\lim_{x\to a}f(x),$$

тобто **сталий множник можна виносити за знак границі.**

Границя частки двох функцій дорівнює частці їх границь, якщо границі чисельника й знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}\quad \left(\text{де } \lim_{x\to a}g(x)\neq 0\right).$$

Із доведенням цієї теореми та інших властивостей границь функцій і практичними прийомами обчислення границь функцій можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Приклад 6 Знайдіть $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-5x+6)$.

Розв'язання

▶ Застосовуючи теореми про границі суми, різниці та добутку, одержуємо: $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-5x+6)=$

$$=\lim_{x\to 1}(3x^2)-\lim_{x\to 1}(5x)+\lim_{x\to 1}6=3\lim_{x\to 1}x^2-5\lim_{x\to 1}x+6=3\left(\lim_{x\to 1}x\right)\left(\lim_{x\to 1}x\right)-5\cdot 1+6=3\cdot 1\cdot 1-5+6=4.$$

Відповідь: 4. ◁

29.2. Односторонні границі

В означенні границі функції в точці, наведеному в п. 29.1, аргумент x набуває всіх значень із δ-околу точки a (крім, можливо, $x=a$) як ліворуч, так і праворуч від a.

Якщо при знаходженні границі розглядати значення x тільки ліворуч від точки a, то таку границю називають *лівою*, або *лівосторонньою*, і позначають $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ або $f(a-0)$. Якщо розглядати значення x тільки праворуч від точки a, то таку границю називають *правою*, або *правосторонньою*, і позначають $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ або $f(a+0)$.

Лівосторонні та правосторонні границі називають *односторонніми*. Коли розглядають односторонні границі в точці $x=0$ (при $x\to 0$), запис спрощують і записують для лівосторонньої границі $\lim\limits_{x\to -0}f(x)$ або $f(-0)$, а для правосторонньої границі — $\lim\limits_{x\to +0}f(x)$ або $f(+0)$.

Означення. Число B_+, називається правосторонньою границею функції $f(x)$ у точці a, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $\delta>0$, що для всіх x з області визначення функції, які задовольняють умову $a<x<a+\delta$, виконується нерівність

$$|f(x)-B_+|<\varepsilon. \qquad (1)$$

Аналогічно дають означення числа $B_-=f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ як ***лівосторонньої границі функції $f(x)$ у точці a***. Тут нерівність

$$|f(x)-B_-|<\varepsilon \qquad (2)$$

має виконуватися для всіх x із лівої частини δ-околу точки a, тобто при $a-\delta<x<a$.

Зазначимо зв'язок між односторонніми границями та границею функції в деякій точці a.

● Якщо число B є границею функції $f(x)$ при $x \to a$, то нерівність

$$\left|f(x)-B\right|<\varepsilon \qquad (3)$$

справедлива для всіх значень x із δ-околу точки a $(x \neq a)$. Тоді ця нерівність справедлива для всіх значень x із лівої половини вказаного δ-околу і для всіх x з її правої половини, тобто існують лівостороння і правостороння границі в точці a, і ці границі дорівнюють B. Тому якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$, тобто $B_- = B_+ = B$. Справедливе й обернене твердження: якщо виконується рівність $B_- = B_+ = B$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$.

Дійсно, якщо $B_- = B_+ = B$, то нерівність (1), яка визначає існування правосторонньої границі функції, виконується і зліва від точки a (згідно з нерівністю (2)). Але тоді нерівність (1) фактично перетворюється на нерівність (3), і тому $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$.

У зв'язку з цим можна сформулювати такий критерій.

***Критерій існування границі.* Для того щоб у точці $x=a$ існувала границя B функції $f(x)$, необхідно і достатньо, щоб у цій точці існувала лівостороння границя функції $f(x)$, тобто $B_- = f(a-0)$, і правостороння границя функції $f(x)$, тобто $B_+ = f(a+0)$, і щоб вони дорівнювали одна одній: $B_- = B_+ = B$, при цьому**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$. ○

Приклад

З'ясуйте існування границі в точці 2 для функції $f(x)=\begin{cases}2x+3 \text{ при } x\leqslant 2,\\ 4 \text{ при } x>2.\end{cases}$

Розв'язання

▶ Задана функція визначена на всій числовій прямій. Знайдемо односторонні границі цієї функції в точці $x=2$.

$f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0}(2x+3)=7$ (див. приклад 1 до п. 29.1);

$f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0} 4=4$ (див. приклад 3 до п. 29.1).

Отже, $f(2-0)\neq f(2+0)$, тому задана функція не має границі в точці $x=2$ і не є неперервною в цій точці. (Графік функції зображено на рис. 29.2.1.) ◁

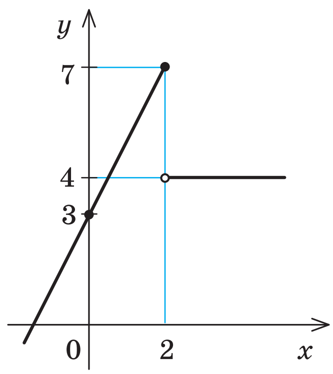


Рис. 29.2.1.

29.3. Границя відношення $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$

Цю границю зазвичай називають *першою чудовою границею*, її часто доводиться використовувати при знаходженні границь тригонометричних функцій.

Теорема. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

● *Доведення.* Можна вважати, що x набуває тільки додатних значень. Це випливає з того, що функція $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ є парною функцією, оскільки

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x).$$

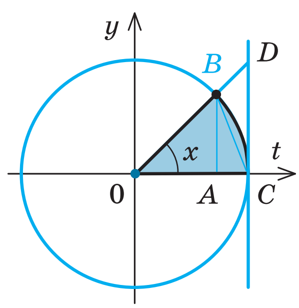


Рис. 29.3.1

Оскільки $x \to 0$, то, починаючи з деякого значення, x потрапляє в першу чверть. Тому можна вважати, що $0 < x < \frac{\pi}{2}$. На рис. 29.3.1 зображено одиничне коло, на якому відкладено кут в x радіан і проведено лінію тангенсів CD. Ураховуючи означення синуса і тангенса через одиничне коло, одержуємо $AB = \sin x$, $CD = \text{tg}\, x$. Порівняємо площі трикутників OBC, ODC і сектора OBC. Ці площі задовольняють нерівність

$$S_{\triangle OBC} \leqslant S_{\text{сект.}\, OBC} \leqslant S_{\triangle ODC}. \qquad (1)$$

Оскільки

$S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} OC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}$,

$S_{\triangle ODC} = \frac{1}{2} OC \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \text{tg}\, x = \frac{\text{tg}\, x}{2}$,

а площа кругового сектора OBC: $S_{\text{сект.}\, OBC} = \frac{x}{2}$, то, підставляючи ці значення в нерівність (1), одержуємо

$$\sin x \leqslant x \leqslant \text{tg}\, x. \qquad (2)$$

Оскільки $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x > 0$ (і $\cos x > 0$). Тому, поділивши нерівність (2) на $\sin x$, одержимо: $1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}$. Звідси $\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$ (ураховуючи парність функцій $\cos x$ та $\frac{\sin x}{x}$, одержуємо, що ця нерівність виконується і при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$).

Але $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ (функція $\cos x$ — неперервна). Тоді за теоремою про границю проміжної функції маємо $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ○

Крім границі $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, часто використовують деякі її варіації (див. інтернет-підтримку підручника та вправу 29.7).

29.4. Границя функції на нескінченності. Нескінченна границя функції. Границя послідовності

Під час вивчення функцій часто виникає потреба знайти границю функції на нескінченності, тобто таке число B (якщо воно існує), до якого прямує функція $f(x)$ при необмеженому зростанні аргумента x або коли x, збільшуючись за абсолютною величиною, залишається від'ємним.

Розглянемо функцію $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2 + 1}$. Очевидно, що зі збільшенням x знаменник дробу збільшується, і тому значення дробу стає як завгодно малим за абсолютною величиною. Отже, значення функції $f(x)$ при дуже великих значеннях аргумента x мало відрізняється від числа 2. У цьому випадку говорять, що функція $f(x)$ має своєю границею число 2 при $x \to \infty$, і пишуть: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$.

Означення. **Нехай функція $f(x)$ визначена на всій числовій прямій (або при всіх досить великих за модулем значеннях x). Число B називається границею $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $M > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $|x| > M$, виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$.**

У цьому випадку пишуть: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = B$.

Поведінка функції $f(x)$ може бути різною при $x \to -\infty$ та при $x \to +\infty$. Тому при дослідженні властивостей функції іноді розглядають окремо $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Ці границі означають аналогічно до означення $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, тільки умову $|x| > M$ замінюють відповідно на $x < -M$ і $x > M$.

Крім розглянутих скінченних границь функції $f(x)$ при $x \to a$ (або при $x \to \infty$), використовують також поняття нескінченної границі. Наприклад, функція $f(x) = \frac{1}{x^2}$, яка визначена для всіх $x \neq 0$ (рис. 29.4.1), набуває яких завгодно великих значень при $x \to 0$. Тоді говорять, що функція в точці $x = 0$ має нескінченну границю і пишуть: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

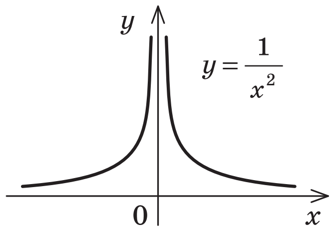


Рис. 29.4.1

Означення. **Будемо вважати, що $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, якщо для довільного числа $M > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $|x - a| < \delta$ $(x \neq a)$, виконується нерівність $|f(x)| > M$.**

Границя послідовності

Досить поширеними в курсі математики є нескінченні *послідовності*, тобто *функції $y = f(n)$, задані на множині натуральних чисел N*. Щоб підкреслити, що аргумент такої функції набуває значень тільки з множини натуральних чисел, його позначають не x, а n. Для послідовності $f(n)$ часто виникає необхідність знайти її границю при необмеженому зростанні аргумента n $(n \to +\infty)$. Означення цієї границі в основному аналогічне означенню границі функції на нескінченності.

Означення. **Число B називається *границею послідовності* $f(n)$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M > 0$, що для всіх $n > M$ виконується нерівність $|f(n) - B| < \varepsilon$.**

Для границь послідовності виконуються всі відомі вам теореми про границі (тільки в їх формулюваннях слово «функція» замінюється на слово «послідовність»).

Приклад

Знайдіть границю $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{5 + x^2 - x^3}$.

Розв'язання

▶ Винесемо за дужки в чисельнику й знаменнику найвищий степінь змінної та скоротимо чисельник і знаменник на x^3. Тоді

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{5 + x^2 - x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3\left(2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{5}{x^3} + \frac{1}{x} - 1\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3} + \frac{1}{x} - 1} = \frac{2 - 0 + 0}{0 + 0 - 1} = -2.$$

Відповідь: -2. ◁

Запитання

1. Дайте означення границі функції в точці. Сформулюйте і доведіть основні теореми про границю.
2. Дайте означення нескінченно малої функції при $x \to a$. Сформулюйте і доведіть властивості нескінченно малих функцій.
3. Сформулюйте і доведіть першу чудову границю.
4. Дайте означення правосторонньої і лівосторонньої границь функції $f(x)$ у точці a та границі функції на нескінченності.

Вправи

29.1. Користуючись означенням границі функції, доведіть справедливість рівності:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}(8-2x)=0$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=-1$.

29.2*. Користуючись означенням границі послідовності, доведіть справедливість рівності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n+7}{2n}=4$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9n-5}{3n}=3$.

29.3. Користуючись теоремами про границі, доведіть, що:

1) многочлен $P(x)$ є неперервною функцією при всіх значеннях x;
2) раціональна функція неперервна при всіх значеннях x, для яких її знаменник не дорівнює нулю.

29.4. У яких точках має розрив функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $f(x)=\frac{1}{x+3}$; 2) $g(x)=\frac{1}{x^2-4}$;
3) $\varphi(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-2}$; 4) $\psi(x)=\frac{x+2}{x^2+2x-3}$?

У завданнях 29.5, 29.6 обчисліть границю.

29.5. 1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+3)$; 7) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$; 13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+2x+1}{x-3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\sin 4x}{2x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+7x-1}{x^3+4x^2-2x+1}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cos x}{\operatorname{arctg} 4x}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^3-7x^2+5x-2}{4x^2+6x-8}$; 10) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x\arcsin 2x}{\sin 3x\cos 5x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$; 17) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^3-3x^2+4x-6}{7x^4-3x^3-5x+1}$.

6) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x+1}$; 12) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+7}}$;

29.6. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x+1}{2x^2+3x+7}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x-1}{3x+5}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+4}{x^3-2x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+x^2+4}{x^2-2x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-8x}{2x+4}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{2x-x^2}$.

29.7*. Користуючись першою чудовою границею, доведіть її варіації:

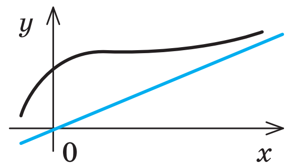
1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$.

§30 АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Таблиця 43

1. Означення й ілюстрація

Асимптота кривої **— це пряма, до якої необмежено наближається крива при її віддаленні на нескінченність.**



2. Вертикальні асимптоти ($x=a$) графіка функції $y=f(x)$

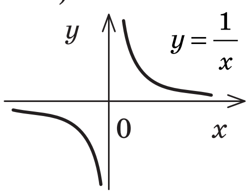
$x=a$ — вертикальна асимптота, якщо при $x\to a$ $f(x)\to\infty$

Вертикальна асимптота $x=a$ може бути в точці a, якщо точка a обмежує відкриті (або напіввідкриті) проміжки області визначення даної функції і біля точки a функція прямує до нескінченності.

Приклади вертикальних асимптот графіків функцій

$y=\frac{1}{x}$, $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

При $x\to+0$ $y\to+\infty$;
при $x\to-0$ $y\to-\infty$.
$x=0$ — **вертикальна асимптота**
($y=0$ — також *асимптота, але горизонтальна*)

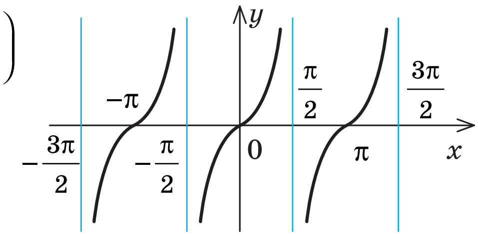


$y=\operatorname{tg}x$, $D(y)$: $x\ne\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

При $x\to\frac{\pi}{2}-0$ $y\to+\infty$; при $x\to\frac{\pi}{2}+0$ $y\to-\infty$.

$x=\frac{\pi}{2}$ — **вертикальна асимптота**

$\left(x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}\right)$



3. Похилі та горизонтальні асимптоти ($y=kx+b$)

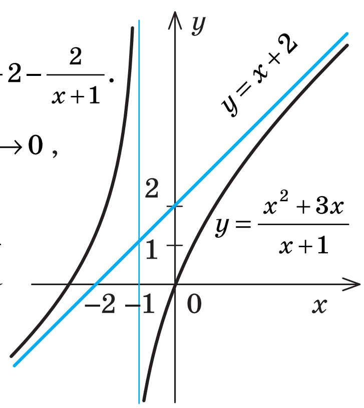
1. Якщо $f(x)$ — дробово-раціональна функція, у якої степінь чисельника на одиницю більший від степеня знаменника (або дорівнює йому), то виділяємо цілу частину дробу і використовуємо означення асимптоти.

Приклади

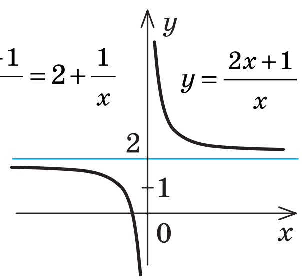
$f(x)=\frac{x^2+3x}{x+1}=x+2-\frac{2}{x+1}$.

При $x\to\infty$ $\frac{2}{x+1}\to0$,

тоді $f(x)\to x+2$.
Отже, $y=x+2$ — похила асимптота
($x=-1$ — також асимптота, але вертикальна).



$f(x)=\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}$



При $x\to\infty$ $\frac{1}{x}\to0$, тоді $f(x)\to2$.

Отже, $y=2$ — горизонтальна асимптота ($x=0$ — також асимптота, але вертикальна).

2. У загальному випадку рівняння похилих і горизонтальних асимптот $y=kx+b$ можна одержати, використовуючи формули:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

З обґрунтуванням основних формул і властивостей, наведених у табл. 43, можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Приклад Знайдіть похилу асимптоту графіка функції $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

Розв'язання

▶ Будемо шукати похилу асимптоту у вигляді $y=kx+b$, де k і b знаходять за наведеними вище формулами:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1-0}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1-0}=1.$$

Асимптотою графіка заданої функції буде пряма $y=kx+b$, тобто пряма $y=x+1$. ◁

Іноді графік функції $y=f(x)$ може мати різні асимптоти при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$. Тоді при використанні формул для знаходження коефіцієнтів k і b доводиться окремо знаходити значення k і b при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$.

Запитання

1. Поясніть зміст поняття «асимптота кривої».
2. Наведіть приклади графіків функцій, які мають вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти. Поясніть, чому відповідні прямі є асимптотами.
3*. Обґрунтуйте формули для знаходження коефіцієнтів горизонтальних і похилих асимптот $(y=kx+b)$ графіка функції $y=f(x)$.

Вправи

У завданнях 30.1–30.4 знайдіть асимптоти графіків функцій (якщо вони існують).

30.1. 1) $y=\frac{3}{x}$; 2) $y=4-\frac{1}{x-3}$; 3) $y=\frac{x^2-9}{x-3}$; 4) $y=\frac{x+1}{x-1}$.

30.2. 1) $f(x)=\frac{2x^2+1}{x}$; 2) $f(x)=\frac{x^2}{x-3}$; 3) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$; 4) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}$.

30.3. 1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; 3) $f(x)=\frac{3x^2+5}{x^2}$; 4) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

30.4. 1) $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}$; 2) $y=\sqrt{x^2+3x+2}$; 3) $y=\frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$; 4) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$.

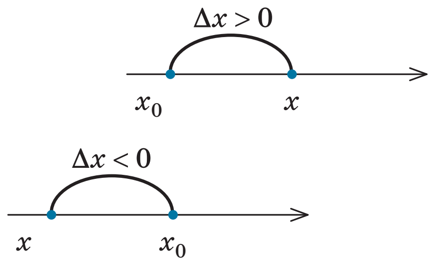
§ 31 ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ, ЇЇ ФІЗИЧНИЙ І ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ

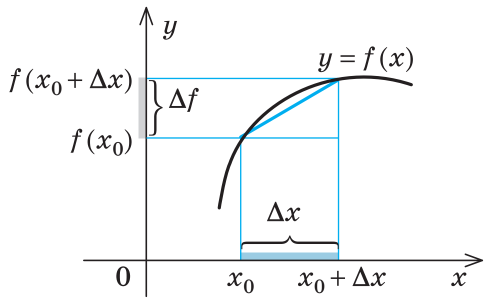
Таблиця 44

1. Поняття приросту аргумента і приросту функції в точці x_0

Нехай x — довільна точка, що лежить у деякому околі фіксованої точки x_0 з області визначення функції $f(x)$.

Приріст аргумента	Приріст функції
$\Delta x = x - x_0$	$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$





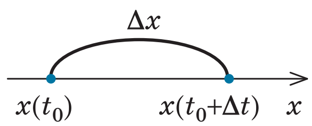
2. Запис неперервності функції через прирости аргумента і функції

Функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли малій зміні аргумента в точці x_0 відповідають малі зміни значень функції, тобто

функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 $\Leftrightarrow$ при $\Delta x \to 0$ $\Delta f \to 0$

3. Задачі, які приводять до поняття похідної

1) Миттєва швидкість руху точки вздовж прямої

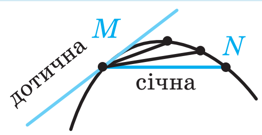


$x(t)$ — координата x точки в момент часу t.

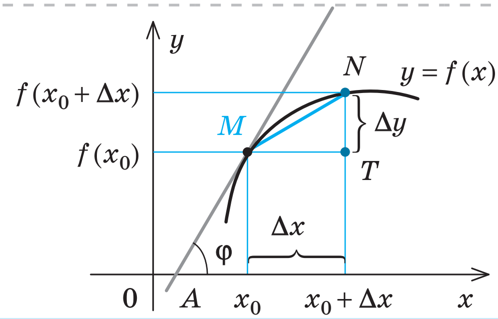
$$v_{\text{середня}} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t};$$

$$v_{\text{миттєва}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

2) Дотична до графіка функції



Дотичною до кривої в даній точці M називають граничне положення січної MN.



Якщо точка N наближається до точки M (рухаючись по графіку функції $y = f(x)$), то величина кута NMT наближається до величини кута φ нахилу дотичної MA до осі Ox.

Оскільки $\operatorname{tg} \angle NMT = \frac{NT}{MT} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

4. Означення похідної

$$y = f(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

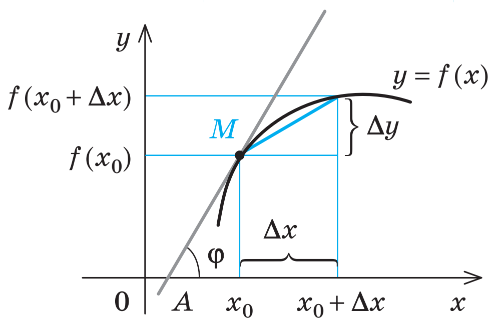
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Похідною функції $y = f(x)$ ***у точці*** x_0 **називають границю відношення приросту функції в точці** x_0 **до приросту аргумента, коли приріст аргумента прямує до нуля.**
Операцію знаходження похідної називають *диференціюванням*.

5. Похідні деяких елементарних функцій

$c' = 0$ (c — стала)	$(x)' = 1$	$(x^2)' = 2x$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

6. Геометричний зміст похідної та рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$



$f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$
k — кутовий коефіцієнт дотичної,
$k = \operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$

Значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 і кутовому коефіцієнту дотичної.
(*Кут відлічують від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки.*)

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — **рівняння дотичної** до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0

7. Фізичний зміст похідної

Похідна характеризує швидкість зміни функції при зміні аргумента.

$s = s(t)$ — залежність пройденого шляху від часу;
$v = s'(t)$ — швидкість прямолінійного руху;
$a = v'(t)$ — прискорення прямолінійного руху

Зокрема, *похідна за часом є мірою швидкості зміни відповідної функції, яку можна застосовувати до найрізноманітніших фізичних величин.*
Наприклад, **миттєва швидкість** v **нерівномірного прямолінійного руху є похідною від функції, яка виражає залежність пройденого шляху** s **від часу** t.

8. Зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції

Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.

Якщо функція $f(x)$ диференційовна на проміжку (тобто в кожній його точці), то вона неперервна на цьому проміжку.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття приросту аргумента і приросту функції

Часто нас цікавить не значення якоїсь величини, а її приріст. Наприклад, сила пружності пружини пропорційна до видовження пружини; робота — це зміна енергії тощо.

Приріст аргумента чи функції традиційно позначають великою літерою грецького алфавіту Δ (дельта). Дамо означення приросту аргумента і приросту функції.

Нехай x — довільна точка, що лежить у деякому околі фіксованої точки x_0 з області визначення функції $f(x)$.

Означення. **Різниця $x-x_0$ називається приростом незалежної змінної (або приростом аргумента) у точці x_0 і позначається Δx (читають: «дельта ікс»):**

$$\Delta x = x - x_0.$$

З цієї рівності маємо

$$x = x_0 + \Delta x, \qquad (1)$$

тобто початкове значення аргумента x_0 набуло приросту Δx. Зауважимо, що при $\Delta x > 0$ значення x більше за x_0, а при $\Delta x < 0$ — менше за x_0 (рис. 31.1).

Тоді, при переході аргумента від точки x_0 до точки x, значення функції змінилося на величину $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Ураховуючи рівність (1), одержуємо, що функція змінилася на величину

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad (2)$$

(рис. 31.2), яку називають *приростом функції f у точці* x_0 що відповідає приросту аргумента Δx (символ Δf читають: «дельта еф»).

Із рівності (2) маємо

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f.$$

При фіксованому x_0 приріст Δf є функцією від приросту Δx.

Якщо функція задана формулою $y = f(x)$, то Δf називають також *приростом залежної змінної* y і позначають через Δy.

Наприклад, якщо $y = f(x) = x^2$, то приріст Δy, що відповідає приросту Δx, дорівнює $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$.

2 Запис неперервності функції через прирости аргумента і функції

Нагадаємо, що функція $f(x)$ є неперервною в точці x_0, якщо при $x \to x_0$ $f(x) \to f(x_0)$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Але якщо $x \to x_0$, то $x - x_0 \to 0$, тобто $\Delta x \to 0$ (і навпаки, якщо $\Delta x \to 0$, то $x - x_0 \to 0$, тобто $x \to x_0$), отже, умова $x \to x_0$ еквівалентна умові $\Delta x \to 0$. Аналогічно твердження $f(x) \to f(x_0)$ еквівалентне умові $f(x) - f(x_0) \to 0$, тобто $\Delta f \to 0$. Отже, функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли при $\Delta x \to 0$ $\Delta f \to 0$, тобто *малій зміні аргумента в точці* x_0 *відповідають малі зміни значень функції*. Саме через цю властивість графіки неперервних функцій зображають неперервними (нерозривними) лініями на кожному з проміжків, що цілком входить до області визначення.

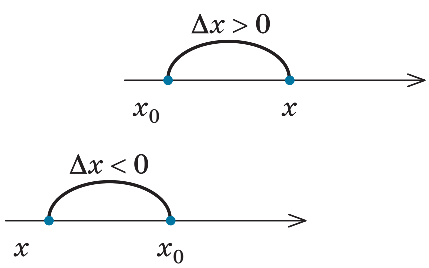


Рис. 31.1

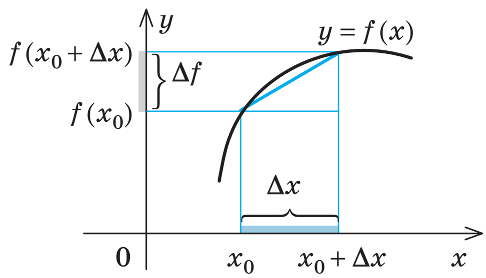


Рис. 31.2

3 Задачі, які приводять до поняття похідної

1) Миттєва швидкість руху точки вздовж прямої

Розглянемо задачу, відому з курсу фізики, — рух точки вздовж прямої. Нехай координата x точки в момент часу t дорівнює $x(t)$. Як і в курсі фізики, будемо вважати, що рух відбувається неперервно (як це ми спостерігаємо в реальному житті). Спробуємо за відомою залежністю $x(t)$ визначити швидкість, з якою рухається точка в момент часу t_0 (так звану миттєву швидкість). Розглянемо відрізок часу від t_0 до $t = t_0 + \Delta t$ (рис. 31.3). Визначимо середню швидкість на відрізку $[t_0; t_0 + \Delta t]$ як відношення пройденого шляху до тривалості руху: $v_{\text{середня}} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Для того щоб визначити миттєву швидкість точки в момент часу t_0, візьмемо відрізок часу завдовжки Δt, обчислимо середню швидкість на цьому відрізку та почнемо зменшувати відрізок Δt до нуля (тобто зменшувати відрізок $[t_0; t]$ і наближати t до t_0). Ми помітимо, що значення середньої швидкості при наближенні Δt до нуля буде наближатися до деякого числа, яке й уважають значенням швидкості в момент часу t_0. Інакше кажучи, *миттєвою швидкістю* в момент часу t_0 називають границю відношення $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, якщо $\Delta t \to 0$: $v_{\text{миттєва}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

2) Дотична до графіка функції

Наочне уявлення про дотичну до кривої можна отримати, виготовивши криву з цупкого матеріалу (наприклад, із дроту) і прикладаючи до кривої лінійку у вибраній точці (рис. 31.4). Якщо ми зобразимо криву на папері, а потім будемо вирізати фігуру, обмежену цією кривою, то ножиці теж будуть напрямлені по дотичній до кривої.

Спробуємо наочне уявлення про дотичну виразити точніше.

Нехай задано деяку криву і точку M на ній (рис. 31.5). Візьмемо на цій кривій іншу точку N і проведемо пряму через точки M і N. Таку пряму зазвичай називають *січною*. Почнемо наближати точку N до точки M. Положення січної MN буде змінюватися, але при наближенні точки N до точки M почне стабілізуватися.

Означення. **Дотичною до кривої в даній точці M називається граничне положення січної MN.**

Для того щоб записати це означення за допомогою формул, будемо вважати, що крива — це графік функції $y = f(x)$, а точка M на графіку задана координатами $(x_0; y_0) = (x_0; f(x_0))$. Дотичною є деяка пряма, яка проходить через точку M (рис. 31.6). Щоб побудувати цю пряму, достатньо знати кут φ нахилу дотичної* до осі Ox.

Нехай точка N (через яку проходить січна MN) має абсцису $x_0 + \Delta x$. Якщо точка N, рухаючись по графіку функції $y = f(x)$, наближається до точки M (це буде при $\Delta x \to 0$), то величина кута NMT

* Будемо розглядати невертикальну дотичну $(\varphi \neq 90°)$.

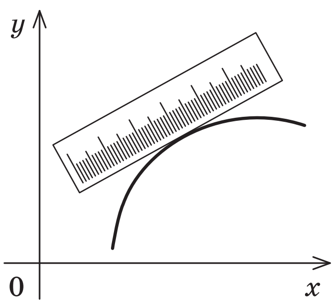


Рис. 31.4

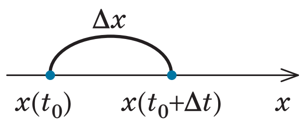


Рис. 31.3

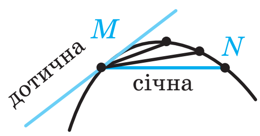


Рис. 31.5

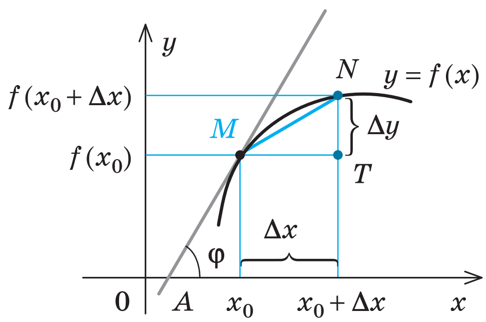


Рис. 31.6

наближається до величини кута φ нахилу дотичної MA до осі Ox. Оскільки $\operatorname{tg}\angle NMT=\frac{NT}{MT}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то при $\Delta x\to 0$ значення $\operatorname{tg}\angle NMT$ наближається до $\operatorname{tg}\varphi$, тобто $\operatorname{tg}\varphi=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Фактично ми прийшли до задачі, яку розглядали при знаходженні миттєвої швидкості: тут потрібно знайти границю відношення виразу виду $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (де $y=f(x)$ — задана функція) при $\Delta x\to 0$. Одержане у такий спосіб число називають *похідною* функції $y=f(x)$ у точці x_0.

4 Означення похідної

Означення. **Похідною функції $y=f(x)$ у точці x_0 називаєтся границя відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргумента, коли приріст аргумента прямує до нуля.**

Похідну функції $y=f(x)$ у точці x_0 позначають $f'(x_0)$ (або $y'(x_0)$) і читають: «еф штрих у точці x_0».

Коротко означення похідної функції $y=f(x)$ можна записати так:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ураховуючи означення приросту функції $y=f(x)$ у точці x_0, що відповідає приросту Δx, означення похідної можна також записати:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функцію $f(x)$, що має похідну в точці x_0, називають *диференційовною* в цій точці. Якщо функція $f(x)$ має похідну в кожній точці деякого проміжку, то кажуть, що ця функція *диференційовна на цьому проміжку*. Операцію знаходження похідної називають *диференціюванням*.

Для знаходження похідної функції $y=f(x)$ за означенням можна користуватися такою схемою:

1. *Знайти приріст функції* $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, *який відповідає приросту аргумента* Δx.

2. *Знайти відношення* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. *З'ясувати, до якої границі прямує відношення* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *при* $\Delta x\to 0$.

Це і буде похідна заданої функції.

5 Похідні деяких елементарних функцій

Обґрунтуємо, користуючись запропонованою схемою знаходження похідної функції, формули, наведені в п. 5 табл. 44.

1. Обчислимо похідну функції $y=c$ (тобто $f(x)=c$), де c — стала.

● 1) Знайдемо приріст функції, який відповідає приросту аргумента Δx:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=c-c=0.$$

2) Знайдемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0$.

3) Оскільки відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ постійне і дорівнює нулю, то і границя цього відношення при $\Delta x\to 0$ теж дорівнює нулю. Отже, $y'=0$, тобто $c'=0$. ○

2. Обчислимо похідну функції $y=x$ (тобто $f(x)=x$).

● 1) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=$
$=x_0+\Delta x-x_0=\Delta x$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$.

3) Оскільки відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ постійне і дорівнює 1, то і границя цього відношення при $\Delta x\to 0$ теж дорівнює одиниці. Отже, $y'=1$, тобто $x'=1$. ○

3. Обчислимо похідну функції $y=x^2$ (тобто $f(x)=x^2$).

● 1) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-$
$-x_0^2=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2=$
$=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$.

3) При $\Delta x\to 0$ значення $\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x\to 2x_0$. Це означає, що $y'(x_0)=2x_0$. Тоді похідна функції $y=x^2$ у довільній точці x дорівнює $y'(x)=2x$. Отже, $(x^2)'=2x$. ○

4. Обчислимо похідну функції $y=\frac{1}{x}$ (тобто $f(x)=\frac{1}{x}$).

● 1) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}=$
$=\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{(x_0+\Delta x)x_0}=\frac{-\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0}$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0\Delta x}=\frac{-1}{(x_0+\Delta x)x_0}$.

3) При $\Delta x\to 0$ значення $x_0+\Delta x\to x_0$. Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\frac{-1}{x_0x_0}=-\frac{1}{x_0^2}$.

Це означає, що $y'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$. Тоді похідна функції $y=\frac{1}{x}$ у довільній точці x з її області визначення (при $x\neq 0$) $y'(x)=-\frac{1}{x^2}$. Отже, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$. ○

5. Обчислимо похідну функції $y=\sqrt{x}$ (тобто $f(x)=\sqrt{x}$).

● 1) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}$.

Помножимо і поділимо одержаний вираз на суму $\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}$ та запишемо Δy так:

$$\Delta y=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}=$$

$$=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}.$$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$.

3) При $\Delta x\to 0$ значення $x_0+\Delta x\to x_0$. Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Це означає, що $y'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ (звичайно, при $x_0\neq 0$). Тоді похідна функції $y=\sqrt{x}$ у довільній точці x з її області визначення, крім $x=0$ (тобто при $x>0$), $y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Отже, $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. ○

6 Геометричний зміст похідної та рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$

Ураховуючи означення похідної функції $y=f(x)$, запишемо результати, одержані при розгляді дотичної до графіка функції (рис. 31.7).

Як було обґрунтовано вище, тангенс кута φ нахилу дотичної в точці M з абсцисою x_0 (рис. 31.7) обчислюють за формулою $\operatorname{tg}\varphi=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. З іншого боку, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$. Тоді $f'(x_0)=\operatorname{tg}\varphi$.

Нагадаємо, що в рівнянні прямої $y=kx+b$ кутовий коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута φ нахилу прямої до осі Ox. Якщо k — кутовий коефіцієнт дотичної, то $k=\operatorname{tg}\varphi=f'(x_0)$. Отже, **значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 і дорівнює кутовому коефіцієнту цієї дотичної** (кут відлічують від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки).

Отже, якщо $y=kx+b$ — рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці M з координатами $(x_0; f(x_0))$ і $k=f'(x_0)$, то $y=f'(x_0)x+b$. Оскільки дотична проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$, то її координати задовольняють останнє рівняння, тобто $f(x_0)=f'(x_0)x_0+b$. Звідси знаходимо $b=f(x_0)-f'(x_0)x_0$, і записуємо рівняння дотичної:

$$y=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0.$$

Його зручно записати у вигляді:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

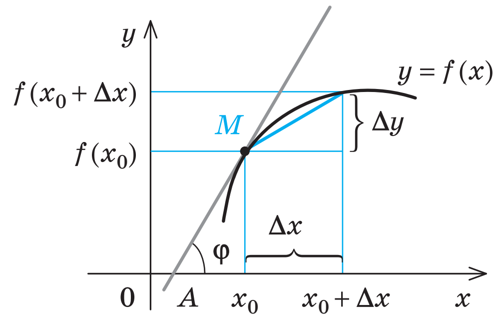


Рис. 31.7

Це рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0.

Зауваження. Кут φ, який утворює невертикальна дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 з додатним напрямком осі Ox, може бути нульовим, гострим або тупим. Ураховуючи геометричний зміст похідної, одержуємо, що *у випадку, коли* $f'(x_0) > 0$ $(\operatorname{tg}\varphi > 0)$, кут φ буде гострим, *а у випадку, коли* $f'(x_0) < 0$ $(\operatorname{tg}\varphi < 0)$, кут φ буде тупим. *Якщо* $f'(x_0) = 0$ $(\operatorname{tg}\varphi = 0)$, то $\varphi = 0$ (тобто *дотична паралельна осі* Ox). І навпаки, *якщо дотична до графіка функції* $y = f(x)$ *у точці з абсцисою* x_0 *утворює з додатним напрямком осі* Ox *гострий кут* φ, *то* $f'(x_0) > 0$, *якщо тупий кут — то* $f'(x_0) < 0$, *а якщо дотична паралельна осі* Ox *або збігається з нею* $(\varphi = 0)$, *то* $f'(x_0) = 0$.

Якщо ж дотична утворює з віссю Ox *прямий кут* $(\varphi = 90°)$, *то функція* $f(x)$ *похідної в точці* x_0 *не має* ($\operatorname{tg} 90°$ не існує).

7 Фізичний зміст похідної

Записуючи означення похідної в точці t_0 для функції $x(t)$: $x'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$ і співставляючи одержаний результат із поняттям миттєвої швидкості прямолінійного руху: $v_{\text{миттєва}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, можна зробити висновок, що *похідна характеризує швидкість зміни функції при зміні аргумента.*

Зокрема, *похідна за часом є мірою швидкості зміни відповідної функції, що може застосовуватися до найрізноманітніших фізичних величин*. Наприклад, миттєва швидкість v нерівномірного прямолінійного руху є похідною від функції, яка виражає залежність пройденого шляху s від часу t; а прискорення a — похідною від функції, яка виражає залежність швидкості v від часу t.

Якщо $s = s(t)$ — залежність пройденого шляху від часу, то

$v = s'(t)$ — *швидкість* прямолінійного руху $(v = v(t))$,

$a = v'(t)$ — *прискорення* прямолінійного руху.

8 Зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції

- Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то в цій точці існує її похідна $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, тобто при $\Delta x \to 0$ значення $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$.

Для обґрунтування неперервності функції $y = f(x)$ достатньо обґрунтувати, що при $\Delta x \to 0$ значення $\Delta y \to 0$.

Справді, при $\Delta x \to 0$ одержуємо: $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \to f'(x_0) \cdot 0 = 0$. А це й означає, що функція $y = f(x)$ — неперервна. Отже, **якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.**

Із цього твердження випливає: **якщо функція $f(x)$ диференційовна на проміжку (тобто в кожній його точці), то вона неперервна на цьому проміжку.** ○

Зазначимо, що *обернене твердження неправильне*. Функція, яка неперервна на проміжку, може не мати похідної в деяких точках цього проміжку.

Наприклад, функція $y = |x|$ (рис. 31.8) неперервна при всіх значеннях x, але не має похідної в точці $x = 0$. Дійсно, якщо $x_0 = 0$ і $y = f(x) = |x|$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \Delta x > 0, \\ -1, \text{ якщо } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Тому при $\Delta x \to 0$ відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не має границі, а отже, і функція $y = |x|$ не має похідної в точці 0.

Зауваження. Той факт, що неперервна функція $f(x)$ не має похідної в точці x_0, означає, що до графіка цієї функції в точці з абсцисою x_0 не можна провести дотичної (або відповідна дотична перпендикулярна до осі Ox). Графік у цій точці може мати злом (рис. 31.8), а може мати значно складніший вигляд*.

Наприклад, до графіка неперервної функції $y=\left|\sqrt{2x}-2\right|$ (рис. 31.9) у точці M з абсцисою $x=2$ не можна провести дотичну (а отже, ця функція не має похідної в точці 2). Дійсно, за означенням дотична — це граничне положення січної. Якщо точка N наближатиметься до точки M по лівій частині графіка, то січна MN набуде граничного положення MA. Якщо ж точка K буде наближатися до точки M по правій частині графіка, то січна MK займе граничне положення MB. Але це дві різні прямі, отже, у точці M дотичної до графіка даної функції не існує.

* У курсах математичного аналізу розглядають приклади функцій, які є неперервними, але в жодній точці не мають похідної.

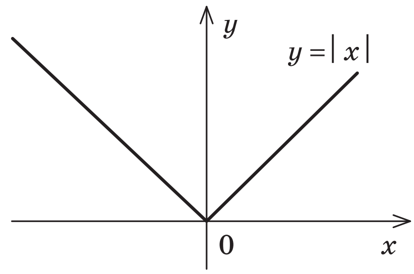


Рис. 31.8

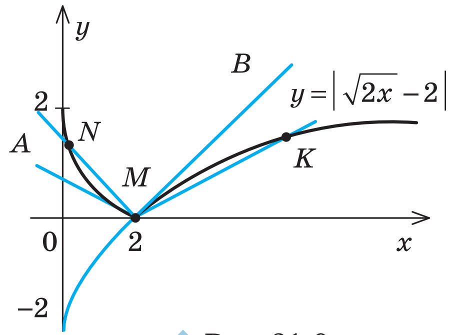


Рис. 31.9

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Знайдіть тангенс кута φ нахилу дотичної, проведеної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0, до осі Ox, якщо:

1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=1$; 2) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=25$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ За геометричним змістом похідної $\operatorname{tg}\varphi=f'(x_0)$. Ураховуючи, що $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, одержуємо: $f'(x_0)=f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1$. Отже, $\operatorname{tg}\varphi=f'(1)=-1$. ◁ 2) ▶ Оскільки $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, то $f'(x_0)=f'(25)=\frac{1}{2\sqrt{25}}=\frac{1}{10}$. За геометричним змістом похідної $\operatorname{tg}\varphi=f(x_0)$. Отже, $\operatorname{tg}\varphi=0{,}1$. ◁	За геометричним змістом похідної $f'(x_0)=\operatorname{tg}\varphi$, де φ — кут нахилу дотичної, проведеної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0, до осі Ox. Тому для знаходження $\operatorname{tg}\varphi$ достатньо знайти похідну функції $f(x)$, а потім значення похідної в точці x_0. Для знаходження похідних заданих функцій скористаємося формулами відповідних похідних, наведеними в п. 5 табл. 44 (та обґрунтованими в п. 5 цього параграфа). У подальшому під час розв'язування задач ми будемо використовувати ці формули як табличні значення.

Приклад 2

Використовуючи формулу $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=\frac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x_0=\frac{1}{2}$.

Розв'язання	Коментар
▶ Якщо $f(x)=\frac{1}{x}$, то $f(x_0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Тоді $f'(x_0)=f'\left(\frac{1}{2}\right)=-4$. Підставляючи ці значення в рівняння дотичної $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, одержуємо $y=2-4\left(x-\frac{1}{2}\right)$, тобто $y=-4x+4$ — шукане рівняння дотичної. ◁	Рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0 у загальному вигляді записують так: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Щоб записати це рівняння для заданої функції, потрібно знайти значення $f(x_0)$, похідну $f'(x)$ і значення $f'(x_0)$. Для виконання обчислень зручно позначити задану функцію через $f(x)$ та використати табличне значення похідної: $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

Запитання

1. Поясніть на прикладах і дайте означення приросту аргумента й приросту функції в точці x_0.

2. Охарактеризуйте поняття неперервності функції в точці, користуючись поняттями приросту аргумента і функції.

3. Поясніть, як можна обчислити миттєву швидкість матеріальної точки під час руху вздовж прямої.

4. Поясніть, яку пряму вважають дотичною до графіка функції.

5. Поясніть, як можна визначити тангенс кута φ нахилу дотичної до осі Ох.

6. 1) Дайте означення похідної. Як позначають похідну функції f у точці x_0?

2*) Опишіть схему знаходження похідної функції $y=f(x)$.

7. 1) Запишіть, чому дорівнює похідна функції:

а) c (де c — стала); б) x; в) x^2; г) $y=\frac{1}{x}$; д) $y=\sqrt{x}$.

2*) Обґрунтуйте формули для знаходження похідних функцій, наведених у п. 1.

8. Що таке похідна з геометричної та фізичної точок зору?

9. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0.

10. Поясніть і обґрунтуйте зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції.

Вправи

31.1°. Для функції $y = 2x$ знайдіть приріст Δy, який відповідає приросту аргумента Δx у точці x_0, якщо:
1) $x_0 = 2$ і $\Delta x = 3$; 2) $x_0 = 1{,}5$ і $\Delta x = 3{,}5$; 3) $x_0 = 0{,}5$ і $\Delta x = 2{,}5$.

31.2. Знайдіть приріст Δy, який відповідає приросту аргумента Δx у точці x_0 для функції:
1) $y = 3x$; 2) $y = x^3$; 3) $y = x^2 - x$; 4) $y = x + \frac{1}{x}$.

31.3. Закон руху матеріальної точки по прямій задано формулою $x = x(t)$, де x — координата точки в момент часу t. Знайдіть:
1) середню швидкість руху точки на відрізку $[2; 4]$;
2) миттєву швидкість руху точки при $t = 2$, якщо:
а) $x(t) = 3t + 4$; б) $x(t) = -2t + 1$; в) $x(t) = 5t - 7$; г) $x(t) = -3t - 2$.

31.4. Користуючись схемою обчислення похідної, наведеною в п. 4 цього параграфа, знайдіть похідну функції:
1) $y = 3x$; 2) $y = -5x$; 3*) $y = x^3$; 4*) $y = x^2 - 2x$.

31.5°. На рис. 31.10, *а–г* зображено графік функції $y = f(x)$ та дотичні до нього в точках з абсцисами x_1 і x_2. Користуючись геометричним змістом похідної, запишіть значення $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.

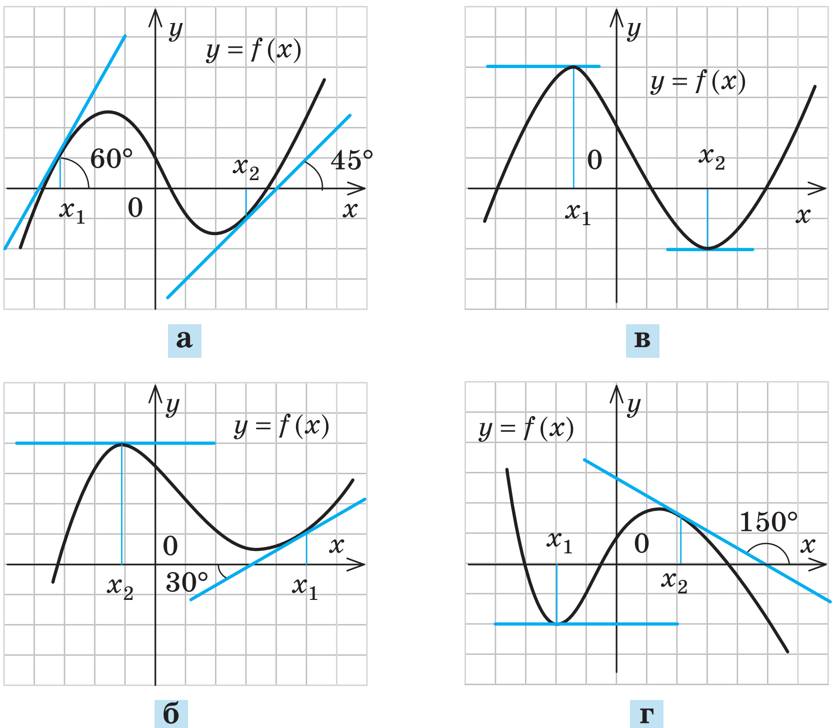


Рис. 31.10

31.6. Використовуючи формули, наведені в п. 5 табл. 44, та геометричний зміст похідної, запишіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:
1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$; 3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = x$, $x_0 = 8$; 4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = \frac{1}{4}$.

31.7. Використовуючи формулу $(x^2)' = 2x$, запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $x_0 = 1$; 2) $x_0 = 0$; 3) $x_0 = 0,5$; 4) $x_0 = -3$.

Зобразіть графік даної функції та відповідну дотичну.

31.8. Використовуючи формулу $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = \sqrt{x}$ у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $x_0 = 1$; 2) $x_0 = 0,25$; 3) $x_0 = 4$; 4) $x_0 = 9$.

31.9. Використовуючи фізичний зміст похідної, знайдіть швидкість тіла, яке рухається за законом $s = s(t)$, у момент часу t, якщо:

1) $s(t) = t$, $t = 7$;
3) $s(t) = t^3$, $t = 5$;
2) $s(t) = t^2$, $t = 6,5$;
4) $s(t) = \sqrt{t}$, $t = 4$.

31.10. На рис. 31.11 зображено графік функції $y = f(x)$ на проміжку $[-4; 7]$. Використовуючи геометричний зміст похідної, укажіть на проміжку $(-4; 7)$:

1) значення аргумента, у яких похідна $f'(x)$ дорівнює нулю;
2) значення аргумента, у яких похідна $f'(x)$ не існує. Чи існує в кожній точці зі знайденими абсцисами дотична до графіка функції $y = f(x)$?
3*) проміжки, у яких похідна $f'(x)$ додатна. Охарактеризуйте поведінку функції на кожному з цих проміжків;
4*) проміжки, у яких похідна $f'(x)$ від'ємна. Охарактеризуйте поведінку функції на кожному з цих проміжків.

Виявіть свою компетентність

31.11. Закон руху матеріальної точки задано графіком залежності шляху s від часу t (рис. 31.12).

1) Знайдіть середню швидкість точки з моменту часу $t = 2$ до $t = 3$.
2) Порівняйте швидкості точки в моменти часу $t_1 = 2$ і $t_2 = 3$.
3) Чи змінювала точка напрям руху? Якщо змінювала, то в який момент часу?

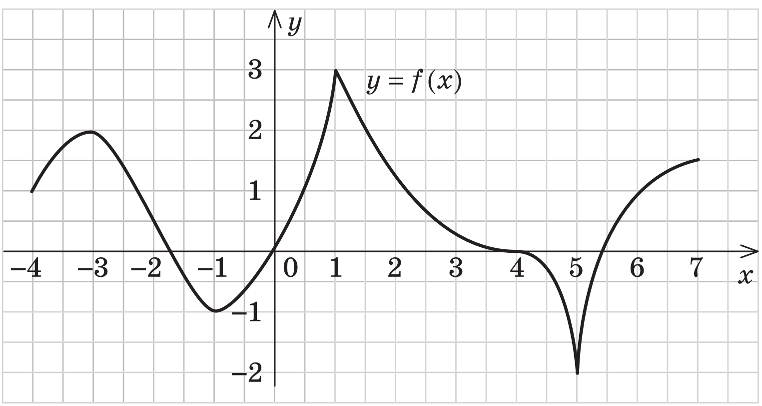


Рис. 31.11

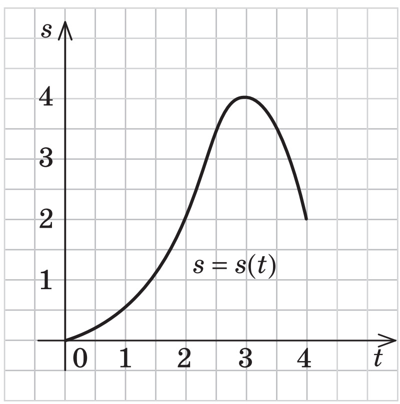


Рис. 31.12

§ 32 ПРАВИЛА ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ. ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ

Таблиця 45

1. Похідні деяких елементарних функцій

$c'=0$ (c — стала)	$(x)'=1$	$(x^n)'=nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$

2. Правила диференціювання

Правило	Приклад
$(cu)'=cu'$ *Сталий множник можна виносити за знак похідної*	$(5x^3)'=5(x^3)'=5\cdot 3x^{3-1}=15x^2$
$(u+v)'=u'+v'$ Похідна суми диференційовних функцій дорівнює сумі їх похідних	$(x+\sqrt{x})'=(x)'+(\sqrt{x})'=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(uv)'=u'v+v'u$	$((x+2)x^2)'=(x+2)'x^2+(x^2)'(x+2)=$ $=(x'+2')x^2+2x(x+2)=$ $=(1+0)x^2+2x(x+2)=3x^2+4x$
$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1'\cdot x-x'\cdot 1}{x^2}=\frac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2}=\frac{-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$

3. Похідна складеної функції (функції від функції)

Якщо $y=f(u)$ і $u=u(x)$, тобто $y=f(u(x))$, то $(f(u(x)))'=f'_u(u)\cdot u'_x(x)$. Коротко це можна записати так*: $y'_x=f'_u\cdot u'_x$	$((3x-1)^5)'=5(3x-1)^4(3x-1)'=$ $=5(3x-1)^4((3x)'-1')=$ $=5(3x-1)^4(3-0)=15(3x-1)^4$. (Якщо $u=3x-1$, то $(u^5)'_x=5u^4u'_x$.)

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Правила диференціювання

Використовуючи означення похідної, у п. 5 § 31 було знайдено похідні деяких елементарних функцій:

$$c'=0\ (c\text{ — стала}),\ (x)'=1,\ \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2},\ (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Для знаходження похідних у складніших випадках доцільно пам'ятати спеціальні правила (*правила диференціювання*), за якими знаходять похідні від суми, добутку та частки тих функцій, для яких ми вже знаємо значення похідних, та похідну від складеної функції (функції від функції).

Обґрунтуємо ці правила. Для скорочення записів використаємо такі позначення функцій та їх похідних у точці x_0: $u(x_0)=u$, $v(x_0)=v$, $u'(x_0)=u'$, $v'(x_0)=v'$.

Правило 1. *Якщо функції u і v диференційовні в точці x_0, то їх сума диференційовна в цій точці і $(u+v)'=u'+v'$.*

* У позначеннях y'_x, f'_x, u'_x нижній індекс указує, за яким аргументом беруть похідну.

Коротко говорять: **похідна суми дорівнює сумі похідних.**

● Для доведення позначимо $y(x)=u(x)+v(x)$ і використаємо план знаходження y' за означенням похідної в точці x_0 (п. 4 § 31).

1) Приріст функції в точці x_0:

$$\Delta y=y(x_0+\Delta x)-y(x_0)=u(x_0+\Delta x)+v(x_0+\Delta x)-(u(x_0)+v(x_0))=(u(x_0+\Delta x)-u(x_0))+(v(x_0+\Delta x)-v(x_0))=\Delta u+\Delta v.$$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

3) З'ясуємо, до якої границі прямує відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$. Оскільки функції u і v диференційовні в точці x_0, то при $\Delta x\to 0$ $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\to u'(x_0)=u'$, а $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\to v'(x_0)=v'$, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'$ і $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=v'$. Ураховуючи, що границя суми дорівнює сумі границь доданків, одержуємо, що при $\Delta x\to 0$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\to u'+v'$.

А це й означає, що $y'=u'+v'$, тобто

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'.$$

Отже, $(u+v)'=u'+v'$. ○

Правило 1 можна поширити на будь-яку скінченну кількість доданків* ($n\in N$):

$$(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n)'=u_1'+u_2'+u_3'+\ldots+u_n'.$$

Правило 2. *Якщо функції u і v диференційовні в точці x_0, то їх добуток диференційовний у цій точці і* $(uv)'=u'v+v'u$.

Із доведенням правила 2 можна ознайомитися, звернувшися до інтернет-підтримки підручника.

Наслідок **(правило 3).** *Якщо функція u диференційовна в точці x_0, а c — стала, то функція cu диференційовна в цій точці і* $(cu)'=cu'$.

Коротко говорять: **сталий множник можна виносити за знак похідної.**

● Для доведення використаємо правило 2 і відомий з § 31 факт, що $c'=0$:

$$(cu)'=c'u+u'c=0\cdot u+u'c=cu'.\ ○$$

Правило 4. *Якщо функції u і v диференційовні в точці x_0 і функція v не дорівнює нулю в цій точці, то їх частка $\dfrac{u}{v}$ також диференційовна в точці x_0 і* $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$.

● Цю формулу можна одержати аналогічно до похідної добутку. Але можна використати простіші міркування, якщо прийняти без доведення, що похідна заданої частки існує. Позначимо функцію $\dfrac{u}{v}$ через t. Тоді $\dfrac{u}{v}=t$, $u=vt$. Знайдемо похідну функції u за правилом диференціювання добутку: $u'=v't+t'v$.

Виразимо з цієї рівності t', а замість t підставимо його значення $\dfrac{u}{v}$. Одержимо:

$$t'=\frac{u'-v't}{v}=\frac{u'-v'\cdot\frac{u}{v}}{v}=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

Отже, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$. ○

Використовуючи правило знаходження похідної добутку і формулу $x'=1$, обґрунтуємо, що *похідну функції $y=x^n$ при натуральному $n>1$ обчислюють за формулою*

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \quad (3)$$

● При $n=2$ одержуємо: $(x^2)'=(x\cdot x)'=x'\cdot x+x'\cdot x=1\cdot x+1\cdot x=2x$. Той самий результат дає і застосування формули (3):

$$(x^2)'=2x^{2-1}=2x^1=2x.$$

* Для обґрунтування того, що ця формула правильна для будь-якого натурального n, потрібно використати метод математичної індукції (див. § 6).

При $n=3$ маємо: $(x^3)'=(x^2\cdot x)'=$ $=(x^2)'\cdot x+x'\cdot x^2=2x\cdot x+1\cdot x^2=3x^2$. Той самий результат дає і застосування формули (3):

$(x^3)'=3x^{3-1}=3x^2$.

Як бачимо, наведені міркування дозволяють, спираючись на попередній результат, обґрунтувати формулу для наступного значення n. Припустимо, що формула (3) виконується для $n=k$ $(k>1)$, тобто

$(x^k)'=kx^{k-1}$.

Покажемо, що тоді формула (3) правильна і для наступного значення $n=k+1$. Дійсно,

$(x^{k+1})'=(x^k\cdot x)'=(x^k)'\cdot x+x'\cdot x^k=$
$=kx^{k-1}\cdot x+1\cdot x^k=kx^k+x^k=(k+1)x^k$.

Отже, якщо формула (3) виконується при $n=2$, то вона справедлива і для наступного значення $n=3$. Але тоді формула (3) виконується і для наступного значення $n=4$, а отже, і для $n=5$ і т. д., для будь-якого* натурального $n>1$. ○

Можна обґрунтувати, що *формула* $(x^n)'=nx^{n-1}$ *буде правильною для будь-якого дійсного показника* n (але тільки при тих значеннях x, при яких визначена її права частина).

● Наприклад, якщо $n=1$ або $n=0$, то при $x\neq 0$ ця формула теж правильна. Дійсно, якщо $x\neq 0$, то за формулою (3):

$(x^1)'=1\cdot x^{1-1}=1\cdot x^0=1$,

$(x^0)'=0\cdot x^{0-1}=0$,

що збігається зі значеннями похідних функцій x та 1, одержаних у п. 5 § 31.

Якщо n — ціле від'ємне число, то $n=-m$, де m — натуральне число. Тоді при $x\neq 0$

$$(x^n)'=(x^{-m})'=\left(\frac{1}{x^m}\right)'=\frac{1'\cdot x^m-(x^m)'\cdot 1}{(x^m)^2}=$$
$$=\frac{0\cdot x^m-mx^{m-1}}{x^{2m}}=\frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}}=-m\cdot\frac{1}{x^{m+1}}=$$
$$=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}.$$

Отже, формула (3) виконується і для будь-якого цілого показника степеня.

Якщо $n=\frac{1}{2}$, то при $x>0$ маємо $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$. Як відомо з § 31, $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (при $x>0$). Але за формулою (3):

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

тобто формула (3) правильна і при $n=\frac{1}{2}$. ○

2 Похідна складеної функції

Складеною функцією зазвичай називають функцію від функції. Якщо змінна y є функцією від u: $y=f(u)$, а u, у свою чергу, — функцією від x: $u=u(x)$, то *y є складеною функцією від x*, тобто $y=f(u(x))$.

У такому разі кажуть, що y є складеною функцією незалежного аргумента x, а u — її *проміжним аргументом*.

Наприклад, якщо $y=f(u)=\sqrt{u}$, $u=u(x)=x-2$, то $y(x)=f(u(x))=\sqrt{x-2}$ — складена функція, визначена тільки при тих значеннях x, для яких $x-2\geqslant 0$, тобто при $x\geqslant 2$ (проміжний аргумент $u=x-2$).

Правило 5 (похідна складеної функції). *Якщо функція $u(x)$ має похідну в точці x_0, а функція $f(u)$ — похідну в точці $u_0=u(x_0)$, то складена функція $y=f(u(x))$ також має похідну в точці x_0, причому* $(f(u(x)))'=f'_u(u)u'_x(x)$.

● Оскільки за умовою функція $u(x)$ має похідну в точці x_0, то вона є неперервною в цій точці (п. 8 табл. 44), і тоді малій зміні аргумента в точці x_0 відповідають малі зміни значень функції, тобто при $\Delta x\to 0$ $\Delta u\to 0$ (п. 2 табл. 44).

З рівності $\Delta u=u(x_0+\Delta x)-u(x_0)$ маємо: $u(x_0+\Delta x)=u(x_0)+\Delta u=u_0+\Delta u$.

Тоді

$\Delta y=y(x_0+\Delta x)-y(x_0)=f(u(x_0+\Delta x))-$
$-f(u(x_0))=f(u_0+\Delta u)-f(u_0)=\Delta f$.

* У наведеному обґрунтуванні фактично неявно використано метод математичної індукції (див. § 6), який дозволяє аргументовано зробити висновок, що розглянуте твердження виконується для будь-якого натурального n (у даному випадку для $n>1$).

Подальше доведення проведемо тільки для таких функцій $u(x)$, у яких $\Delta u \neq 0$ у деякому околі точки x_0. При $\Delta u \neq 0$ подамо $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ так: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$. Ураховуючи, що при $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x_0) = u'_x$, а при $\Delta u \to 0$ $\frac{\Delta f}{\Delta u} \to f'(u_0) = f'_u$, одержуємо, що при $\Delta x \to 0$ (і відповідно при $\Delta u \to 0$) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \to f'_u \cdot u'_x$. А це й означає, що $y'_x = f'_u \cdot u'_x$, тобто $\left(f(u(x))\right)' = f'_u(u) \cdot u'_x(x)$.

Отже, похідна складеної функції $y = f(u(x))$ дорівнює добутку похідної даної функції $y = f(u)$ по проміжному аргументу u (позначено f'_u) на похідну проміжного аргумента $u = u(x)$ по незалежному аргументу x (позначено u'_x). ○

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^7 + x^3$; 2) $y = x^8(2x + x^4)$; 3) $y = \frac{x+2}{5-x}$.

Розв'язання

1) ▶ $y' = (x^7 + x^3)' = (x^7)' + (x^3)' = 7x^6 + 3x^2$. ◁

2) ▶ $y' = \left(x^8(2x + x^4)\right)' =$

$= (x^8)' \cdot (2x + x^4) + (2x + x^4)' \cdot x^8$.

Ураховуючи, що $(x^8)' = 8x^7$;

$(2x + x^4)' = (2x)' + (x^4)' = 2 \cdot x' + 4x^3 = 2 + 4x^3$,

маємо

$y' = 8x^7(2x + x^4) + (2 + 4x^3)x^8 =$

$= 16x^8 + 8x^{11} + 2x^8 + 4x^{11} = 18x^8 + 12x^{11}$. ◁

3) ▶ $y' = \left(\frac{x+2}{5-x}\right)' = \frac{(x+2)'(5-x) - (5-x)'(x+2)}{(5-x)^2}$.

Ураховуючи, що

$(x+2)' = x' + 2' = 1 + 0 = 1$, $(5-x)' = 5' - x' = 0 - 1 = -1$,

маємо

$y' = \frac{1 \cdot (5-x) - (-1) \cdot (x+2)}{(5-x)^2} = \frac{5 - x + x + 2}{(5-x)^2} = \frac{7}{(5-x)^2}$. ◁

Коментар

Нагадаємо, що алгебраїчний вираз (чи формулу, яка задає функцію) називають за результатом останньої дії, яку потрібно виконати при знаходженні значення заданого виразу. Отже, у завданні 1 спочатку потрібно знайти похідну суми: $(u+v)' = u' + v'$,

у завданні 2 — похідну добутку:

$$(uv)' = u'v + u'v,$$

а в завданні 3 — похідну частки:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

У завданнях 1 і 2 слід використати також формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, а в завданні 2 врахувати, що при обчисленні похідної від $2x$ постійний множник 2 можна винести за знак похідної.

У завданні 2 краще спочатку розкрити дужки, а потім узяти похідну суми.

Приклад 2

Обчисліть значення похідної функції $f(x) = x^2 - 5\sqrt{x}$ у точках: $x = 4$, $x = 0{,}01$.

Розв'язання

▶ $f'(x) = (x^2 - 5\sqrt{x})' = (x^2)' - 5(\sqrt{x})' =$

$= 2x - 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x - \frac{5}{2\sqrt{x}}$.

$f'(4) = 2 \cdot 4 - \frac{5}{2\sqrt{4}} = 8 - \frac{5}{4} = 6\frac{3}{4}$.

Коментар

Для знаходження значення похідної в указаних точках достатньо знайти похідну даної функції і в одержаний вираз підставити задані значення аргумента.

При обчисленні похідної слід урахувати, що задану різницю можна розглядати як алгебраїчну

$f'(0{,}01)=2\cdot 0{,}01-\dfrac{5}{2\sqrt{0{,}01}}=0{,}02-\dfrac{5}{2\cdot 0{,}1}=$
$=0{,}02-\dfrac{5}{0{,}2}=0{,}02-25=-24{,}98$.

Відповідь: $6\dfrac{3}{4}$; $-24{,}98$ ◁

суму виразів x^2 і $(-5\sqrt{x})$, а при знаходженні похідної $(-5\sqrt{x})$ за знак похідної можна винести постійний множник (–5). У результаті фактично ми отримаємо різницю похідних функцій x^2 і $5\sqrt{x}$.

Приклад 3 Знайдіть значення x, для яких похідна функції $f(x)=x^4-32x$ дорівнює нулю.

Розв'язання	Коментар
▶ $f'(x)=(x^4-32x)'=(x^4)'-32x'=4x^3-32$. $f'(x)=0$. Тоді $4x^3-32=0$, $x^3=8$, $x=2$. *Відповідь:* 2. ◁	Щоб знайти відповідні значення x, достатньо знайти похідну заданої функції, прирівняти її до нуля і розв'язати одержане рівняння.

Приклад 4 Знайдіть похідну функції f:
1) $f(x)=(x^3-1)^{-7}$; 2) $f(x)=\sqrt{5x^2+x}$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ $f'(x)=-7(x^3-1)^{-7-1}(x^3-1)'$. Ураховуючи, що $(x^3-1)'=(x^3)'-1'=3x^2-0=3x^2$, одержуємо $f'(x)=-7(x^3-1)^{-8}\cdot 3x^2=-21x^2(x^3-1)^{-8}=-\dfrac{21x^2}{(x^3-1)^8}$. ◁ 2) ▶ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{5x^2+x}}\cdot(5x^2+x)'$. Ураховуючи, що $(5x^2+x)'=5(x^2)'+x'=5\cdot 2x+1=10x+1$, одержуємо $f'(x)=\dfrac{10x+1}{2\sqrt{5x^2+x}}$. ◁	У завданнях 1 і 2 необхідно знайти відповідно похідну степеня і кореня, але в основі степеня і під знаком кореня стоїть не аргумент x, а вирази з цим аргументом (теж функції від x). Отже, потрібно знайти похідні від складених функцій. Позначаючи (на чернетці або уявно) проміжний аргумент через u (для завдання 1: $u=x^3-1$, а для завдання 2: $u=5x^2+x$), за формулою $f'_x=f'_u\cdot u'_x$ записуємо похідні заданих функцій з урахуванням формул $(u^n)'=nu^{n-1}$ і $(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$.

Запитання

1. Запишіть правила знаходження похідної суми, добутку та частки двох функцій. Проілюструйте їх застосування на прикладах.
2. Запишіть формулу знаходження похідної степеневої функції x^n. Проілюструйте її застосування на прикладах.
3. Поясніть на прикладах правило знаходження похідної складеної функції.

4*. Обґрунтуйте правила знаходження похідної суми, добутку та частки двох функцій і правила знаходження похідної від складеної функції.

5*. Обґрунтуйте формулу знаходження похідної степеневої функції для цілих значень n.

Вправи

У завданнях 32.1–32.5 знайдіть похідну функції.

32.1°. 1) $y=x^8$; 2) $y=x^{-5}$; 3) $y=x^{\frac{2}{3}}$; 4) $y=x^{20}$; 5) $y=x^{-20}$; 6) $y=x^{-\frac{1}{2}}$.

32.2. 1°) $f(x)=x+3$; 3) $f(x)=\frac{1}{x}-x^3$;
2°) $f(x)=x^5-x$; 4) $f(x)=x^2+\sqrt{x}$.

32.3. 1) $f(x)=2x^3+3x$; 3) $f(x)=x^4-2x^2-1$;
2) $f(x)=x^2+5x+2$; 4) $f(x)=2\sqrt{x}+4x^3+3$.

32.4. 1) $y=x^2(2x+x^4)$; 3) $y=(3+x^3)(2-x)$;
2) $y=(2x-1)(1-x^2)$; 4) $y=\sqrt{x}(3x^2-x)$.

32.5. 1) $y=\frac{x^2}{x+3}$; 2) $y=\frac{2x+1}{3x-2}$; 3) $y=\frac{2-x}{5x+1}$; 4) $y=\frac{1-2x}{x^2}$.

32.6. Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ у зазначених точках:
1°) $f(x)=x^2+2x$; $x=-2$, $x=\frac{1}{2}$; 3) $f(x)=\frac{x+1}{2x-3}$; $x=0$, $x=-3$;
2) $f(x)=x^4-4x$; $x=2$, $x=-1$; 4) $f(x)=x-\frac{1}{x}$; $x=-\sqrt{2}$, $x=0{,}1$.

32.7. Знайдіть значення x, для яких похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю:
1°) $f(x)=3x^2-6x$; 2°) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+5$; 3) $f(x)=12x+\frac{3}{x}$.

32.8. Розв'яжіть нерівність $f'(x)<0$, якщо:
1°) $f(x)=2x-x^2$; 2°) $f(x)=x^3+3x^2$; 3) $f(x)=2x+\frac{8}{x}$.

32.9. Задайте формулами елементарні функції $f(u)$ і $u(x)$, з яких складається складена функція $y=f(u(x))$:
1) $y=\sqrt{\sin x}$; 2) $y=(2x+x^2)^5$; 3) $y=\sqrt{x^3-x}$; 4) $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

32.10. Знайдіть область визначення функції:
1°) $y=(2x^3-4x)^5$; 3°) $y=\frac{1}{2x-8}$; 5) $y=\sqrt{\sin x}$;
2°) $y=\sqrt{2x+6}$; 4) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$; 6) $y=\sqrt{\frac{1}{x}-2}$.

32.11. Знайдіть похідну функції $f(x)$:
1) $f(x)=(x^2-x)^3$; 3) $f(x)=\sqrt{5x-x^2}$;
2) $f(x)=(2x-1)^{-5}$; 4*) $f(x)=\sqrt{2+\sqrt{3x}}+\frac{1}{(2x-1)^2}$.

32.12. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:
1) $f(x)=x^2+3x$, $x_0=2$; 3) $f(x)=\sqrt{2x-x^3}$, $x_0=1$;
2) $f(x)=x^3-x$, $x_0=-3$; 4) $f(x)=2x^3-\frac{1}{x}$, $x_0=-1$.

Виявіть свою компетентність

32.13. Наведіть приклад моделі складеної функції з реального життя.

§ 33 ПОХІДНІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Таблиця 46

$c' = 0$ (c — стала)	$(x)' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Формули $c' = 0$ (c — стала), $(x)' = 1$, $(x^n)' = nx^{n-1}$. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ було обґрунтовано в § 31 і 32.

● Для обґрунтування формули $(\sin x)' = \cos x$ використаємо те, що при малих значеннях α значення $\sin\alpha \approx \alpha$ (наприклад, $\sin 0{,}01 \approx 0{,}010$, $\sin 0{,}001 \approx \approx 0{,}001$). Тоді при $\alpha \to 0$ відношення $\frac{\sin\alpha}{\alpha} \to 1$, тобто

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1^{*}. \qquad (1)$$

Якщо $y = f(x) = \sin x$, то, використовуючи формулу перетворення різниці синусів у добуток і схему знаходження похідної за означенням (п. 4 § 31), маємо:

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$
$= \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$
$= 2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\cos\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} =$
$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$
$= \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$

3) При $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta x}{2} \to 0$. Тоді $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos(x_0)$, а враховуючи рівність (1), $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$. При $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$, тобто $f'(x_0) = \cos x_0$. Отже, похідна функції $y = \sin x$ у довільній точці x:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

● Ураховуючи, що за формулами зведення $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, і використовуючи правило знаходження похідної складеної функції, одержуємо:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' =$$
$$= \sin x \cdot (0 - 1) = -\sin x.$$

Отже, $(\cos x)' = -\sin x$. ○

● Для знаходження похідних $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ використаємо формули: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ і правило знаходження похідної частки.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos x\cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}.$$

* Справедливість цієї формули обґрунтовано в п. 29.3.

Отже, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. ○

Формулу $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ обґрунтуйте самостійно.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{\frac{x}{2}}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{\cos 3x}$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ $f'(x) = \left(\sin^2 x + \sqrt{\frac{x}{2}}\right)' =$ $= (\sin^2 x)' + \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)' =$ $= 2\sin x(\sin x)' + \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2}}}\left(\frac{x}{2}\right)' =$ $= 2\sin x\cos x + \frac{1}{2\sqrt{2x}} = \sin 2x + \frac{1}{2\sqrt{2x}}$. ◁ 2) ▶ $f'(x) = \left(\frac{x^2}{\cos 3x}\right)' =$ $= \frac{2x\cos 3x + 3x^2 \cdot \sin 3x}{\cos^2 3x}$. ◁	Послідовно визначаємо, від якого виразу слід узяти похідну (орієнтуючись на результат останньої дії). У завданні 1 спочатку беруть похідну суми: $(u+v)' = u' + v'$. Потім для кожного з доданків використовують похідну складеної функції: беруть похідну від u^2 і $\sqrt{u}$ і помножують на u'. Одержаний результат бажано спростити за формулою $2\sin x\cos x = \sin 2x$. У завданні 2 спочатку беруть похідну частки: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, а для похідної знаменника використовують похідну складеної функції (похідну $\cos u$ помножують на u').

Приклад 2

Знайдіть усі значення x, при яких значення похідної функції $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2}$: 1) дорівнює нулю; 2) додатне; 3) від'ємне.

Розв'язання	Коментар
▶ Область визначення заданої функції: $\begin{cases} x+2 \geqslant 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$ тобто $[-2; 0) \cup (0; +\infty)$. $f'(x) = \frac{(\sqrt{x+2})' \cdot x^2 - (x^2)' \cdot \sqrt{x+2}}{(x^2)^2} =$ $= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \cdot x^2 - 2x\sqrt{x+2}}{x^4} = \frac{-3x-8}{2x^3\sqrt{x+2}}$. Область визначення функції $f'(x)$: $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$, тобто похідна $f'(x)$ існує на	Похідна функції може існувати тільки в их точках, які входять до її області визначення. Тому спочатку доцільно знайти область визначення заданої функції. Похідна функції сама є функцією від x, і тому для розв'язування нерівностей $f'(x) \gtrless 0$ можна використати метод інтервалів. Після знаходження ОДЗ цієї нерівності потрібно співставити її з областю визначення функції $f(x)$ і продовжувати розв'язання нерівності на їх спільній частині.

всій області визначення функції $f(x)$, крім точки $x=-2$.

$f'(x)=0$, $\frac{-3x-8}{2x^3\sqrt{x+2}}=0$, $x=-\frac{8}{3}$ (не входить до області визначення $f'(x)$).

На області визначення $f'(x)$ розв'яжемо нерівності $f'(x)>0$ та $f'(x)<0$ методом інтервалів (рис. 33.1):

Відповідь: 1) таких значень x, при яких $f'(x)=0$, немає; 2) $f'(x)>0$ при $x\in(-2;0)$; 3) $f'(x)<0$ при $x\in(0;+\infty)$. ◁

Отже, нерівності $f'(x)\gtrless 0$ завжди розв'язуються на спільній частині областей визначення функцій $f(x)$ і $f'(x)$. Для розв'язування відповідних нерівностей достатньо на спільній області визначення функцій $f(x)$ і $f'(x)$ позначити нулі $f'(x)$ і знайти знак $f'(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ця спільна область визначення.

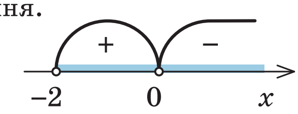


Рис. 33.1

Приклад 3 Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $y=x^2\cos(x-1)$ у точці $x_0=1$.

Розв'язання	Коментар
▶ Якщо $f(x)=x^2\cos(x-1)$, то $f(x_0)=f(1)=1$. $f'(x)=(x^2)'\cos(x-1)+(\cos(x-1))'x^2=$ $=2x\cos(x-1)-x^2\sin(x-1)$. Тоді $f'(x_0)=f'(1)=2$. Підставляючи ці значення в рівняння дотичної $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, одержуємо $y=1+2(x-1)$, тобто $y=2x-1$ — шукане рівняння дотичної. ◁	Рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0 у загальному вигляді записують так: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Щоб записати це рівняння для заданої функції, потрібно знайти $f(x_0)$, похідну $f'(x)$ і значення $f'(x_0)$. Для виконання відповідних обчислень зручно позначити задану функцію через $f(x)$, а для знаходження її похідної використати формулу похідної добутку: $(uv)'=u'v+v'u$.

Запитання

1. Запишіть та обґрунтуйте формули знаходження похідних від тригонометричних функцій.

Вправи

У завданнях 33.1–33.7 знайдіть похідну функції.

33.1°. 1) $y=\cos x+1$; 3) $y=\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x$;
2) $y=2\sin x-3x$; 4) $y=x^3-\mathrm{ctg}\,x$.

33.2. 1) $f(x)=x\,\mathrm{tg}\,x$; 3) $f(x)=\sin x\,\mathrm{tg}\,x$;
2) $f(x)=x\,\mathrm{ctg}\,x$; 4) $f(x)=\cos x\,\mathrm{ctg}\,x$.

33.3. 1) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; 3) $f(x)=\sin^2 x$;
2) $f(x)=\frac{x}{\cos x}$; 4) $f(x)=\cos^2 x$.

33.4. 1) $y=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; 3) $y=\sin 4x\cos 2x-\cos 4x\sin 2x$;
2) $y=\cos^2 3x-\sin^2 3x$; 4) $y=\sin 7x\sin 3x+\cos 7x\cos 3x$.

33.5*. 1) $y=\sqrt{1+\sin x}$; 3) $y=\sin(\cos x)$;
2) $y=\cos x^2$; 4) $y=\sqrt{\mathrm{tg}\,6x}$.

33.6. 1) $y=x^5+\sin 4x$; 3) $y=(\sin x-\cos x)^2$;
2) $y=x^3\sin x$; 4) $y=\operatorname{tg}^3 4x$.

33.7. 1) $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2}$; 3) $y=\sqrt{x}\operatorname{tg} x$;
2) $y=3\sin^2 x+\cos 2x$; 4) $y=\sqrt{x+\sin x}$.

У завданнях 33.8–33.9 обчисліть значення похідної функції f у зазначеній точці.

33.8. 1)° $f(x)=\cos 2x$, $x=\dfrac{\pi}{2}$; 3) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$, $x=\dfrac{3\pi}{2}$;
2°) $f(x)=x+\operatorname{tg} x$, $x=0$; 4) $f(x)=\operatorname{tg}^2 2x$, $x=\dfrac{3\pi}{8}$.

33.9. 1) $f(x)=x^3+\sin x$, $x=0$; 3) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$, $x=1$;
2) $f(x)=x\sqrt{2x}$, $x=2$; 4) $f(x)=(2x-x^3)^5$, $x=-1$.

У завданнях 33.10–33.11 знайдіть значення x, для яких похідна функції f дорівнює нулю.

33.10. 1)° $f(x)=2x-\cos x$; 3) $f(x)=\sin^2 2x$;
2)° $f(x)=\sin x-\dfrac{1}{2}x$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x+\sin x$.

33.11. 1)° $f(x)=x^3-6x^2-7$; 3) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$;
2)° $f(x)=x^4-4x^3+5$; 4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$.

33.12. Розв'яжіть нерівність $f'(x)>0$, якщо:
1°) $f(x)=12x-x^3+1$; 3) $f(x)=\cos 2x+3$;
2°) $f(x)=2x^3-12x^2+18x+5$; 4) $f(x)=4\sqrt{x}-x$.

33.13. Знайдіть значення x, при яких значення похідної функції $f(x)$: а) дорівнює нулю, б) додатне, в) від'ємне.
1) $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$; 3) $f(x)=x-2\sqrt{x}$;
2) $f(x)=2x^4-16x^3+2$; 4) $f(x)=\sqrt{16-x^2}$.

33.14. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:
1) $f(x)=\cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$; 3) $f(x)=x^3-2x^2+3$, $x_0=0$;
2) $f(x)=\operatorname{tg} 2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{8}$; 4) $f(x)=\sqrt{2x+2}$, $x_0=1$.

33.15. Знайдіть абсциси x_0 точок графіка функції $y=f(x)$, у яких дотична до нього утворює кут φ з додатним напрямком осі Ox:
1) $f(x)=\sin 2x$, $\varphi=0°$; 3) $f(x)=\sin^2 x$, $\varphi=135°$.
2) $f(x)=x^3-11x$, $\varphi=45°$;

33.16*. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=x^3-3x+5$, яка паралельна прямій $y=-3x+7$.

33.17*. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=x^4+x-2$, яка паралельна прямій $y=5x+1$.

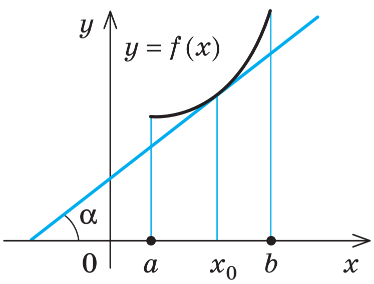
§ 34 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

34.1. Застосування похідної до знаходження проміжків зростання і спадання та екстремумів функції

Таблиця 47

1. Монотонність і сталість функції

Достатня умова зростання функції

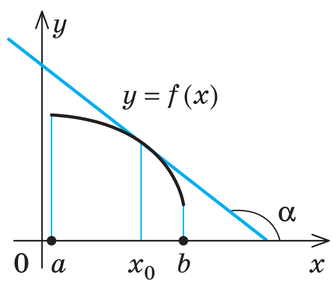


$0° < \alpha < 90°$

$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$

Якщо в кожній точці інтервалу $(a; b)$ $f'(x) > 0$, **то функція** $f(x)$ зростає на цьому інтервалі.

Достатня умова спадання функції

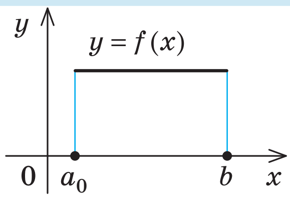


$90° < \alpha < 180°$

$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha < 0$

Якщо в кожній точці інтервалу $(a; b)$ $f'(x) < 0$, **то функція** $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

Необхідна і достатня умова сталості функції



Функція $f(x)$ є сталою на інтервалі $(a; b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ в усіх точках цього інтервалу.

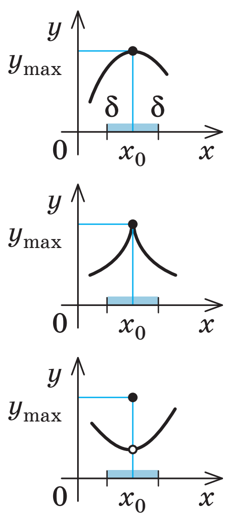
2. Екстремуми (максимуми і мінімуми) функції

Точки максимуму

Точку x_0 з області визначення функції $f(x)$ називають ***точкою максимуму*** цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність

$$f(x) < f(x_0).$$

$x_{max} = x_0$ — *точка максимуму.*

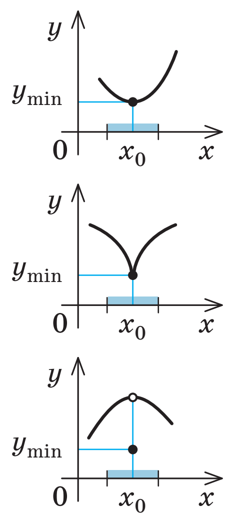


Точки мінімуму

Точку x_0 з області визначення функції $f(x)$ називають ***точкою мінімуму*** цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність

$$f(x) > f(x_0).$$

$x_{min} = x_0$ — *точка мінімуму.*



Точки максимуму і мінімуму називають *точками екстремуму*.

Значення функції в точках максимуму і мінімуму називають *екстремумами функції* (максимумом і мінімумом функції).

$y_{max} = f(x_{max}) = f(x_0)$ — максимум

$y_{min} = f(x_{min}) = f(x_0)$ — мінімум

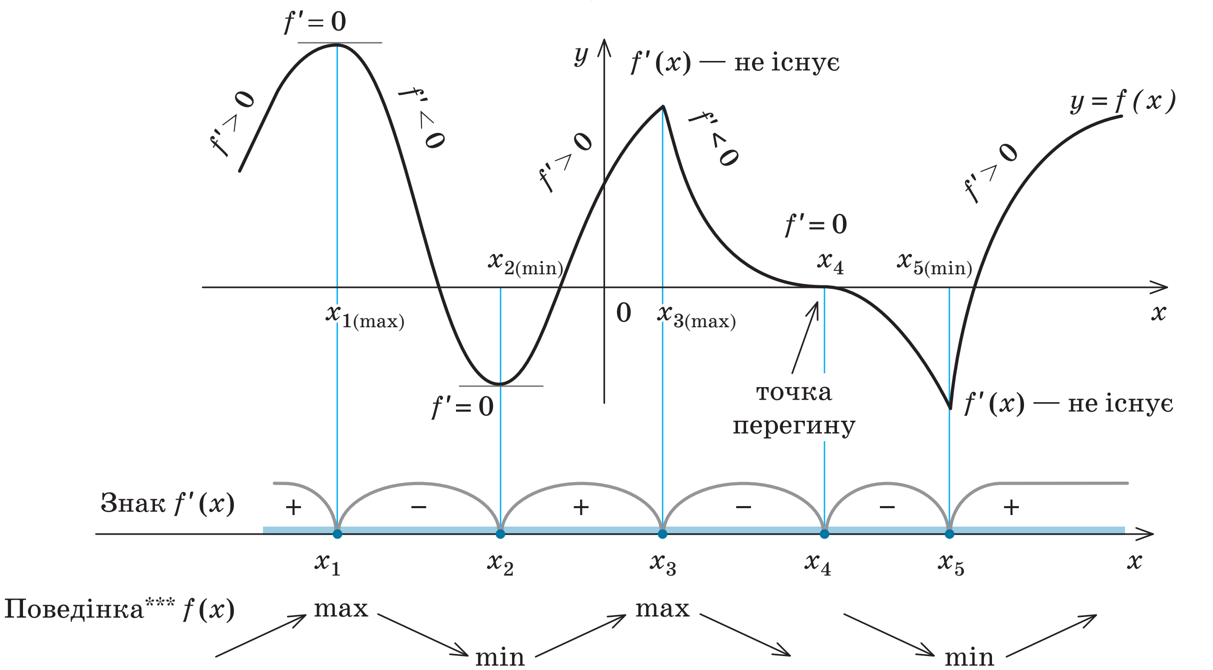
3. Критичні точки

Означення	Приклад
Критичними точками функції називають внутрішні точки її області визначення, у яких похідна функції дорівнює нулю* або не існує.	$f(x)=x^3-12x$ $\left(D(f)=\boldsymbol{R}\right)$. $f'(x)=3x^2-12$ — існує на всій області визначення. $f'(x)=0$ при $3x^2-12=0$, $x^2=4$, $x=\pm 2$ — критичні точки.

4. Необхідна і достатня умови екстремуму

Необхідна умова екстремуму	Достатня умова екстремуму
У точках екстремуму похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю або не існує. $\boxed{x_0 \text{ — точка екстремуму функції } f(x)}$ $\Downarrow$ $\boxed{f'(x_0)=0 \text{ або } f'(x_0) \text{ — не існує}}$ (але не в кожній точці x_0, де $f'(x_0)=0$ або $f'(x_0)$ не існує, буде екстремум)	Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і похідна $f'(x)$ змінює знак при переході** через точку x_0, то x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$. У точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з «+» на «–» $\Rightarrow$ x_0 — точка максимуму У точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з «–» на «+» $\Rightarrow$ x_0 — точка мінімуму

5. Приклад графіка функції $y=f(x)$, що має екстремуми (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — критичні точки)



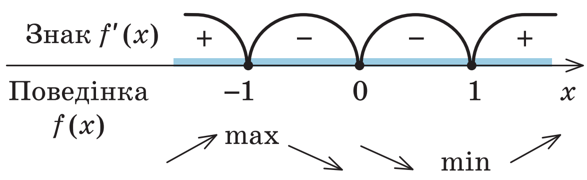
---

* Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю, називають також стаціонарними точками.

** Мається на увазі перехід через точку x_0 при русі зліва направо.

*** Знаком «↗» позначено зростання функції, а знаком «↘» — її спадання на відповідному проміжку.

6. Дослідження функції $y = f(x)$ на монотонність і екстремуми

Схема	Приклад: $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$
1. Знайти область визначення функції.	Область визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$.
2. Знайти похідну $f'(x)$.	$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x-1)(x+1)$.
3. Знайти критичні точки, тобто внутрішні точки області визначення, у яких $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує.	$f'(x)$ існує на всій області визначення. $f'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.
4. Позначити критичні точки на області визначення, знайти знак похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.	
5. Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою максимуму або мінімуму, чи не є точкою екстремуму.	
6. Записати результат дослідження (проміжки монотонності і екстремуми).	$f(x)$ зростає на кожному з проміжків: $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)$ *; $f(x)$ спадає на проміжку $[-1; 1]$. Точки екстремуму: $x_{\max} = -1$; $x_{\min} = 1$. Екстремуми: $y_{\max} = f(-1) = 3$; $y_{\min} = f(1) = -1$.

Зауваження. Результати дослідження функції на монотонність і екстремуми зручно унаочнювати не тільки у вигляді схеми, зображеної в п. 6 табл 47, а й у вигляді спеціальної таблиці:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	–	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	1	↘	-1	↗
		max				*min*	

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Монотонність і сталість функції. Критичні точки функції

Похідна є важливим інструментом дослідження функції, зокрема, на монотонність (тобто на зростання та спадання).

Нагадаємо, що функцію $f(x)$ називають зростаючою на множині P, якщо більшому значенню аргумента з цієї множини відповідає більше значення функції, тобто для будь-яких x_1 і x_2 з цієї множини з умови $x_2 > x_1$ випливає, що $f(x_2) > f(x_1)$.

Функцію $f(x)$ називають спадною на множині P, якщо більшому значенню аргумента з цієї множини відповідає менше

* Як зазначається в Прикладі 3 п. 34.1, оскільки функція $f(x)$ неперервна (наприклад, через те, що вона диференційовна на всій області визначення), то точки -1 і 1 можна включити до проміжків зростання і спадання функції.

значення функції, тобто для будь-яких x_1 і x_2 з цієї множини з умови $x_2 > x_1$ випливає, що $f(x_2) < f(x_1)$.

Як видно з рис. 34.1.1, *а*, у кожній точці графіка зростаючої функції дотична утворює з додатним напрямком осі *Ox* або гострий кут α (тоді $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$), або кут, що дорівнює нулю $\left(f'(x_1) = \operatorname{tg} 0 = 0\right)$. У кожній точці графіка спадної функції (рис. 34.1.1, *б*) дотична утворює з додатним напрямком осі *Ox* або тупий кут α $\left(f(x_0) = \operatorname{tg}\alpha < 0\right)$, або кут, що дорівнює нулю $\left(f'(x_1) = \operatorname{tg} 0 = 0\right)$.

Отже, якщо на якомусь інтервалі функція $f(x)$ диференційовна і зростає, то $f'(x) \geqslant 0$ на цьому інтервалі; якщо на якомусь інтервалі функція $f(x)$ диференційовна і спадає, то $f'(x) \leqslant 0$ на цьому інтервалі.

Але для розв'язування задач на дослідження властивостей функцій важливими є обернені твердження, які дозволяють за знаком похідної з'ясувати характер монотонності функції.

Для обґрунтування відповідних тверджень скористаємося так званою формулою Лагранжа. Її строге доведення наводиться в курсах математичного аналізу, а ми обмежимося тільки її геометричною ілюстрацією та формулюванням.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в усіх точках інтервалу $(a; b)$. Тоді на цьому інтервалі знайдеться така точка *c*, що дотична *l* до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою *c* буде паралельна січній *AB*, яка проходить через точки $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ (рис. 34.1.2).

Дійсно, розглянемо всі можливі прямі, що паралельні січній *AB* і мають з графіком функції $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$ хоча б одну спільну точку. Пряма, яка лежить на найбільшій відстані від січної *AB*, і буде дотичною до графіка функції $f(x)$ (це граничне положення січної, паралельної *AB*). Якщо позначити абсцису точки дотику через *c*, то, ураховуючи геометричний зміст похідної, одержуємо $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha$, де

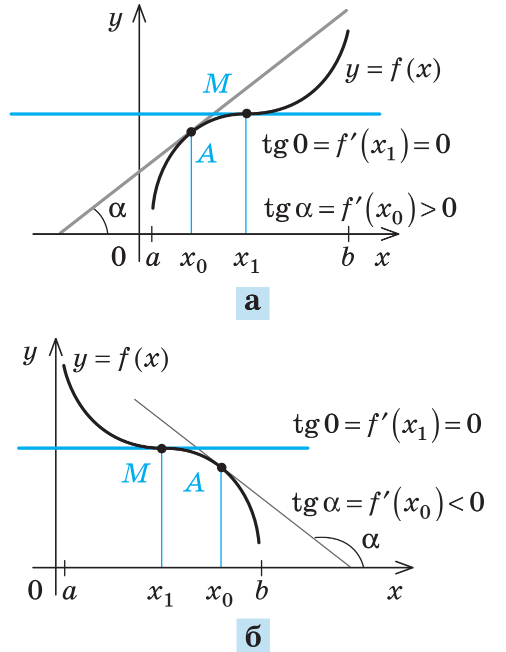


Рис. 34.1.1

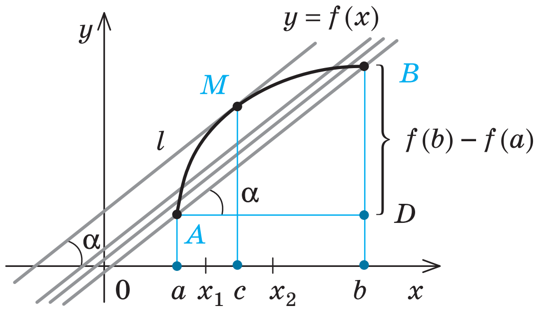


Рис. 34.1.2

α — кут між прямою *l* і додатним напрямком осі *Ox*. Але $l \parallel AB$, тому кут α дорівнює куту нахилу січної *AB* до осі *Ox*. Цей кут, у свою чергу, дорівнює куту *A* прямокутного трикутника *ABD* з катетами: $AD = b - a$, $BD = f(b) - f(a)$.

Тоді $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Отже, можна зробити такий висновок.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в усіх точках інтервалу $(a; b)$, то на інтервалі $(a; b)$ знайдеться така точка $c \in (a; b)$, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Цю формулу називають *формулою Лагранжа*. Застосуємо її для обґрунтування *достатніх умов зростання і спадання функції*.

1. Якщо $f'(x)>0$ у кожній точці інтервалу $(a;b)$, то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі.

2. Якщо $f'(x)<0$ у кожній точці інтервалу $(a;b)$, то функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

● Візьмемо дві довільні точки x_1 і x_2 із заданого інтервалу. За формулою Лагранжа існує число $c\in(x_1;x_2)$, таке, що

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c). \qquad (1)$$

Число c належить заданому інтервалу, оскільки йому належать числа x_1 і x_2. Нехай $x_2>x_1$. Тоді $x_2-x_1>0$.

Якщо $f'(x)>0$ в кожній точці заданого інтервалу, то $f'(c)>0$, і з рівності (1) одержуємо, що $f(x_2)-f(x_1)>0$, тобто $f(x_2)>f(x_1)$. Це означає, що функція $f(x)$ зростає на заданому інтервалі.

Якщо $f'(x)<0$ у кожній точці заданого інтервалу, то $f'(c)<0$, і з рівності (1) маємо, що $f(x_2)-f(x_1)<0$, тобто $f(x_2)<f(x_1)$. А це означає, що функція $f(x)$ спадає на заданому інтервалі. ○

Приклад 1

Функція $f(x)=x^3+x$ означена на всій множині дійсних чисел $(x\in \boldsymbol{R})$ і має похідну $f'(x)=3x^2+1>0$ при всіх значеннях x. Отже, ця функція зростає на всій області визначення.

Приклад 2

Функція $g(x)=\sin x-3x$ означена на всій множині дійсних чисел $(x\in \boldsymbol{R})$ і має похідну $g'(x)=\cos x-3$. Оскільки $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$, то $\cos x-3<0$ при всіх значеннях x. Отже, ця функція спадає на всій області визначення.

Наприклад, розглядаючи степеневу функцію в п. 12.2, ми без доведення зазначили, що при $x>0$ функція $y=x^{\alpha}$, де α — неціле число, зростає при $\alpha>0$ і спадає при $\alpha<0$. Обґрунтуємо це. Дійсно, $y'=(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$. Тоді при $x>0$ і $\alpha>0$ значення $y'>0$, отже, функція $y=x^{\alpha}$ зростає. При $x>0$ і $\alpha<0$ значення $y'<0$, тобто функція $y=x^{\alpha}$ спадає.

Достатні ознаки зростання і спадання функції мають наочну фізичну ілюстрацію. Нехай по осі ординат рухається матеріальна точка, яка в момент часу t має ординату $y=f(t)$. Ураховуючи фізичний зміст похідної, одержуємо, що швидкість цієї точки в момент часу t дорівнює $f'(t)$. Якщо $f'(t)>0$, то точка рухається в додатному напрямку осі ординат, зі збільшенням часу ордината точки збільшується, тобто функція зростає. Якщо ж $f'(t)<0$, то точка рухається у від'ємному напрямку осі ординат, і зі збільшенням часу ордината точки зменшується: функція спадає.

У тому випадку, коли $f'(t)=0$, швидкість точки дорівнює нулю, тобто точка не рухається, і тому її ордината залишається сталою. Одержуємо *умову сталості функції*.

Функція $f(x)$ є сталою на інтервалі $(a;b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x)=0$ в усіх точках цього інтервалу.

● Дійсно, якщо $f(x)=k$ (де k — стала), то $f'(x)=0$.

Навпаки, якщо $f'(x)=0$ в усіх точках інтервалу $(a;b)$, то зафіксуємо деяке число x_0 з цього інтервалу і знайдемо значення функції в точці x_0 (нехай $f(x_0)=k$). Для будь-якого числа x із заданого інтервалу за формулою Лагранжа можна знайти число c, яке міститься між x і x_0, таке, що

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c).$$

Тоді $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$.

Оскільки $c\in(a;b)$, то за умовою $f'(c)=0$. Отже, $f(x)-f(x_0)=0$. Таким чином, для всіх x із заданого інтервалу

$f(x)=f(x_0)=k$, тобто функція $f(x)$ є сталою.

У випадку, якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $f'(x)=0$ в усіх точках інтервалу $(a;b)$, то при наближенні значення x до точки a справа значення $f(x)\to f(a)$. Але $f(x)=k$, тоді і $f(a)=k$ (аналогічно, наближаючи значення x до точки b зліва, обґрунтовують, що $f(b)=k$). Отже, функція $f(x)$ є постійною на відрізку $[a;b]$. ○

Для знаходження проміжків зростання і спадання функції потрібно розв'язати нерівності $f'(x)>0$ і $f'(x)<0$ на області визначення функції $f(x)$. Оскільки $f'(x)$ є функцією від змінної x, то для розв'язування цих нерівностей можна використати метод інтервалів, точніше, його узагальнення, що спирається на твердження, яке в курсах математичного аналізу називають теоремою Дарбу*:

Теорема. **Точки, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, розбивають область визначення функції $f(x)$ на проміжки, у кожному з яких $f'(x)$ зберігає сталий знак.**

Означення. **Внутрішні** ** **точки області визначення функції, у яких її похідна дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками цієї функції.**

Виходячи з плану розв'язування нерівностей методом інтервалів (п. 6 табл. 41), одержуємо, що проміжки зростання і спадання функції $f(x)$ можна знаходити за схемою:

1. Знайти область визначення функції $f(x)$.
2. Знайти похідну $f'(x)$.
3. З'ясувати, у яких внутрішніх точках області визначення функції похідна $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує (тобто знайти критичні точки цієї функції).
4. Позначити знайдені точки на області визначення функції $f(x)$ і знайти знак $f'(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається область визначення функції (знак можна визначити, обчисливши значення $f'(x)$ у будь-якій точці проміжку).

Приклад Дослідіть функцію $f(x)=x^3-3x$ на зростання і спадання.

Розв'язання

▶ 1. Область визначення заданої функції — усі дійсні числа $(D(f)=\boldsymbol{R})$.

2. Похідна $f'(x)=3x^2-3$.

3. Похідна існує на всій області визначення функції, і $f'(x)=0$, якщо $3x^2-3=0$, тобто при $x=1$ або $x=-1$.

4. Розв'язуємо нерівності $f'(x)>0$ і $f'(x)<0$ на області визначення функції $f(x)$ методом інтервалів. Для цього відмічаємо точки 1 і (-1) на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знак $f'(x)$ у кожному з одержаних проміжків (рис. 34.1.3).

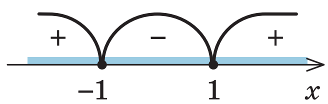


Рис. 34.1.3

Ураховуючи достатні умови зростання і спадання функції, одержуємо, що в тих інтервалах, де похідна додатна, функція $f(x)$ зростає, а в тих інтервалах, де похідна від'ємна, — спадає. Отже, функція $f(x)$ зростає на кожному з інтервалів $(-\infty;-1)$ та $(1;+\infty)$ і спадає на інтервалі $(-1;1)$. ◁

* Жан Ґастон Дарбу (1842–1917) — французький математик, який зробив значний внесок у розвиток диференціальної геометрії, інтегрального числення та механіки.

** Внутрішньою точкою множини називають таку точку, яка належить цій множині разом із деяким своїм околом.

Графік функції $y=x^3-3x$ зображено на рис. 34.1.4. При побудові графіка враховано, що $f(-1)=2$ і $f(1)=-2$. Із графіка видно, що функція $f(x)=x^3-3x$ зростає не тільки на інтервалах $(-\infty;-1)$ та $(1;+\infty)$, а й на проміжках $(-\infty;-1]$ та $[1;+\infty)$ і спадає не тільки на інтервалі $(-1;1)$, а й на відрізку $[-1;1]$.

Виявляється, що завжди, *коли функція $f(x)$ неперервна в будь-якому з кінців проміжку зростання (спадання), то його можна приєднати до цього проміжку* (як точки -1 і 1 у попередньому прикладі).

Приймемо це твердження без доведення.

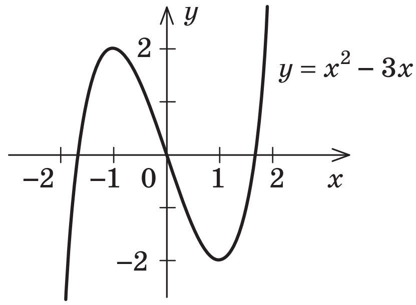


Рис. 34.1.4

2 Екстремуми (максимуми і мінімуми) функції

На рис. 34.1.4 зображено графік функції $y=x^3-3x$. Розглянемо окіл точки $x=-1$, тобто довільний інтервал, що містить точку -1 (наприклад, δ-окіл цієї точки). Як видно з рисунка, існує такий окіл точки $x=-1$, що найбільшого значення для точок із цього околу функція $f(x)=x^3-3x$ набуває в точці $x=-1$. Наприклад, на інтервалі $(-2;0)$ найбільшого значення, яке дорівнює 2, функція набуває в точці $x=-1$. Точку $x=-1$ називають точкою максимуму цієї функції і позначають x_{max}, а значення функції в цій точці $f(-1)=2$ називають максимумом функції.

Аналогічно точку $x=1$ називають точкою мінімуму функції $f(x)=x^3-3x$, оскільки значення функції в цій точці менше за її значення в будь-якій точці деякого околу точки 1, наприклад околу $(0,5;1,5)$. Позначають точку мінімуму x_{min}, а значення функції в цій точці $f(1)=-2$ називають мінімумом функції.

Максимум — від латин. *maximum* — найбільше.
Мінімум — від латин. *minimum* — найменше.
Екстремум — від латин. *extremum* — крайній.

Точки максимуму і мінімуму функції ще називають точками екстремуму, а значення функції в цих точках називають екстремумами функції.

Наведемо означення точок максимуму і мінімуму.

Означення. **Точка x_0 з області визначення функції $f(x)$ називається точкою максимуму цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x\neq x_0$ із цього околу виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$.**

Означення. **Точка x_0 з області визначення функції $f(x)$ називається точкою мінімуму цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ точки x_0 такий, що для всіх $x\neq x_0$ із цього околу виконується нерівність $f(x)>f(x_0)$.**

За означенням у точці максимуму x_0 значення функції $f(x)$ є найбільшим серед значень функції з деякого околу цієї точки. Через це графік функції $f(x)$ в околі x_0 найчастіше має вигляд гладенького «горба» (рис. 34.1.5, *а*), але може мати вигляд загостреного «піка» (рис. 34.1.5, *б*) або навіть ізольованої точки (зрозуміло,

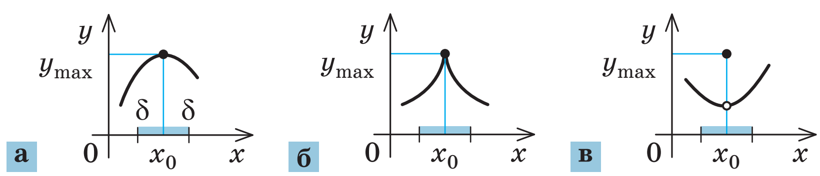


Рис. 34.1.5

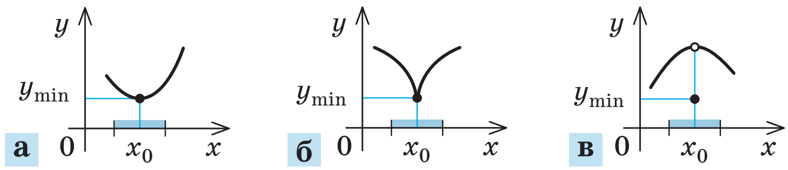


Рис. 34.1.6

що в цьому випадку функція не буде неперервною в точці x_0) (рис. 34.1.5, *в*).

Аналогічно значення функції $f(x)$ у точці мінімуму x_0 є найменшим серед значень функції з деякого околу цієї точки. Графік функції $f(x)$ в околі x_0 найчастіше має вигляд «западини», теж гладенької (рис. 34.1.6, *а*) або загостреної (рис. 34.1.6, *б*), або навіть ізольованої точки (рис. 34.1.6, *в*).

Локальний — від латин. *lokalis* — місцевий.

Зауваження. За означенням точки екстремуму — це такі точки, в яких функція набуває найбільшого чи найменшого значення, порівняно зі значеннями цієї функції в точках деякого околу екстремальної точки. Такий екстремум зазвичай називають *локальним екстремумом*.*

3 Необхідна і достатня умови екстремуму

При дослідженні функції та побудові її графіка важливе значення має знаходження точок екстремумів функції. Покажемо, що точками екстремуму можуть бути тільки критичні точки функції, тобто внутрішні точки області визначення функції, у яких її похідна дорівнює нулю або не існує.

Теорема Ферма (необхідна умова екстремуму). **Якщо x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна $f'(x_0)$, то вона дорівнює нулю: $f'(x_0)=0$.**

● Доведемо це твердження методом від супротивного. Нехай x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна $f'(x_0)$. Припустимо, що $f'(x_0)\neq 0$.

Розглянемо випадок, коли $f'(x_0)>0$. За означенням похідної при $x\to x_0$ (тобто при $\Delta x\to 0$) відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ прямує до додатного числа $f'(x_0)$, а отже, і саме буде додатним при всіх x, достатньо близьких до x_0. Тобто $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$.

Тоді при $x>x_0$ одержуємо, що $f(x)>f(x_0)$, і точка x_0 не може бути точкою максимуму.

При $x<x_0$ $f(x)<f(x_0)$, і точка x_0 не може бути точкою мінімуму, тобто точкою екстремуму, що суперечить умові.

Аналогічно розглядається й випадок, коли $f'(x_0)<0$. Отже, наше припущення неправильне, і $f'(x_0)=0$. ○

Теорема Ферма дає лише необхідну умову екстремуму: з того, що $f'(x_0)=0$, не обов'язково випливає, що в точці x_0 функція має екстремум. Наприклад, якщо $f(x)=x^3$, то $f'(x)=3x^2$ і $f'(0)=0$. Але точка $x=0$ не є точкою екстремуму, оскільки функція x^3 зростає на всій числовій прямій (рис. 34.1.7).

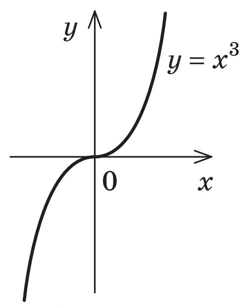


Рис. 34.1.7

* Наприклад, на рис. 34.1.4 зображено графік функції, яка має локальні екстремуми, але на всій області визначення не має ні найбільшого, ні найменшого значень.

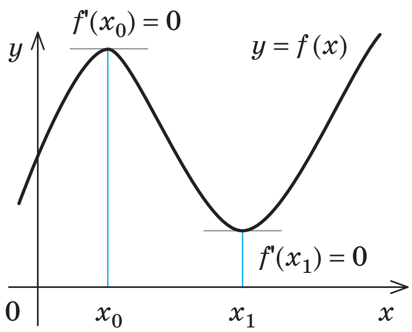


Рис. 34.1.8

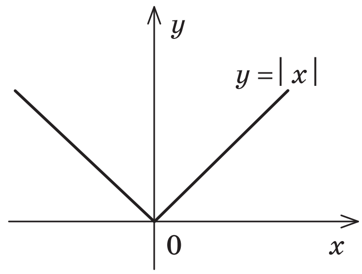


Рис. 34.1.9

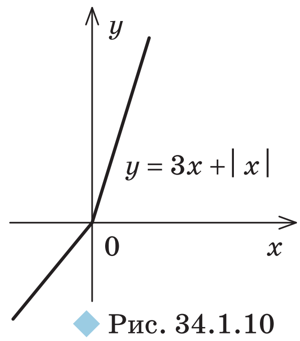


Рис. 34.1.10

Теорема Ферма має наочний геометричний зміст: дотична до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0 (де x_0 — точка екстремуму функції) паралельна осі абсцис (або збігається з нею) і тому її кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$ дорівнює нулю (рис. 34.1.8).

У точці з абсцисою $x_0=0$ до графіка функції $y=x^3$ теж можна провести дотичну: оскільки $f'(0)=0$, то цією дотичною є вісь Ox. Але графіки функцій, наведених на рис. 34.1.7 і 34.1.8, по-різному розміщуються відносно дотичних. На рис. 34.1.8, де x_0 і x_1 — точки екстремуму, можна вказати околи цих точок, для яких відповідні точки графіка розміщуються по один бік від дотичної, а на рис. 34.1.7 *графік функції* $y=x^3$ *при переході аргумента через точку* $x_0=0$ (у якій похідна дорівнює нулю, але точка не є точкою екстремуму) *переходить з одного боку дотичної до іншого*. У цьому випадку точку x_0 називають *точкою перегину** функції.

Функція може мати екстремум і в тій критичній точці, у якій не існує похідна заданої функції. Наприклад, як було показано в п. 8 § 31, функція $y=|x|$ не має похідної в точці $x=0$, але, як видно з її графіка (рис. 34.1.9), саме в цій точці функція має мінімум.

Проте не кожна критична точка, у якій не існує похідна заданої функції, буде точкою екстремуму цієї функції. Наприклад, розглядаючи функцію $f(x)=3x+|x|$, помічаємо, що вона не має похідної в точці $x=0$: графік має злом при $x=0$ (рис. 34.1.10). Дійсно, якщо припустити, що функція $f(x)=3x+|x|$ має похідну в точці 0, то функція $f(x)-3x$ теж повинна мати похідну в точці 0. Але $f(x)-3x=|x|$, а функція $|x|$ не має похідної в точці 0, тобто ми прийшли до суперечності. Отже, функція $f(x)$ у точці 0 похідної не має. Однак, як видно з рис. 34.1.10, функція $f(x)$ зростає на всій числовій прямій і екстремуму не має.

Наведені міркування і приклади показують, що для знаходження точок екстремуму функції потрібно насамперед знайти її критичні точки. Але щоб з'ясувати, чи є відповідна критична точка точкою екстремуму, необхідно провести додаткове дослідження. Цьому часто допомагають достатні умови існування екстремуму в точці.

Теорема 1 (ознака максимуму функції). **Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і при переході через точку x_0 її похідна змінює знак із «плюса» на «мінус» (тобто в деякому δ-околі точки x_0 при $x<x_0$ значення $f'(x)>0$, а при $x>x_0$ значення $f'(x)<0$), то точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$.**

* У точках перегину похідна може набувати різних значень — головне, що в цій точці крива переходить з одного боку дотичної на інший. Детальніше про точки перегину див. у п. 3 § 35.

● Розглянемо заданий δ-окіл точки x_0, тобто інтервал $(x_0-\delta; x_0+\delta)$. За умовою похідна $f'(x)>0$ на інтервалі $(x_0-\delta; x_0)$ (при $x<x_0$). Отже, функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі, а через те що $f(x)$ неперервна в точці x_0, то вона зростає і на проміжку $(x_0-\delta; x_0]$. Тоді для всіх x з інтервалу $(x_0-\delta; x_0)$ маємо $x<x_0$, таким чином, $f(x)<f(x_0)$. Аналогічно за умовою похідна $f'(x)<0$ на інтервалі $(x_0; x_0+\delta)$ (при $x>x_0$). Звідси випливає, що функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі, а оскільки $f(x)$ неперервна в точці x_0, то вона спадає і на проміжку $[x_0; x_0+\delta)$. Тоді для всіх x з інтервалу $(x_0; x_0+\delta)$ маємо $x>x_0$, отже, $f(x)<f(x_0)$. Таким чином, $f(x)<f(x_0)$ для всіх $x \neq x_0$ з деякого δ-околу точки x_0, а це й означає, що точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$. ○

Теорема 2 (ознака мінімуму функції). **Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і при переході через точку x_0 її похідна змінює знак з «мінуса» на «плюс» (тобто в деякому δ-околі точки x_0 при $x<x_0$ значення $f'(x)<0$, а при $x>x_0$ значення $f'(x)>0$), то точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.**

Доведення цієї теореми повністю аналогічне доведенню теореми 1 (пропонуємо провести його самостійно).

Теореми 1 і 2 дають можливість зробити такий висновок: *якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і похідна $f'(x)$ змінює знак при переході через точку x_0, то x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$.*

Якщо ж функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, а її похідна $f'(x)$ не змінює знак при переході через точку x_0, то точка x_0 не може бути точкою екстремуму функції.

● Дійсно, якщо, наприклад, $f'(x)>0$ на інтервалі $(x_0-\delta; x_0)$ і на інтервалі $(x_0; x_0+\delta)$, то функція зростає на кожному з цих інтервалів. Ураховуючи її неперервність у точці x_0 (див. доведення теореми 1), одержуємо, що для всіх $x \in (x_0-\delta; x_0)$ виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$, а для всіх $x \in (x_0; x_0+\delta)$ — нерівність $f(x_0)<f(x)$. Це означає, що на всьому проміжку $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ функція $f(x)$ зростає і точка x_0 не є точкою екстремуму. Аналогічно розглядається і випадок, коли $f'(x)<0$ на розглянутих інтервалах. ○

Зауваження. Наведене обґрунтування дозволяє уточнити умови зростання і спадання функції.

Якщо $f'(x) \geqslant 0$ у кожній точці інтервалу $(a; b)$ (причому рівняння $f'(x)=0$ має лише скінченну або зліченну множину коренів), то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі.*

Якщо $f'(x) \leqslant 0$ у кожній точці інтервалу $(a; b)$ (причому рівняння $f'(x)=0$ має лише скінченну або зліченну множину коренів), то функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

Для практичного дослідження функції на екстремуми можна використовувати схему. наведену в п. 6 табл. 47. Приклади її використання також наведено в інтернет-підтримці підручника.

* Зліченність множини означає, що ми можемо встановити взаємно однозначну відповідність між елементами заданої множини і натуральними числами, тобто можемо вказати, як занумерувати всі елементи множини.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад **Функція $y=f(x)$ означена на проміжку $(-7;8)$. На рис. 34.1.11 зображено графік її похідної.**

1) **Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.**
2) **Знайдіть критичні точки функції. Визначте, які з них є точками максимуму, які — точками мінімуму, а які не є точками екстремуму.**

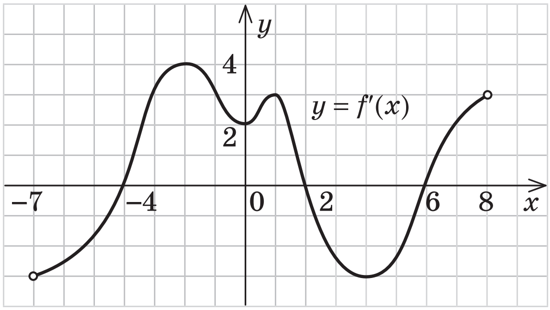


Рис. 34.1.11

Розв'язання

1) ▶ За графіком маємо, що $f'(x)>0$ на проміжках $(-4;2)$ та $(6;8)$, отже, $f(x)$ зростає на цих проміжках. Аналогічно $f'(x)<0$ на проміжках $(-7;-4)$ та $(2;6)$, отже, $f(x)$ спадає на цих проміжках. Оскільки в точках –4, 2 і 6 існує похідна $f'(x)$, то функція $f(x)$ неперервна в цих точках, і тому їх можна включити до проміжків зростання та спадання функції.

Відповідь: $f(x)$ зростає на проміжках $[-4;2]$ та $[2;8)$ і спадає на проміжках $(-7;-4]$ та $[2;6]$. ◁

2) ▶ Похідна $f'(x)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$ і дорівнює нулю в точках –4, 2 і 6. Це внутрішні точки області визначення, отже, критичними точками будуть тільки точки –4, 2 і 6.

Оскільки похідна існує на всій області визначення, то функція неперервна в кожній точці області визначення.

У точках –4 і 6 похідна змінює знак з «–» на «+», отже, це точки мінімуму.

У точці 2 похідна змінює знак з «+» на «–», отже, це точка максимуму.

Відповідь: $x_{1\,\min}=-4$, $x_{2\,\min}=6$, $x_{\max}=2$. ◁

Коментар

1) Як відомо, на тих проміжках, де похідна функції додатна, функція зростає, а на тих, де похідна від'ємна, спадає. Тому за графіком похідної з'ясовуємо проміжки, у яких похідна додатна і в яких — від'ємна. Це і будуть проміжки зростання і спадання функції.

2) Критичні точки — це внутрішні точки області визначення, у яких похідна дорівнює нулю або не існує. За графіком бачимо, що похідна $f'(x)$ існує на всій заданій області визначення. Отже, критичними точками будуть тільки ті значення x, при яких похідна дорівнює нулю.

Для визначення того, чи є критична точка точкою екстремуму, використовуємо достатні умови екстремуму: якщо в критичній точці функція неперервна та її похідна змінює знак з «+» на «–», то ця критична точка є точкою максимуму, а якщо з «–» на «+», — то точкою мінімуму.

Запитання

1. Дайте означення зростаючої та спадної на множині функції.
2. Сформулюйте та обґрунтуйте достатні умови зростання та спадання функції. Наведіть приклади їх застосування.
3. Сформулюйте і обґрунтуйте умову сталості функції на інтервалі.
4. Зобразіть графік функції, що має екстремуми. Дайте означення точок екстремуму функції та її екстремумів.
5. Сформулюйте і обґрунтуйте необхідну та достатні умови екстремуму функції.

Вправи

34.1.1°. На рис. 34.1.12 зображено графік функції $y=f(x)$ (на рис. 34.1.12, *а*, функція задана на проміжку $[-6;6]$, а на рис. 34.1.12, *б* — на проміжку $[-7;7]$). Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.

34.1.2°. Відомо, що похідна деякої функції $y=f(x)$, заданої на множині всіх дійсних чисел, має такі знаки, як показано на рис. 34.1.13. Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.

34.1.3. Функція $y=f(x)$ означена на проміжку $(-6;3)$. На рис. 34.1.14 зображено графік її похідної. Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.

34.1.4. Доведіть, що задана функція зростає на всій області визначення:

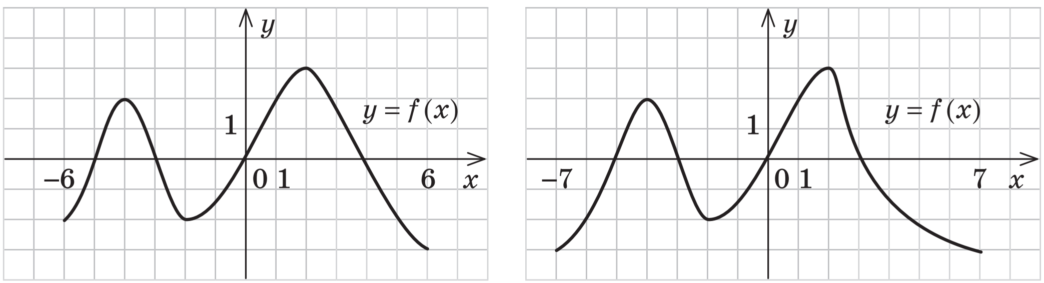
1°) $f(x)=x^3+5x$; 3) $f(x)=2x+\cos x$;

2) $f(x)=x^3-x^2+x-7$; 4) $f(x)=\sin x+3x+2$.

34.1.5. Доведіть, що задана функція спадає на всій області визначення:

1°) $y=-x^3-3x$; 3) $f(x)=\cos x-6x$;

2) $f(x)=-x^7+x^4-x+2$; 4) $f(x)=\sin x-2x+1$.



а б

Рис. 34.1.12

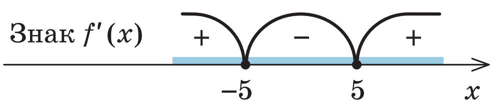


Рис. 34.1.13

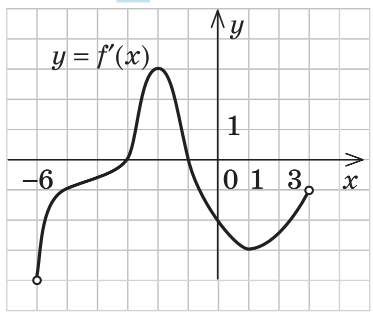


Рис. 34.1.14

У завданнях 34.1.6, 34.1.7 знайдіть проміжки зростання і спадання функції.

34.1.6. 1°) $f(x)=x^2-2x$; 3) $f(x)=x^4-2x^2$; 5) $f(x)=\sqrt[5]{x^4}$;
2) $f(x)=x^3-24x+2$; 4) $f(x)=x+\frac{1}{x}$; 6*) $f(x)=\sqrt[7]{x^3}$.

34.1.7. 1) $y=x^3-27x+1$; 3*) $y=x+2\cos x$;
2) $y=x-x^5$; 4*) $y=x-\sin 2x$.

34.1.8*. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція зростає на всій числовій прямій:
1) $f(x)=x^3-3ax$; 2) $f(x)=ax+\cos x$; 3) $f(x)=x^3+ax^2+3ax-5$.

34.1.9*. Доведіть, що рівняння має єдиний корінь, і знайдіть цей корінь.
1) $2x^3+3x-5=0$; 3) $5x-\cos 3x-5\pi=1$;
2) $x^3-x^2+x=0$; 4) $x^3-x^5-x=1$.

34.1.10°. За графіком функції $y=f(x)$, зображеним на рис. 34.1.12, знайдіть точки максимуму і мінімуму функції $f(x)$. Чи існує похідна в кожній із цих точок? Якщо існує, то чому дорівнює її значення?

34.1.11°. Відомо, що похідна деякої функції $y=f(x)$, заданої на множині всіх дійсних чисел, має такі знаки, як показано на рис. 34.1.13, і $f'(-5)=f'(5)=0$. Укажіть критичні точки, точку максимуму і точку мінімуму цієї функції.

34.1.12°. Користуючись даними про похідну $f'(x)$, наведеними в таблиці, укажіть:
1) проміжки зростання і спадання функції $f(x)$;
2) точки максимуму і точки мінімуму функції $f(x)$.

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;1)$	1	$(1;5)$	5	$(5;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+	0	+

34.1.13. Функція $y=f(x)$ означена на проміжку $(-6;3)$. На рис. 34.1.14 зображено графік її похідної. Знайдіть критичні точки функції. Які з них є точками максимуму, які — точками мінімуму?

У завданнях 34.1.14, 34.1.15 дослідіть функцію на екстремуми.

34.1.14°. 1) $f(x)=1+12x-x^3$; 3) $f(x)=x^4-8x^3$;
2) $f(x)=x^4-2x^2-5$; 4) $f(x)=5x-x^5$.

34.1.15. 1) $y=\sqrt{1-x^2}$; 2) $y=x-\sqrt{x}$; 3) $y=x+\frac{1}{x}$; 4) $y=\frac{x+2}{\sqrt{x}}$.

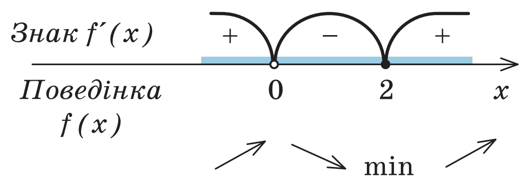
У завданнях 34.1.16, 34.1.17 визначте проміжки монотонності, точки екстремуму функції та значення функції в точках екстремуму.

34.1.16. 1°) $f(x)=x^2-6x+5$; 3) $f(x)=x+\frac{4}{x}$;
2°) $f(x)=x^4-2x^2$; 4) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$.

34.1.17*. 1) $y=\frac{x}{x^2+4}$; 3) $y=6x^3-2|x-1|$;
2) $y=x^2-|x|-1$; 4) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$.

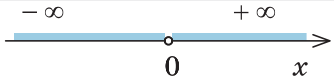
34.2. Загальна схема дослідження функції для побудови її графіка

Таблиця 48

Схема дослідження функції	Приклад
1. Знайти область визначення функції.	Побудуйте графік функції $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$. ▶ **1.** Область визначення: $x\neq 0$ $\left(D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)\right)$.
2. З'ясувати, чи є функція парною або непарною (чи періодичною*).	**2.** Функція $f(x)$ ні парна, ні непарна, оскільки $f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq -f(x)$.
3. Точки перетину графіка з осями координат (якщо можна знайти).	**3.** Графік не перетинає вісь Oy $(x\neq 0)$. На осі Ox $y=0$: $x+\frac{4}{x^2}=0$, $x^3=-4$, $x=-\sqrt[3]{4}$ $(\approx 1,6)$ — абсциса точки перетину графіка з віссю Ox.
4. Похідна і критичні точки функції.	**4.** $f'(x)=x'+\left(\frac{4}{x^2}\right)'=1-\frac{8}{x^3}$. Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення). $f'(x)=0$; $1-\frac{8}{x^3}=0$. При $x\neq 0$ маємо: $x^3=8$; $x=2$ — критична точка.
5. Проміжки зростання і спадання функції та точки екстремуму (і значення функції в цих точках).	**5.** Позначимо критичні точки на області визначення і знайдемо знак похідної та характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.  Отже, функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty;0)$ та $[2;+\infty)$ і спадає на проміжку $(0;2]$. Оскільки в критичній точці 2 похідна змінює знак з «–» на «+», то $x=2$ — точка мінімуму: $x_{\min}=2$. Тоді $y_{\min}=f(2)=3$.

* Найчастіше періодичність доводиться встановлювати для тригонометричних функцій.

6. Поведінка функції на кінцях проміжків області визначення (цей етап не входить до мінімальної схеми дослідження функції).

6. 

При $x \to 0$ справа (і при $x \to 0$ зліва) $f(x) = x + \frac{4}{x^2} \to \left(\frac{4}{+0}\right) \to +\infty$ *.

При $x \to -\infty$ (і при $x \to +\infty$) значення $\frac{4}{x^2} \to 0$, тоді $f(x) \to x$ **

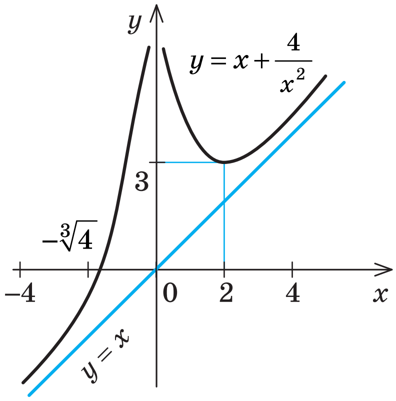
(тобто при $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$ і при $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$).

7. Якщо необхідно, знайти координати додаткових точок, щоб уточнити поведінку графіка функції.

7.

x	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4	-4
y	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	$-3\frac{3}{4}$

8. На підставі проведеного дослідження побудувати графік функції.

8. 

◁

Пояснення до схеми дослідження функції для побудови її графіка та приклади розв'язування завдань наведено в інтернет-підтримці підручника.

Запитання

1. За якою схемою можна досліджувати властивості функції для побудови її графіка?

2*. Охарактеризуйте особливості виконання основних етапів дослідження функції та відображення результатів дослідження на графіку функції. Наведіть приклади.

Вправи

34.2.1°. Побудуйте схематичний графік функції, визначеної та неперервної на множині всіх дійсних чисел, користуючись її властивостями, указаними в таблиці.

1)

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	2	↗
		max		min	

* У цьому випадку говорять, що $x = 0$ — вертикальна асимптота графіка функції $f(x)$ (див. § 30).
** У цьому випадку говорять, що $y = x$ — похила асимптота графіка функції $f(x)$.

2)

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$
		min		max		min	

У завданнях 34.2.2, 34.2.3 дослідіть функцію і побудуйте її графік.

34.2.2. 1) $f(x)=x^3-3x^2$; 3) $f(x)=x^4-2x^2$; 5) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$;

2) $f(x)=3x-x^3+1$; 4) $f(x)=5x^4-4x^5$; 6) $y=2x-5\sqrt[5]{x^2}$.

34.2.3. 1) $f(x)=\left(x^2-2\right)^2$; 3) $f(x)=\dfrac{4}{x}-x$; 5) $y=2\sin x-\cos 2x$;

2) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; 4) $f(x)=2\sqrt{x}-x$; 6) $y=\cos^2 x-\cos x$.

34.2.4. а) Дослідіть функцію $f(x)$ і побудуйте її графік.
б) Знайдіть область значень функції $f(x)$.
в*) Скільки коренів має рівняння $f(x)=a$ залежно від значення параметра a (див. інтернет-підтримку підручника)?

1) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$; 2) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$; 3) $y=x-\sqrt{x}$; 4) $y=\dfrac{x+4}{\sqrt{x}}$.

34.2.5. Скільки коренів має рівняння:

1) $x^4-4x^3+1=0$; 2) $8x^3-3x^4+2=0$; 3) $x^2-\dfrac{1}{3}x^3-3=0$?

34.3. Найбільше і найменше значення функції

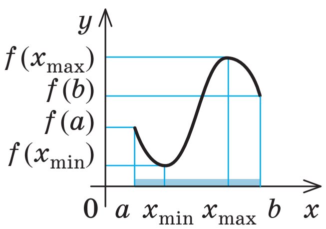
Таблиця 49

1. Найбільше і найменше значення функції, неперервної на відрізку

Властивість

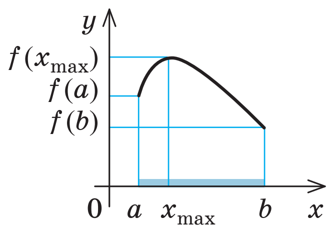
Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку і має на ньому скінченне число критичних точок, то вона набуває найбільшого і найменшого значень на цьому відрізку або в критичних точках, які належать цьому відрізку, або на кінцях відрізка.

Приклади



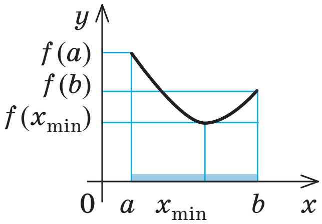
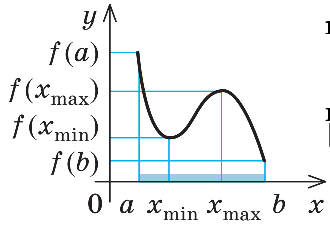
$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{max})$;

$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{min})$



$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{max})$;

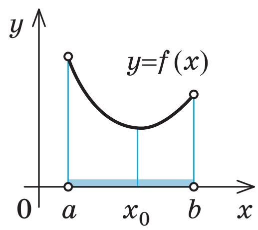
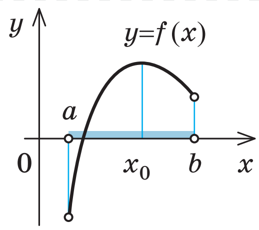
$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$

 $\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$; $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{\min})$	 $\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$; $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$

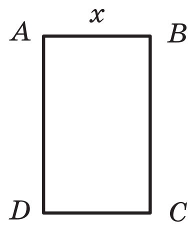
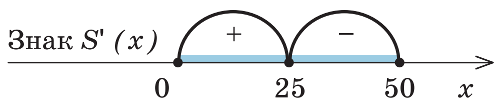
2. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку

Схема	Приклад
	Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)=x^3-12x+12$ на відрізку $[1;3]$.
1. Упевнитися, що заданий відрізок входить до області визначення функції $f(x)$.	▶ Область визначення функції — усі дійсні числа $(D(f)=\boldsymbol{R})$, отже, заданий відрізок входить до області визначення функції $f(x)$.
2. Знайти похідну $f'(x)$.	$f'(x)=3x^2-12$.
3. Знайти критичні точки: $f'(x)=0$ або не існує.	$f'(x)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція $f(x)$ неперервна на заданому відрізку). $f'(x)=0$; $3x^2-12=0$ при $x=2$ або $x=-2$.
4. Вибрати критичні точки, які належать заданому відрізку.	Заданому відрізку $[1;3]$ належить лише критична точка $x=2$.
5. Обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка.	$f(1)=1$; $f(2)=-4$; $f(3)=3$.
6. Порівняти одержані значення функції та вибрати з них найменше і найбільше.	$\max\limits_{[1;3]} f(x)=f(3)=3$, $\min\limits_{[1;3]} f(x)=f(2)=-4$. ◁

3. Знаходження найбільшого або найменшого значення функції, неперервної на інтервалі

Властивість	Ілюстрація
Якщо неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка мінімуму, то на заданому інтервалі функція набуває свого найменшого значення в точці x_0.	
Якщо неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка максимуму, то на заданому інтервалі функція набуває свого найбільшого значення в точці x_0.	

4. Задачі на знаходження найбільшого і найменшого значень функції

Схема	Приклад
	Є дріт завдовжки 100 м. Потрібно огородити ним прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайдіть розміри ділянки.
1. **Одну з величин, яку потрібно знайти** (або величину, за допомогою якої можна дати відповідь на запитання задачі), **позначити через** x (і за змістом задачі накласти обмеження на x).	▶ Нехай ділянка має форму прямокутника $ABCD$ (див. рисунок) зі стороною $AB = x$ (м). Ураховуючи, що дріт буде натягнуто по периметру прямокутника, одержуємо: $2AB + 2BC = 100$, або $2x + 2BC = 100$, звідси $BC = 50 - x$ (м). Оскільки довжина кожної сторони прямокутника є додатним числом, то $0 < x < 50$. 
2. **Величину, про яку йдеться, що вона найбільша або найменша, виразити як функцію від** x.	Площа прямокутника: $S(x) = AB \cdot BC = x(50 - x) = 50x - x^2$.
3. **Дослідити одержану функцію на найбільше або найменше значення** (найчастіше за допомогою похідної).	Дослідимо функцію $S(x)$ за допомогою похідної. Похідна $S'(x) = 50 - 2x$ існує при всіх дійсних значеннях x (отже, $S(x)$ — неперервна функція на заданому проміжку). $S'(x) = 0$, $50 - 2x = 0$, $x = 25$ — критична точка.  У точці $x = 25$ $S'(x) = 50 - 2x$ змінює знак із плюса на мінус (див. рисунок), отже, $x = 25$ — точка максимуму. Ураховуємо, що неперервна функція $S(x)$ має на заданому інтервалі $(0; 50)$ тільки одну точку екстремуму $x = 25$ і це точка максимуму. Тоді на заданому інтервалі функція набуває свого найбільшого значення в точці $x = 25$.
4. **Упевнитися, що одержаний результат має зміст для початкової задачі.**	Отже, площа огородженої ділянки буде найбільшою, якщо сторони прямокутника будуть завдовжки: $AB = x = 25$ (м), $BC = 50 - x = 25$ (м), тобто коли ділянка матиме форму квадрата зі стороною 25 м. ◁

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Людині в житті часто доводиться шукати найкращий, або, як часто кажуть, оптимальний розв'язок поставленої задачі. Частину таких задач вдається розв'язати за допомогою методів математичного аналізу — це задачі, які можна звести до знаходження найбільшого або найменшого значення функції.

У курсах аналізу доводиться теорема Вейєрштрасса.

✓ **Теорема Вейєрштрасса. Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізку найбільше і найменше значення, тобто існують точки відрізка $[a;b]$, у яких $f(x)$ набуває найбільшого та найменшого на $[a;b]$ значень.**

Розглянемо випадок, коли неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізку лише скінченне число критичних точок. Тоді має місце властивість: **якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку і має на ньому скінченне число критичних точок, то вона набуває свого найбільшого і найменшого значень на цьому відрізку або в критичних точках, які належать цьому відрізку, або на кінцях відрізка.**

Геометрична ілюстрація цієї властивості наведена в п. 1 табл. 49.

● 1) Спочатку розглянемо випадок, коли неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ не має на цьому відрізку критичних точок. Тоді на відрізку $[a;b]$ похідна $f'(x)$ зберігає постійний знак (див. п. 34.1), отже, функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ зростає (рис. 34.3.1, *а*) або спадає (рис. 34.3.1, *б*). Тому найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ — це значення на кінцях a і b.

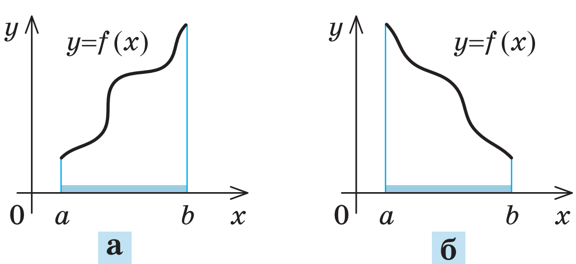
2) Нехай тепер функція $f(x)$ має на відрізку $[a;b]$ скінченне число критичних точок. Ці точки розбивають відрізок $[a;b]$ на скінченне число відрізків, усередині яких критичних точок немає. Тоді, згідно з п. 1, найбільшого і найменшого значень функція $f(x)$ набуває на кінцях таких відрізків, тобто в критичних точках функції, або в точках a і b.

Отже, *щоб знайти найбільше і найменше значення неперервної на відрізку функції, яка має на цьому відрізку скінченне число критичних точок, достатньо обчислити значення функції в усіх критичних точках і на кінцях відрізка та з одержаних чисел вибрати найбільше і найменше.*

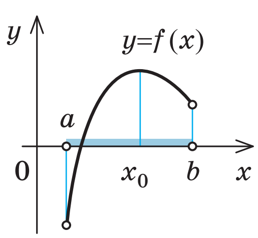
Для використання цього орієнтиру потрібно впевнитися, що заданий відрізок входить до області визначення даної функції і що функція неперервна на цьому відрізку (останнє випливає, наприклад, з того, що функція диференційовна на заданому відрізку). Для знаходження критичних точок функції потрібно знайти її похідну і з'ясувати, де похідна дорівнює нулю або не існує. Уточнену схему знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку, і приклад використання наведено в п. 2 табл. 49. Інші приклади знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку, наведено далі (див. Приклад) та в інтернет-підтримці підручника.

Твердження, що найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ досягається в точці x_0, можна позначати так: $\max\limits_{[a;b]} f(x)=(x_0)$; а твердження, що найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ досягається в точці x_0, так: $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_0)$.

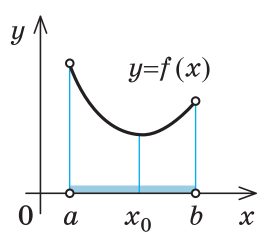
Під час розв'язування деяких задач доводиться знаходити найбільше і найменше значення неперервної функції не на відрізку, а на інтервалі. Найчастіше в таких задачах функція має на заданому інтерва-



◆ 34.3.1



◆ 34.3.2



◆ 34.3.3

лі тільки одну критичну точку: або точку максимуму, або точку мінімуму. У цих випадках у точці максимуму функція $f(x)$ набуває найбільшого значення на даному інтервалі (рис. 34.3.2), а в точці мінімуму — найменшого значення на даному інтервалі (рис. 34.3.3) — див. повне формулювання відповідних властивостей у п. 3 табл. 49, а обґрунтування — в інтернет-підтримці підручника.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ на відрізку $[0; \pi]$.

Розв'язання

▶ 1) $D(f) = \boldsymbol{R}$, отже, відрізок $[0; \pi]$ входить до області визначення функції $f(x)$.

2) $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$.

3) $f'(x)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція $f(x)$ є неперервною на заданому відрізку);

$$f'(x) = 0,\ \ 2\cos x - 2\sin 2x = 0,$$

$$\cos x - 2\sin x\cos x = 0,\ \ \cos x(1 - 2\sin x) = 0,$$

$$\cos x = 0 \text{ або } \sin x = \frac{1}{2},\ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z},$$

$$x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z}, \text{ — критичні точки.}$$

4) у заданий відрізок попадають тільки критичні точки: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$.

5) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 1$,

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{5\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

$f(0) = 1$, $f(\pi) = 1$.

6) $\min\limits_{[0;\pi]} f(x) = f(0) = f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,

$\max\limits_{[0;\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. ◁

Коментар

Використаємо схему знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної на відрізку функції $f(x)$:

1) *упевнитися, що заданий відрізок входить до області визначення функції*;
2) *знайти похідну*;
3) *знайти критичні точки* ($f'(x) = 0$ або не існує);
4) *вибрати критичні точки, які належать заданому відрізку*;
5) *обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка*;
6) *порівняти одержані значення і вибрати з них найбільше і найменше.*

Щоб упевнитися в неперервності заданої функції, достатньо після знаходження її похідної з'ясувати, що похідна існує в кожній точці області визначення функції, або зазначити, що задана функція неперервна як сума двох неперервних функцій $2\sin x$ і $\cos 2x$.

Визначити, які критичні точки належать заданому відрізку, можна на відповідному рисунку, відмічаючи критичні точки на числовій прямій (рис. 34.3.4):

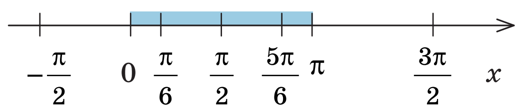


Рис. 34.3.4

Приклад застосування похідної до розв'язування практичної задачі на знаходження найбільшого значення заданої величини наведено п. 4 табл. 49. Звернувшися до інтернет-підтримки підручника, можна ознайомитися з розв'язуванням інших прикладних задач.

Запитання

1. Поясніть, у яких точках неперервна на відрізку функція може набувати свого найбільшого і найменшого значень на цьому відрізку. Проілюструйте відповідну властивість на графіках функцій і обґрунтуйте її.
2. Опишіть схему знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку. Наведіть приклад.
3. Сформулюйте і обґрунтуйте властивості неперервної на інтервалі функції, яка має на цьому інтервалі тільки одну точку екстремуму.
4. Опишіть схему розв'язування задач на найбільше і найменше значення за допомогою дослідження відповідних функцій. Наведіть приклад.

Вправи

У завданнях 34.3.1–34.3.4 знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку.

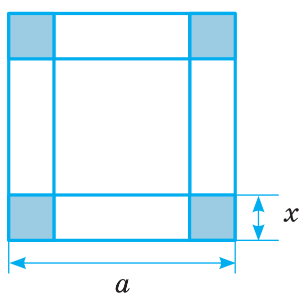
34.3.1°. 1) $f(x)=-x^3+3x^2+5,\ [0;3]$; 3) $f(x)=x^4-4x^3+1,\ [-1;1]$;
2) $f(x)=3x^2-2x^3,\ [-1;2]$; 4) $f(x)=x^3-6x^2+1,\ [-2;1]$.

34.3.2. 1) $f(x)=3\cos x+\cos 3x,\ [0;\pi]$; 3) $f(x)=\operatorname{tg} x-x,\ \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$;
2) $f(x)=5\sin x+\cos 2x,\ [0;\pi]$; 4) $f(x)=\operatorname{ctg} x+x,\ \left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

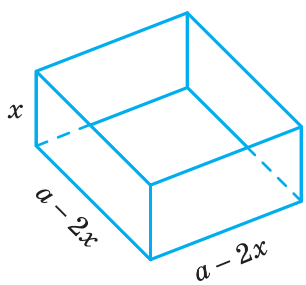
34.3.3. 1) $f(x)=\frac{x}{8}+\frac{2}{x},\ [1;6]$; 3) $f(x)=x-4x^{-2},\ [-3;-1]$;
2) $f(x)=2\sqrt{x}-x,\ [0;9]$; 4) $f(x)=|x-1|-\sqrt{x},\ [0;4]$.

34.3.4*. 1) $f(x)=-x^3+3x|x-3|,\ [0;4]$; 3) $f(x)=\frac{1}{x}+|x-2|,\ [1;4]$;
2) $f(x)=2\sqrt{x}-|x-3|,\ [1;4]$; 4) $f(x)=|x^2-x-6|-x^3,\ [-4;4]$.

34.3.5. Із квадратного листа картону зі стороною a треба виготовити відкриту зверху коробку, вирізавши по кутах квадратики (рис. 34.3.5) і загнувши утворені краї. Якою має бути висота коробки, щоб її об'єм був найбільшим?



а



б

Рис. 34.3.5

34.3.6°. Число 10 подайте у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб сума квадратів цих чисел була найменшою.

34.3.7°. Число 4 розбийте на два доданки так, щоб сума першого доданка з квадратом другого була найменшою.

34.3.8. Різниця двох чисел дорівнює 8. Які мають бути ці числа, щоб добуток куба більшого числа на друге число був найменшим?

34.3.9. З усіх прямокутників, площа яких дорівнює 25 см², знайдіть прямокутник із найменшим периметром.

34.3.10. Доведіть, що з усіх рівнобедрених трикутників, вписаних у коло радіуса R, найбільшу площу має рівносторонній трикутник.

34.3.11. На сторінці текст займає 384 см². Верхнє і нижнє поля мають бути по 2 см, праве і ліве — по 3 см. Якими мають бути розміри сторінки з точки зору економії паперу?

34.3.12*. У прямокутний трикутник із гіпотенузою 8 см і кутом 60° вписано прямокутник найбільшої площі так, що одна з його сторін лежить на гіпотенузі, а дві вершини — на катетах. Визначте більшу із сторін прямокутника.

34.3.13*. Із трикутників, що мають даний кут α між сторонами, сума довжин яких постійна і дорівнює a, знайдіть такий, який має найменший периметр.

34.3.14*. У кулю радіуса R вписано циліндр, що має найбільшу бічну поверхню. Знайдіть об'єм цього циліндра.

34.3.15*. Точка A лежить на графіку функції $y=f(x)$, точка B — на осі Ox, і її абсциса дорівнює ординаті точки A. Знайдіть найменше значення площі трикутника OAB, де точка O — початок координат, а $f(x)=\sqrt{4x-2\sin 2x-9\cos x+12}$ і $\frac{5\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{12\pi}{5}$.

Виявіть свою компетентність

34.3.16. Човен перебуває на відстані 3 км від найближчої точки берега A. Пасажир човна хоче дістатися села B, розташованого на березі на відстані 5 км від A (ділянка AB берега прямолінійна). Швидкість човна 4 км/год; пасажир, вийшовши з човна, може пройти за годину 5 км. До якого пункту на березі має пристати човен, щоб пасажир прибув у село B за найкоротший час?

34.3.17. Звернувшися до інтернет-підтримки підручника, ознайомтеся з формулами похідних обернених тригонометричних функцій та з можливістю застосування похідної до доведення тотожностей. Наведіть приклади такого застосування.

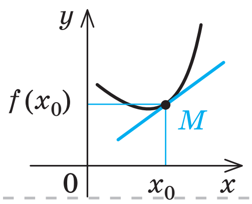
§35 ДРУГА ПОХІДНА Й ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ПОНЯТТЯ ОПУКЛОСТІ ФУНКЦІЇ

Таблиця 50

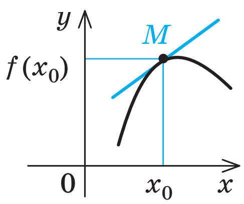
1. Поняття другої похідної

Поняття	Запис	Приклад
Нехай функція $y=f(x)$ має похідну $f'(x)$ у всіх точках деякого проміжку. Ця похідна, у свою чергу, є функцією аргумента x. Якщо функція $f'(x)$ є диференційовною, то її похідну називають *другою похідною* від $f(x)$ і позначають $f''(x)$ (або y'').	$y=f(x)$, $y'=f'(x)$, $y''=(f'(x))'=(y')'$	$y=x^5$, $y'=5x^4$, $y''=(5x^4)'=20x^3$

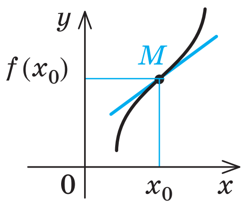
2. Поняття опуклості та точок перегину диференційовної на інтервалі $(a;\ b)$ функції



Функцію $f(x)$ називають ***опуклою вниз*** на інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-якої точки x_0 із цього інтервалу при всіх $x \in (a;b)$ і $x \neq x_0$ ***графік функції лежить вище дотичної до цього графіка*** в точці $(x_0; f(x_0))$.

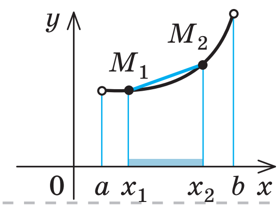


Функцію $f(x)$ називають ***опуклою вгору*** на інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-якої точки x_0 із цього інтервалу при всіх $x \in (a;b)$ і $x \neq x_0$ ***графік функції лежить нижче дотичної до цього графіка*** в точці $(x_0; f(x_0))$.

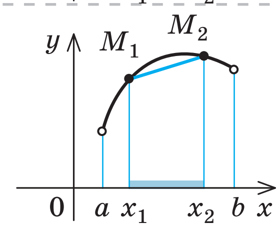


Точку M графіка неперервної функції $f(x)$, у якій існує дотична і при переході через яку ***крива змінює напрям опуклості***, називають ***точкою перегину графіка функції***. У точці перегину графік функції переходить з одного боку дотичної на інший. Абсцису x_0 точки M перегину графіка функції $f(x)$ називають точкою перегину функції $f(x)$. Точка x_0 розділяє інтервали опуклості функції.

3. Властивість графіків опуклих функцій



Якщо функція $f(x)$ ***опукла вниз*** на інтервалі $(a;b)$ і M_1 та M_2 — точки її графіка на цьому інтервалі, то на інтервалі $(x_1;x_2)$ графік функції $y=f(x)$ лежить нижче відрізка M_1M_2, тобто ***графік лежить нижче хорди***.



Якщо функція $f(x)$ ***опукла вгору*** на інтервалі $(a;b)$ і M_1 та M_2 — точки її графіка на цьому інтервалі, то на інтервалі $(x_1;x_2)$ графік функції $y=f(x)$ лежить вище відрізка M_1M_2, тобто ***графік лежить вище хорди***.

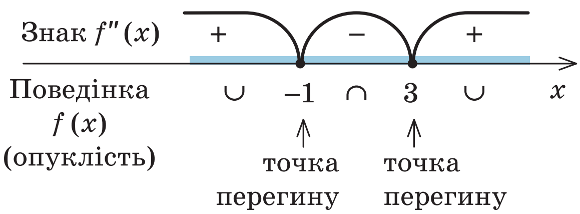
4. Достатні умови опуклості функції, що має другу похідну на заданому інтервалі $(a;\ b)$

Умова опуклості вниз	Умова опуклості вгору
Якщо на інтервалі $(a;b)$ двічі диференційовна функція $f(x)$ має додатну другу похідну ($f''(x)>0$ при всіх $x\in(a;b)$), то її ***графік на інтервалі*** $(a;b)$ ***напрямлений опуклістю вниз.***	Якщо на інтервалі $(a;b)$ двічі диференційовна функція $f(x)$ має від'ємну другу похідну ($f''(x)<0$ при всіх $x\in(a;b)$), то її ***графік на інтервалі*** $(a;b)$ ***напрямлений опуклістю вгору.***

5. Знаходження точок перегину функції, що має другу похідну на заданому інтервалі

Необхідна умова	Достатня умова
У точках перегину функції $f(x)$ **її друга похідна дорівнює нулю або не існує.**	Нехай функція $f(x)$ має на інтервалі $(a;b)$ другу похідну. Тоді **якщо** $f''(x)$ **змінює знак при переході через** x_0, **де** $x_0\in(a;b)$, **то** x_0 **— точка перегину функції** $f(x)$.
$\boxed{x_0 \text{ — точка перегину функції } f(x)} \Rightarrow \boxed{f''(x_0)=0 \text{ або функції } f''(x_0) \text{ не існує}}$	$\boxed{\text{У точці } x_0 \text{ знак } f''(x_0) \text{ змінюється з «+» на «−» або з «−» на «+»}} \Rightarrow \boxed{x_0 \text{ — точка перегину функції } f(x)}$

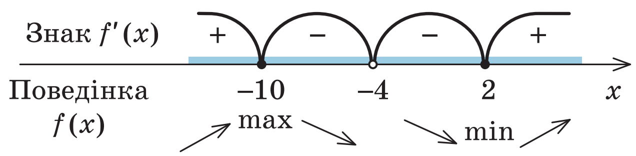
6. Дослідження функції $y=f(x)$ на опуклість і точки перегину

Схема	Приклад
1. Знайти область визначення функції.	Дослідіть функцію $f(x)=x^4-4x^3-18x^2+1$ на опуклість і точки перегину. ▶ 1. Область визначення: $D(f)=\boldsymbol{R}$. Функція $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення (як многочлен).
2. Знайти другу похідну.	2. $f'(x)=4x^3-12x^2-36x$. $f''(x)=12x^2-24x-36=12(x^2-2x-3)$.
3. Знайти внутрішні точки області визначення, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує*.	3. $f''(x)$ існує й неперервна на всій області визначення функції $f(x)$. $f''(x)=0$; $12(x^2-2x-3)=0$; $x_1=-1$, $x_2=3$.
4. Позначити одержані точки на області визначення функції, знайти знак другої похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.	4. 

* По аналогії з критичними точками (див. п. 34.1) внутрішні точки області визначення, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує, часто називають критичними точками другого роду, або критичними точками за другою похідною.

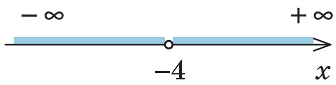
5. Записати результат дослідження (інтервали і характер опуклості і точки перегину).	5. На інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(3;+\infty)$ графік функції напрямлено опуклістю вниз $(f''(x)>0)$, а на інтервалі $(-1;3)$ — опуклістю вгору $(f''(x)<0)$. Точки перегину: $x=-1$ і $x=3$ (у цих точках $f''(x)$ змінює знак). ◁

7. Розширена схема дослідження функції для побудови її графіка

Схема	Приклад
1. Знайти область визначення функції.	Побудуйте графік функції $f(x)=\frac{x^2-5x}{x+4}$. 1. Область визначення: $x\neq-4$ $\left(D(f)=(-\infty;-4)\cup(-4;+\infty)\right)$.
2. З'ясувати, чи є функція парною або непарною, або періодичною.	2. Функція $f(x)$ ні парна, ні непарна, оскільки $f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq-f(x)$ та неперіодична.
3. Точки перетину графіка з осями координат (якщо їх можна знайти).	3. На осі Oy значення $x=0$, тоді $y=0$. На осі Ox значення $y=0$: $\frac{x^2-5x}{x+4}=0$, $x^2-5x=0$, $x(x-5)=0$. Тоді $x=0$, $x=5$ — абсциси точок перетину графіка з віссю Ox.
4. Похідна і критичні точки функції.	4. $f'(x)=\frac{(2x-5)(x+4)-(x^2-5x)}{(x+4)^2}=\frac{x^2+8x-20}{(x+4)^2}$. Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$. Отже, функція $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення. $f'(x)=0$. При $x\neq-4$ маємо $x^2+8x-20=0$; $x_1=2$, $x_2=-10$ — критичні точки.
5. Проміжки зростання і спадання та точки екстремуму (і значення функції в цих точках).	5. Позначимо критичні точки на області визначення і знайдемо знак похідної та характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.  Отже, функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty;-10]$ та $[2;+\infty)$ і спадає на проміжках $[-10;-4)$ та $(-4;2]$. Оскільки в критичній точці (–10) похідна змінює знак з «+» на «–», то $x=-10$ — точка максимуму, а в критичній точці 2 похідна змінює знак з «–» на «+», тому $x=2$ — точка мінімуму. Отже, $x_{max}=-10$, тоді $y_{max}=f(-10)=-25$; $x_{min}=2$, тоді $y_{min}=f(2)=-1$.

6. Поведінка функції на кінцях проміжків області визначення й асимптоти графіка функції (вертикальні, горизонтальні та похилі).

6.



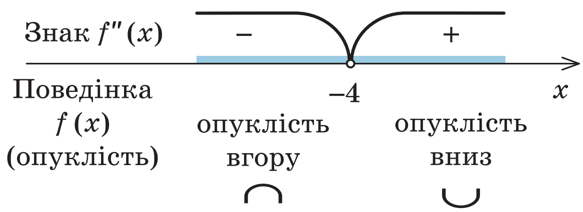
При $x \to -4$ зліва $f(x) \to \left(\frac{36}{-0}\right) \to -\infty$, а при $x \to -4$ справа $f(x) \to \left(\frac{36}{+0}\right) \to +\infty$ (тобто $\lim\limits_{x \to -4-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -4+0} f(x) = +\infty$).
Отже, пряма $x = -4$ — *вертикальна асимптота*.

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x+4} = \frac{x(x+4) - 9(x+4) + 36}{x+4} = x - 9 + \frac{36}{x+4}.$$

При $x \to \infty$ $\frac{36}{x+4} \to 0$, тоді $f(x) \to x - 9$,
тобто пряма $y = x - 9$ — *похила асимптота*.

7. Друга похідна й дослідження функції на опуклість і точки перегину (та значення функції в цих точках).

7. $f''(x) = (f'(x))' = \frac{(2x+8)(x+4)^2 - 2(x+4)(x^2+8x-20)}{(x+4)^4} = \frac{72}{(x+4)^3}$.
Оскільки $f''(x) \neq 0$, то знак другої похідної може змінитися лише в точці $x = -4$. Одержуємо такі знаки другої похідної та відповідний характер опуклості:



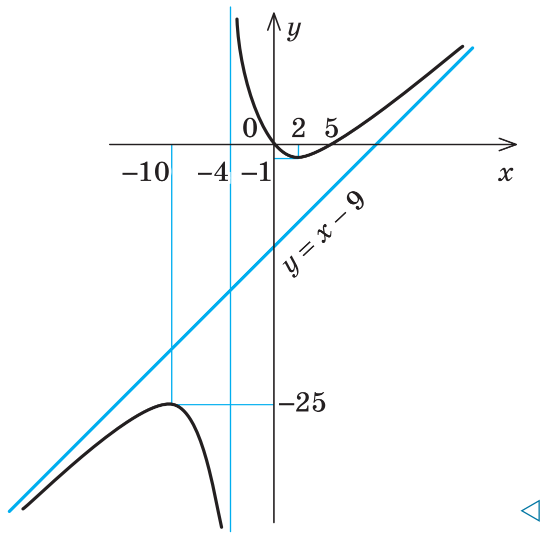
8. Знайти координати додаткових точок графіка функції (якщо необхідно уточнити його поведінку).

8.

x	-7	-2
y	-28	7

9. На підставі проведеного дослідження побудувати графік функції.

9.



ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Друга похідна й похідні вищих порядків

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ у всіх точках деякого проміжку, то цю похідну можна розглядати як функцію від аргумента x. Якщо функція $f'(x)$ є диференційовною, то її похідну називають другою похідною від $f(x)$ і позначають $f''(x)$ (або y'').

Наприклад, якщо $f(x) = 2x - \sin x$, то $f'(x) = (2x - \sin x)' = 2 - \cos x$, тоді

$$f''(x) = (2 - \cos x)' = \sin x.$$

По аналогії з другою похідною означають і похідні вищих порядків. Похідну від другої похідної функції $f(x)$ називають *третьою похідною*, або *похідною третього порядку* цієї функції і т. д., тобто *похідною n-го порядку функції $f(x)$ називають похідну від похідної $(n-1)$-го порядку цієї функції*. Похідну n-го порядку функції $f(x)$ позначають $f^{(n)}(x)$.

Наприклад, якщо $f(x) = x^5$, то*

$f'(x) = (x^5)' = 5x^4$; $f''(x) = (5x^4)' = 20x^3$;

$f'''(x) = (20x^3)' = 60x^2$; $f^{(4)}(x) = (60x^2)' = 120x$;

$f^{(5)}(x) = (120x)' = 120$; $f^{(6)}(x) = (120)' = 0$.

2 Опуклість функції

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a; b)$, а в точці $x_0 \in (a; b)$ має скінченну похідну. Тоді до графіка цієї функції в точці $M(x_0; f(x_0))$ можна провести дотичну. Залежно від розміщення графіка відносно дотичної функцію називають *опуклою вниз*, якщо графік розміщено вище дотичної (рис. 35.1) або *опуклою вгору*, якщо графік розміщено нижче дотичної (рис. 35.2). Відповідно і сам графік у першому випадку називають *опуклим униз*, а в другому — *опуклим угору*.

Наведемо відповідні означення та властивості для функції $f(x)$, визначеної і диференційовної двічі на інтервалі $(a; b)$.

Означення. **Функція $f(x)$ називається *опуклою вниз* на інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-якої точки x_0 із цього інтервалу при всіх $x \in (a; b)$ і $x \neq x_0$ графік функції лежить вище дотичної до цього графіка в точці $(x_0; f(x_0))$.**

Означення. **Функція $f(x)$ називається *опуклою вгору* на інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-якої точки x_0 із цього інтервалу при всіх $x \in (a; b)$ і $x \neq x_0$ графік функції лежить нижче дотичної до цього графіка в точці $(x_0; f(x_0))$.**

Зазначимо, що на інтервалі, де функція $f(x)$ опукла вниз, її похідна $f'(x)$ зростає. Дійсно, як видно з рис. 35.1, із зростанням аргумента x величина кута φ, що утворює дотична до графіка функції $f(x)$ із додатним напрямком осі Ox, зростає, набуваючи значень між $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$. Але тоді $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$ теж зростає.

На інтервалі, де функція $f(x)$ опукла вгору, її похідна $f'(x)$ спадає. Дійсно, як видно з рис. 35.2, зі зростанням аргумента x величина кута φ, що утворює дотична до графіка функції $f(x)$ із додатним напрямком осі Ox, спадає, набуваючи значень між $\frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2}$. Але тоді $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$ теж спадає.

Можна довести, що справедливі й обернені твердження.

1. *Якщо похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ зростає на інтервалі $(a; b)$, то функція $f(x)$ є опуклою вниз на цьому інтервалі.*

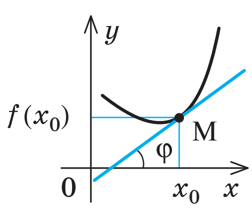


Рис. 35.1

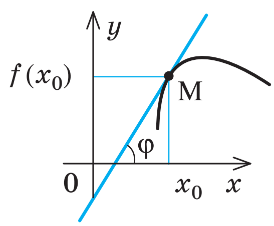


Рис. 35.2

* Четверту, п'яту й шосту похідні функції $f(x)$ часто позначають відповідно $f^{IV}(x)$, $f^{V}(x)$, $f^{VI}(x)$.

2. *Якщо похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ спадає на інтервалі $(a;b)$, то функція $f(x)$ є опуклою вгору на цьому інтервалі.*

Ці властивості дозволяють сформулювати *достатні умови опуклості функції (і графіка функції).*

1. ***Якщо на інтервалі $(a;b)$ двічі диференційовна функція $f(x)$ має додатну другу похідну ($f''(x)>0$ при всіх $x\in(a;b)$), то її графік на інтервалі $(a;b)$ напрямлений опуклістю вниз.***
2. ***Якщо на інтервалі $(a;b)$ двічі диференційовна функція $f(x)$ має від'ємну другу похідну ($f''(x)<0$ при всіх $x\in(a;b)$), то її графік на інтервалі $(a;b)$ напрямлений опуклістю вгору.***

Дійсно, нехай $f''(x)>0$ при всіх $x\in(a;b)$. Якщо розглядати $f'(x)$ як функцію від x, то $f''(x)$ є похідною цієї функції $\left(f''(x)=(f'(x))'\right)$. Але тоді, маючи додатну похідну, функція $f'(x)$ зростає на інтервалі $(a;b)$. Отже, за властивістю 1 функція $f(x)$ є опуклою вниз на цьому інтервалі, її графік відповідно опуклий униз на інтервалі $(a;b)$.

Аналогічно обґрунтовують і другу достатню умову.

Ці умови є тільки достатніми, але не є необхідними. Наприклад, функція $y=x^4$ є опуклою вниз на всій числовій прямій (рис. 35.3), хоча в точці $x=0$ її друга похідна $y''=12x^2$ дорівнює нулю.

У випадку, коли функція $f(x)$ *опукла вниз* на інтервалі $(a;b)$ і M_1 та M_2 — точки її графіка на цьому інтервалі (рис. 35.4), то на інтервалі $(x_1;x_2)$, де $a<x_1<x_2<b$, графік функції $y=f(x)$ лежить нижче відрізка M_1M_2. Цей відрізок по аналогії з відрізком, що сполучає дві точки дуги кола, часто називають хордою кривої. Отже, у цьому випадку на інтервалі $(x_1;x_2)$ *графік лежить нижче хорди*.

Якщо функція $f(x)$ *опукла вгору* на інтервалі $(a;b)$ і M_1 та M_2 — точки її графіка на цьому інтервалі (рис. 35.5), то на інтервалі $(x_1;x_2)$, де $a<x_1<x_2<b$, графік функції $y=f(x)$ лежить вище відрізка M_1M_2, тобто *графік лежить вище хорди*.

3 Точки перегину

Означення. Точку M графіка неперервної функції $f(x)$, у якій існує дотична і при переході через яку крива змінює напрям опуклості, називають *точкою перегину* графіка функції.

Ураховуючи означення опуклості функції вгору й опуклості функції вниз (п. 2 цього параграфа), одержуємо, що дотична розміщена вище від однієї частини графіка і нижче за іншу (рис. 35.6). Інакше кажучи, у точці перегину дотична перетинає криву, а сам графік функції переходить з одного боку дотичної на інший.

Абсцису x_0 точки перегину графіка функції $f(x)$ називають *точкою перегину функції*. Тоді x_0 є одночасно кінцем інтервалу опуклості вгору і кінцем інтервалу опуклості вниз функції $f(x)$.

Точки перегину двічі диференційовної функції можна знайти за допомогою її другої похідної. Наведемо *достатню умову існування точки перегину*.

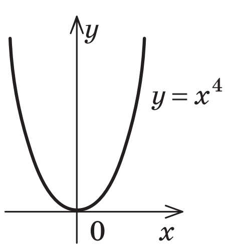


Рис. 35.3

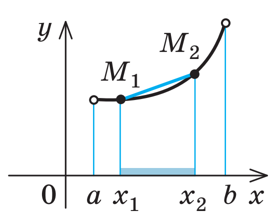


Рис. 35.4

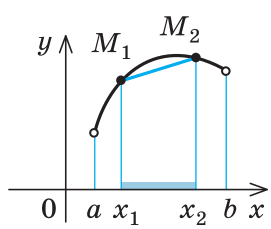


Рис. 35.5

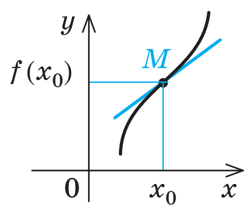


Рис. 35.6

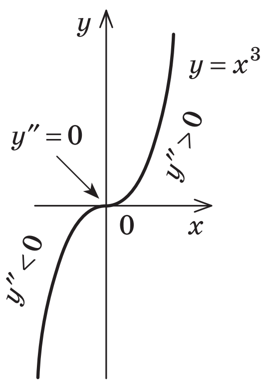
Нехай функція $f(x)$ має на інтервалі $(a;b)$ другу похідну. ***Якщо $f''(x)$ змінює знак при переході через x_0, де $x_0 \in (a;b)$, то x_0 — точка перегину функції $f(x)$.***

● Дійсно, якщо функція $f(x)$ має на інтервалі $(a;b)$ другу похідну, то вона має на цьому інтервалі й першу похідну. Отже, функція $f(x)$ є неперервною на заданому інтервалі та існує дотична до графіка функції в точці з абсцисою x_0. Нехай $f''(x)<0$ при $x<x_0$ і $f''(x)>0$ при $x>x_0$ (на заданому інтервалі). Тоді, використовуючи достатні умови опуклості функції, одержуємо, що при $x<x_0$ графік функції $f(x)$ напрямлений опуклістю вгору, а при $x>x_0$ — опуклістю вниз. Отже, точка x_0 є точкою перегину функції $f(x)$.

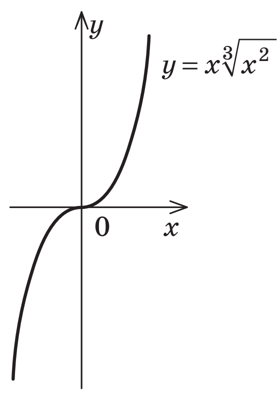
Аналогічно розглядається і випадок, коли $f''(x)>0$ при $x<x_0$ та $f''(x)<0$ при $x>x_0$: точка x_0 є також точкою перегину функції $f(x)$. ○

Для знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину потрібно враховувати таке.

● Нехай функція $f(x)$ задана на інтервалі $(a;b)$ і в кожній точці цього інтервалу має другу похідну $f''(x)$, яка є на ньому неперервною функцією. Якщо для точки x_0 із цього інтервалу $f''(x_0)>0$, то в деякому δ-околі цієї точки друга похідна теж буде додатною, тобто для всіх $x \in (x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ значення $f''(x)>0$. Але тоді в інтервалі $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ функція $f(x)$ напрямлена опуклістю вниз, і точка x_0 не може бути точкою перегину функції $f(x)$. Аналогічно, якщо $f''(x_0)<0$, то в деякому околі точки x_0 функція $f(x)$ напрямлена опуклістю вгору, і точка x_0 не може бути точкою перегину функції $f(x)$. Отже, точкою перегину може бути тільки така точка x_0, у якій друга похідна дорівнює нулю, з цього випливає *необхідна умова існування точок перегину*: ***якщо функція $f(x)$ задана на інтервалі $(a;b)$, у кожній точці цього інтервалу має другу похідну $f''(x)$, яка є неперервною функцією на заданому інтервалі, і має точку перегину x_0, то $f''(x_0)=0$.*** ○



◆ Рис. 35.7



◆ Рис. 35.8

Наприклад, функція $y=x^3$ (рис. 35.7) має перегин у точці 0, у якій її друга похідна дорівнює нулю. Дійсно, $y'=3x^2$, $y''=6x$, $y''(0)=0$. При $x>0$ значення $y''(x)>0$ і графік напрямлений опуклістю вниз; а при $x<0$ значення $y''(x)<0$ і графік напрямлений опуклістю вгору. Отже, $x=0$ — точка перегину функції.

Точка перегину функції $f(x)$ може бути і в тій точці x_0, у якій $f''(x_0)$ не існує (але $f'(x_0)$ існує).

Наприклад, функція $y=x\sqrt[3]{x^2}$, означена на всій числовій прямій (рис. 35.8), має перегин у точці 0, у якій існує її перша похідна $y'=\left(\sqrt[3]{x^5}\right)'=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$ $(y'(0)=0)$, але не існує друга похідна $y''=\frac{5}{3}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=$ $=\frac{5}{3}\cdot\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$ ($y''(0)$ не існує).

При $x>0$ значення $y''(x)>0$ і графік напрямлений опуклістю вниз, а при $x<0$ значення $y''(x)<0$ і графік напрямлений опуклістю вгору. Отже, 0 — точка перегину функції.

Щоб знайти проміжки опуклості функції $f(x)$, потрібно розв'язати нерівності $f''(x)>0$ і $f''(x)<0$ на області визначення функції $f(x)$. Оскільки $f''(x)$ теж є функцією від змінної x, то у випадку, коли функція $f''(x)$ є неперервною в кожній точці своєї області визначення, для розв'язування цих нерівностей можна використати метод інтервалів, точніше, його узагальнення, що спирається на властивість: точки, *у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує, розбивають область визначення функції* $f(x)$ *на проміжки, у кожному з яких* $f''(x)$ *зберігає сталий знак.*

Ураховуючи цю властивість і умови опуклості функції та існування її точок перегину, одержуємо схему дослідження функції $f(x)$ на опуклість і точки перегину, наведену в п. 6 табл. 50.

Застосування цієї схеми також показано в п. 6 табл. 50. Використання другої похідної дозволяє детальніше дослідити властивості функції для побудови її графіка. У табл. 50 наведено розширену схему (порівняно зі схемою в табл. 48) дослідження функції та приклад її використання. До схеми додатково включено знаходження інтервалів опуклості функції, точок перегину й асимптот графіка функції (див. також § 30 та інтернет-підтримку підручника).

Запитання

1. Використовуючи графік, поясніть, яку функцію називають опуклою вгору, яку — опуклою вниз.
2. Сформулюйте достатні умови опуклості вгору та опуклості вниз функції, що має другу похідну на заданому інтервалі. Наведіть приклади.
3. Дайте означення точки перегину функції. Сформулюйте необхідну і достатню умови існування точок перегину функції, що має другу похідну на заданому інтервалі.
4. Охарактеризуйте розширену схему дослідження функції для побудови її графіка.

Вправи

35.1. Знайдіть другу похідну заданої функції:

1) $f(x)=x^3-3x^2+5$; 3) $f(x)=x\cos x$;

2) $f(x)=\operatorname{tg}2x$; 4) $f(x)=x^2\sin x$.

35.2. Знайдіть інтервали опуклості вгору й опуклості вниз і точки перегину функції:

1) $f(x)=x^4-6x^2+1$; 3) $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$;

2) $f(x)=\cos 2x$ при $-\pi<x<\pi$; 4) $y=\frac{x+2}{\sqrt{x}}$.

35.3. Дослідіть функцію за розширеною схемою та побудуйте її графік:

1) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$; 4) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$; 7) $y=\frac{x}{x^2+4}$.

2) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; 5) $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$;

3) $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$; 6) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$;

Виявіть свою компетентність

35.4. Перевірте правильність виконання завдання 35.3, побудувавши відповідні графіки за допомогою комп'ютерних програм.

§36 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ ТА ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

36.1. Застосування похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей

У § 4 було розглянуто використання властивостей функцій для розв'язування деяких рівнянь. Іноді для з'ясування потрібних властивостей функцій доцільно використати похідну. Це перш за все дослідження проміжків зростання і спадання функції та оцінка області значень функції (відповідні прийоми такого дослідження подано в табл. 51).

Таблиця 51

1. Оцінка значень лівої і правої частин рівняння

Орієнтир

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x)=g(x) \\ \hline f(x)\geqslant a \\ g(x)\leqslant a \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a \end{cases}}$$

Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x)=g(x)$ і з'ясувалося, що $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то рівність між лівою і правою частинами рівняння можлива тоді й тільки тоді, коли одночасно $f(x)$ і $g(x)$ дорівнюють a.

Приклад

▶ Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6.$$

Оцінимо значення лівої і правої частин рівняння: $g(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2\geqslant 2$, $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$. Дослідимо функцію $f(x)$ на найбільше і найменше значення за допомогою похідної.

$$D(f):\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ 3-x\geqslant 0, \end{cases} \text{ тобто } 1\leqslant x\leqslant 3.$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}.$$

Похідна не існує в точках 1 і 3 з області визначення функції $f(x)$, але ці точки не є внутрішніми для $D(f)$, отже, вони не є критичними.

$$f'(x)=0,\quad \frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}=0,$$

$$\sqrt{3-x}=\sqrt{x-1},\quad 3-x=x-1,$$

$x=2$ — критична точка $(f'(2)=0)$.

Неперервна функція* $f(x)$ задана на відрізку $[1;3]$, тому вона набуває найбільшого та найменшого значень або на кінцях відрізка, або в критичній точці з цього відрізка. Оскільки $f(1)=f(3)=\sqrt{2}$, а $f(2)=2$, то $\max\limits_{[1;3]} f(x)=f(2)=2$, тобто** $f(x)\leqslant 2$. Крім того, $g(x)\geqslant 2$, отже, задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=2, \\ (x-2)^2+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

Відповідь: 2. ◁

---

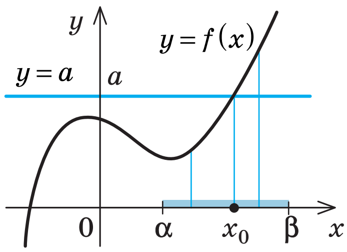
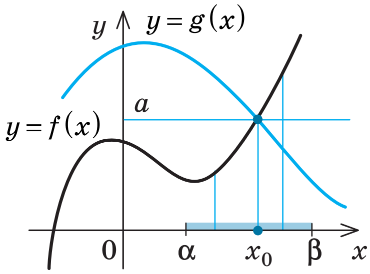
* Звичайно, у точці $x=1$ функція $f(x)$ неперервна справа, а в точці $x=3$ — зліва.

** Ми могли б виконати точнішу оцінку області значень неперервної функції $f(x)$: оскільки $\min\limits_{[1;3]} f(x)=f(1)=f(3)=\sqrt{2}$, то $\sqrt{2}\leqslant f(x)\leqslant 2$, але для наведеного розв'язання достатньо оцінки $f(x)\leqslant 2$.

2. Використання зростання і спадання функцій

Схема розв'язування рівняння

1. *Підбираємо один або декілька коренів рівняння.*
2. *Доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння, або оцінку значень лівої та правої частин рівняння, або таку властивість функцій: зростаюча або спадна функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення).*

Теореми про корені рівняння	Приклад
1. Якщо в рівнянні $f(x)=a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку. 	1. ▶ Рівняння $2x+\cos x=\pi$ має корінь* $x=\frac{\pi}{2}$ $\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=\pi\right.$, тобто $\left.\pi=\pi\right)$. Інших коренів це рівняння не має, оскільки функція $f(x)=2x+\cos x$ зростаюча (її похідна $f'(x)=2-\sin x>0$ при всіх значеннях x з області визначення: $D(f)=\boldsymbol{R}$). *Відповідь*: $\frac{\pi}{2}$. ◁
2. Якщо функція $f(x)$ у рівнянні $f(x)=g(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає (або навпаки), то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку. 	2. ▶ Рівняння $3x^2-\frac{1}{x}=\frac{4}{\sqrt{x}+1}$ має корінь $x=1$ $\left(3-1=\frac{4}{\sqrt{x}+1}\right.$, тобто $\left.2=2\right)$. Інших коренів це рівняння не має, оскільки його ОДЗ $x>0$ і на цій ОДЗ функція $f(x)=3x^2-\frac{1}{x}$ зростаюча $\left(f'(x)=6x+\frac{1}{x^2}>0\right.$ при $\left.x>0\right)$, а функція $g(x)=\frac{4}{\sqrt{x}+1}$ спадна при $x>0$ $\left(g'(x)=\frac{-\frac{4}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}<0\right.$ при $\left.x>0\right)$. *Відповідь*: 1. ◁

* Корені рівнянь у прикладах 1 і 2 одержано підбиранням. Як правило, підбір починають із цілих значень: $x=0$, ±1, ±2, ..., які підставляють у задане рівняння, а для тригонометричних рівнянь перевіряють також «табличні» значення $x=0$, $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3}$, $\pm\frac{\pi}{2}$, ...

36.2. Застосування похідної до доведення нерівностей

Похідну інколи вдається використати при доведенні нерівностей від однієї змінної.

Наведемо орієнтовну *схему доведення нерівностей виду* $\varphi(x) > g(x)$ (або $\varphi(x) < g(x)$) *за допомогою похідної.*

1. *Розглянути допоміжну функцію* $f(x) = \varphi(x) - g(x)$ *(на її області визначення або на заданому проміжку).*
2. *Дослідити за допомогою похідної поведінку функції* $f(x)$ (зростання чи спадання або її найбільше чи найменше значення) *на розглянутому проміжку.*
3. *Обґрунтувати* (спираючись на поведінку функції $f(x)$), *що* $f(x) > 0$ (*або* $f(x) < 0$) *на розглянутому проміжку, і зробити висновок, що* $\varphi(x) > g(x)$ (*або* $\varphi(x) < g(x)$) *на цьому проміжку.*

Зауважимо, що при доведенні деяких нерівностей цю схему доводиться використовувати декілька разів, а іноді зручно використати другу похідну й опуклість відповідної функції (див. приклади в інтернет-підтримці підручника).

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад Доведіть нерівність $x^2 + 3 \geqslant 4\sqrt{x}$ при $x \geqslant 1$.

Розв'язання

▶ Для доведення даної нерівності достатньо довести нерівність $x^2 + 3 - 4\sqrt{x} \geqslant 0$ при $x \geqslant 1$. Розглянемо функцію $f(x) = x^2 + 3 - 4\sqrt{x}$ при $x \geqslant 1$ (її область визначення $x \geqslant 0$ містить заданий проміжок).

Похідна $f'(x) = 2x - \dfrac{4}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2x\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} = \dfrac{2\left(\sqrt{x^3} - 1\right)}{\sqrt{x}} > 0$ при $x > 1$. Отже, функція $f(x)$ зростає на інтервалі $(1; +\infty)$, а враховуючи неперервність функції $f(x)$ у точці 1 (вона неперервна і на всій області визначення), одержуємо, що функція $f(x)$ зростає і на проміжку $[1; +\infty)$. Але $f(1) = 0$. Тоді при $x \geqslant 1$ значення $f(x) \geqslant f(1) = 0$. Отже, $x^2 + 3 - 4\sqrt{x} \geqslant 0$, тобто $x^2 + 3 \geqslant 4\sqrt{x}$ при $x \geqslant 1$, що й потрібно було довести. (Зазначимо, що при $x > 1$ значення $f(x) > f(1) = 0$, а при $x = 1$ задана нерівність перетворюється на рівність.) ◁

Докладно ознайомитись із застосуванням похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей, а також доведення нерівностей можна в інтернет-підтримці підручника.

Запитання

1. Поясніть, у яких випадках вдається розв'язати рівняння за допомогою оцінки значень його лівої і правої частин. Наведіть приклад.
2. Поясніть, як можна використати зростання і спадання функцій для розв'язування рівнянь. Наведіть приклади.

Вправи

У завданнях 36.1–36.7 розв'яжіть рівняння.

36.1. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$; 2) $\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}=x^2-10x+29$.

36.2. 1) $x+\frac{1}{x}=2\sin\frac{\pi x}{2}$; 2) $\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}=2\cos\frac{x}{3}$; 3) $\sqrt{2x}+\frac{4}{\sqrt{2x}}=1+3\sin\frac{\pi x}{4}$.

36.3. 1) $x^5-x^3+2x-28=0$; 2) $5x-3\cos x=3$; 3) $2x^3-3x^2+\sqrt{x-1}=5$.

36.4. 1) $\sin 5x-2\cos x-8x=x^5-2$; 2) $4\cos 3x+5\sin\frac{x}{2}+15x=4-x^3$.

36.5. 1) $x^6-63x+62=0$; 2) $x^6-364x+363=0$; 3) $x^6+63x+62=0$.

36.6. 1) $x^7-21x^2-64x+84=0$; 2) $x^7+21x^2-64x-84=0$; 3) $x^9-170x^2-x+170=0$.

36.7. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}4x-\sin x=4y-\sin y,\\ 3x^2-y=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x-2y=\sin x-\sin y,\\ x+2y=9.\end{cases}$

У завданнях 36.8–36.9 розв'яжіть нерівність.

36.8. 1) $x^7-x^4+3x>-5$; 2) $2x^9-x^5+x>2$; 3) $\sqrt{x-1}+x^2-2x>17$.

36.9. 1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\geqslant\frac{9}{2}-\frac{\arccos\left(\frac{x}{3}\right)}{\pi}$;

2) $\sqrt{x-2}+\sqrt{20-x}\geqslant 7-\frac{\arccos\left(-\frac{x}{11}\right)}{\pi}$.

У завданнях 36.10–36.13 доведіть нерівність.

36.10. 1) $x^5-2x^3+2x>20$: при $x>2$; 2) $a^3+4>a^2+3a$ при $a\geqslant 0$; 3) $2x+\frac{1}{x^2}>5$ при $0<x<\frac{1}{2}$.

36.11. 1) $\sqrt{x}+\frac{9}{\sqrt{x}}\geqslant 6$ при $x>0$; 2) $2\sqrt{x}+\frac{1}{x}\geqslant 3$ при $x>0$.

36.12. 1) $\operatorname{tg} x>x$ при $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$ при $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

36.13. 1) $a^3+4>a^2+3a$ при $a\geqslant 0$; 2) $a^3+3a^2+10>13a$ при $a\geqslant 0$.

§37 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ ІЗ ПАРАМЕТРАМИ

При розв'язуванні завдань із параметрами можна використовувати похідну для дослідження функцій на монотонність і екстремуми та для дослідження функції та побудови її графіка, для запису рівнянь дотичних до графіків функцій, для знаходження найбільшого і найменшого значень функції. Слід також пам'ятати ті орієнтири, які використовувалися для розв'язування завдань із параметрами в § 9, 15, 27. Зокрема, *якщо в завданні з параметрами йдеться про кількість розв'язків рівняння (нерівності або системи), то для аналізу заданої ситуації зручно використати графічну ілюстрацію розв'язування* (див. відповідні приклади до цього параграфа в інтернет-підтримці підручника).

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $y=(a+2)x^3-3ax^2+9ax-2$ спадає для всіх $x\in \boldsymbol{R}$.

Розв'язання

▶ Область визначення функції $D(y)=\boldsymbol{R}$. Функція диференційовна на всій числовій прямій: $y'=3(a+2)x^2-6ax+9a$.

Задана функція буде спадати для всіх $x\in\boldsymbol{R}$, якщо $y'\leqslant 0$ на всій числовій прямій (причому рівняння $y'=0$ має тільки скінченну множину коренів).

Якщо $a=-2$, то $y'=12x-18$ і нерівність $y'\leqslant 0$ не виконується на всій числовій прямій ($12x-18\leqslant 0$ тільки при $x\leqslant 1{,}5$).

Якщо $a\neq -2$, то похідна є квадратичною функцією відносно змінної x, яка набуває значень $y'\leqslant 0$ на всій числовій прямій тоді й тільки тоді (таблиця в коментарі), коли виконуються умови $\begin{cases} a+2<0,\\ D\leqslant 0\end{cases}$ (1)

(при цьому рівняння $y'=0$ може мати хіба що один корінь).

З нерівності $a+2<0$ одержуємо $a<-2$.

З нерівності $D\leqslant 0$ маємо:

$$36a^2-4\cdot 3(a+2)\cdot 9a\leqslant 0,$$
$$36a(a-3a-6)\leqslant 0,$$
$$36a(-2a-6)\leqslant 0,$$
$$-72a(a+3)\leqslant 0. \qquad (2)$$

Ураховуючи одержану умову $a<-2$, отримуємо, що $(-72a)>0$. Тоді з нерівності (2) маємо $a+3\leqslant 0$, тобто $a\leqslant -3$. Отже, система (1) рівносильна системі $\begin{cases} a<-2,\\ a\leqslant -3.\end{cases}$ Звідси одержуємо $a\leqslant -3$.

Відповідь: $(-\infty;-3]$. ◁

Коментар

Використаємо уточнений варіант умови спадання функції (п. 34.1).

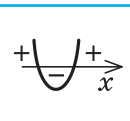
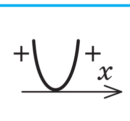
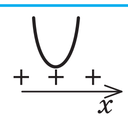
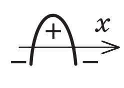
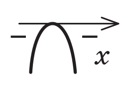
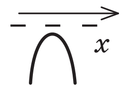
Якщо $f'(x)\leqslant 0$ *у кожній точці інтервалу* $(a;b)$ (*причому рівняння* $f'(x)=0$ *має лише скінченну множину коренів*), *то функція* $f(x)$ *спадає на цьому інтервалі*.

Ця умова є не тільки достатньою, а й необхідною для диференційовної на інтервалі функції (*якщо на якомусь інтервалі функція* $f(x)$ *диференційовна і спадає, то* $f'(x)\leqslant 0$ *на цьому інтервалі* — див. п. 34.1). Отже, умову задачі можуть задовольняти ті й тільки ті значення параметра, які ми знайдемо за цією умовою.

Аналізуючи похідну заданої функції, ураховуємо, що вона є квадратичною функцією тільки у випадку, коли $a+2\neq 0$ (тобто $a\neq -2$).

Тому випадок $a+2=0$ (тобто $a=-2$) слід розглянути окремо.

Для квадратичної функції згадуємо всі можливі варіанти розміщення параболи відносно осі абсцис (див. таблицю нижче) і з'ясовуємо, коли нерівність $y'\leqslant 0$ виконується для всіх $x\in\boldsymbol{R}$.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a+2>0$			
$a+2<0$			

Зауважимо, що нерівність $D \leqslant 0$ (при $a \neq -2$), яка звелася до нерівності (2), можна було розв'язати окремо методом інтервалів або за допомогою графіка квадратичної функції (виключаючи точку з абсцисою $a=-2$), а вже потім знайти спільний розв'язок системи (1).

Вправи

37.1. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $y=\frac{a^2-1}{3}x^3-(a-1)x^2+2x+1$ зростає для всіх $x \in \boldsymbol{R}$.

37.2. При якому значенні a пряма $16x+y-13=0$ є дотичною до графіка функції $y=\frac{a+x^2}{x^2}$?

37.3. Знайдіть найбільше значення k, при якому графік функції $y=x^2+2(k+1)x+2k^2+k-1$ дотикається до осі абсцис.

37.4. Знаючи, що рівняння $x^3+2=ax$ при $x>0$ має тільки один корінь, знайдіть цей корінь і відповідне значення a.

37.5. Графік функції $y=-x^3+ax^2+bx+c$ перетинає вісь Ox у точці з абсцисою $x=-2$ і дотикається до осі Ox у точці з абсцисою $x=7$. Знайдіть точки локального мінімуму цієї функції.

37.6. Знайдіть значення a і b, при яких пряма $y=7x-2$ дотикається до графіка функції $y=ax^2+bx+1$ у точці $A(1;5)$.

37.7. Знайдіть значення a, при якому дотична до параболи $y=2x^2+3x+5$ у точці $x_0=-2$ є дотичною до параболи $y=-x^2+4x+a$.

37.8. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\frac{3-x^2}{a-2-3x-x^2}$ не є спадною ні на якому відрізку, що належить її області визначення.

37.9. При яких значеннях параметра a рівняння $x^3+\frac{48}{x}=a$ має хоча б один корінь?

37.10. Знайдіть усі значення a, при яких рівняння $4\sin^3 x=a+7\cos 2x$ не має коренів.

37.11. Знайдіть усі значення a, при яких рівняння $3\cos 2x+\frac{2a}{\sin x}=-17$ має хоча б один корінь.

37.12. Знайдіть усі значення a, при яких рівняння $7-2\cos x=a\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)$ має хоча б один корінь.

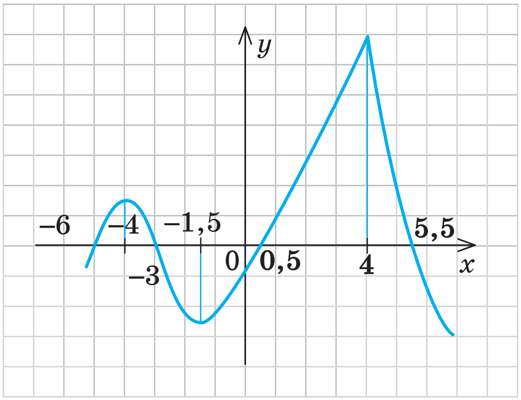
37.13. Сторони трикутника лежать на осях координат і на дотичній до графіка функції $y=x^2+4x+4$ в точці, абсциса a якої задовольняє умову $1 \leqslant a \leqslant 0$. Знайдіть значення a, при якому площа трикутника буде найбільшою.

Додаткові завдання до теми «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» наведено на сайті interactive.ranok.com.ua.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 5

1. Функція $y = f(x)$ задана графіком (див. рисунок).



Укажіть усі точки, в яких похідна функції $y = f(x)$ дорівнює нулю.

А – 4; –1,5; 4 **Б** –4; –1,5 **В** 4 **Г** –5; –3; 0,5; 5,5

2. Знайдіть похідну функції $y = x^3 + \cos x$.

А $3x^2 + \sin x$ **Б** $3x^2 + \cos x$ **В** $3x^2 - \cos x$ **Г** $3x^2 - \sin x$

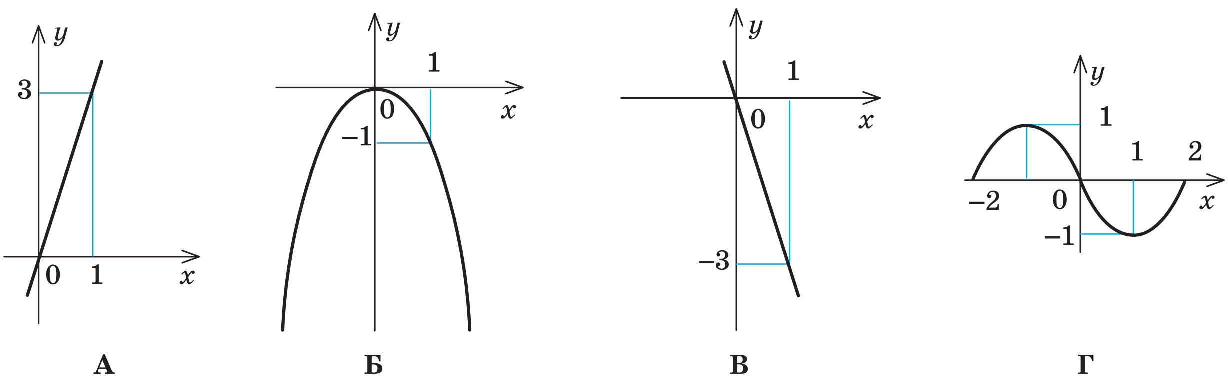
3. Обчисліть значення похідної функції $f(x) = \sqrt{2x+1}$ в точці $x_0 = 12$.

А 0,2 **Б** 0,1 **В** 5 **Г** 0,05

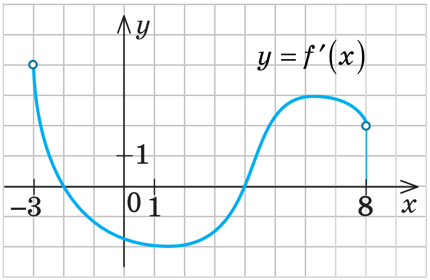
4. Знайдіть миттєву швидкість (у м/с) руху точки в момент часу $t = 1$ с, якщо точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^2 + 2t + 3$ (s вимірюється в метрах).

А 6 **Б** 7 **В** 4 **Г** 3

5. Серед наведених нижче графіків функцій, які визначені й диференційовні на множині всіх дійсних чисел, укажіть ту функцію, яка на всій області визначення має від'ємну похідну.

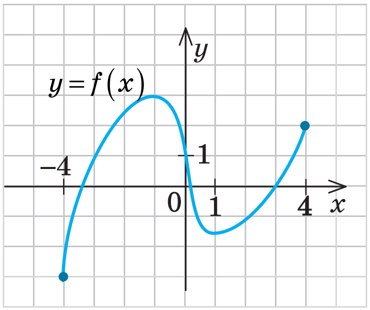


6. На рисунку зображено графік похідної функції $f(x)$, визначеної на інтервалі $(-3;8)$. У якій точці цього інтервалу функція $f(x)$ набуває найменшого значення?



А 1,5 **Б** −2 **В** 4 **Г** 6

7. На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$, визначеної на проміжку $[-4;4]$. Установіть відповідність між властивостями (1–3) функції та їх числовими значеннями (А–Г).



1 Точка локального мінімуму функції
2 Локальний максимум функції
3 Найбільше значення функції на проміжку $[0;4]$

А 1
Б 2
В 3
Г 4

8. Укажіть проміжки, на яких функція $y=-x^3+6x^2+7$ спадає.

А $(-\infty;+\infty)$ **В** $(-\infty;-4]$ і $[-4;+\infty)$

Б $(-\infty;0]$ і $[4;+\infty)$ **Г** $[0;4]$

9. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y=x^4-2x^2+7$ на проміжку $[-2;0]$ (запишіть розв'язання).

10. 1) Дослідіть функцію $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$ на монотонність і екстремуми та побудуйте її графік (запишіть розв'язання).

2) Дослідіть, скільки коренів має рівняння $\frac{1}{3}x^3-x=a$ залежно від значення параметра a (запишіть розв'язання).

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua.

Теми навчальних проектів

1. Використання похідної та нерівностей під час розв'язування економічних задач.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

Розділ 1

§ 1. **1.1.16.** 34. **1.2.5.** 1) $-1\frac{2}{3}$; 1; 2) -1; 2; 3) 0; ± 2; 4; 4) $-5,5$; $-0,5$; $\pm 2,5$. **1.2.6.** 1) $[3;4]$; 2) $(-\infty;-4)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; 3) $(-\infty;-0,5]\cup[1,5;+\infty)$; 4) $(-5,5;-3,5)\cup(0;2)$.

§ 2. **2.1.1.** 1) 2,5; -2; $3\frac{1}{3}$; $a+\frac{1}{a}$; 2) -3; -2; 1; b^2-3; 3) 1; 2; 0; $\sqrt{m+1}$. **2.1.2.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[-3;+\infty)$; 3) $x\neq -1$; 4) $\boldsymbol{R}$; 5) $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; 6) $\boldsymbol{R}$; 7) $[1;5]$; 8) $[-3;0)\cup(0;+\infty)$; 9) $[-3;3)\cup(3;+\infty)$; 10) $(-\infty;-1)\cup(-1;0]\cup[1;+\infty)$; 11) $[0;2)\cup(2;+\infty)$; 12) $\boldsymbol{R}$. **2.1.3.** а) $D(f)=[-3;5]$; $E(f)=[-3;2]$; зростає: $[-2;3]$; спадає: $[-3;-2]$ і $[3;5]$; $f(1)=0$; б) $D(f)=[0;6]$; $E(f)=[0;4]$; зростає: $[0;2]$ і $[5;6]$; спадає: $[2;5]$; $f(1)=2$. **2.1.4.** 1) $\{5\}$; 2) $\boldsymbol{R}$; 3) $[0;+\infty)$; 4) $[0;+\infty)$; 5) $\boldsymbol{R}$; 6) $[-5;+\infty)$. **2.1.10.** 1) Зростаюча; 2) спадна; 3) зростаюча; 4) спадна. **2.1.11.** 2) 4. **2.3.1.** 1) $y=\frac{1}{3}x+2$, $D=\boldsymbol{R}$, $E=\boldsymbol{R}$; 2) $y=-\frac{1}{3}x-2$, $D=\boldsymbol{R}$, $E=\boldsymbol{R}$; 3) $y=\frac{2}{x}$, D: $x\neq 0$, E: $y\neq 0$; 4) $y=-\frac{1}{x}$, D: $x\neq 0$, E: $y\neq 0$; 5) $y=x^2$, $D=[0;+\infty)$, $E=[0;+\infty)$. **2.3.3.** 1) $y=2\sqrt{x}$, 2) $y=-2\sqrt{x}$, 3) $y=\sqrt{x}+2$, 4) $y=-\sqrt{x+2}$.

§ 3. **3.1.** 1) Є наслідком, рівносильні; 2) є наслідком, нерівносильні. **3.6.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) ні. **3.7.** 1) $3\frac{2}{3}$; 2) -4; 3) -4; 4) -3; $\frac{2}{3}$. **3.8.** 1) Коренів немає; 2) 2; 3) $-\sqrt{2}$; 4) коренів немає. **3.9.** 1) $x\neq 1,5$ (умова для коренів); 2) $x\geqslant 0$. **3.11.** 1) $(-\infty;-2]\cup(-1;2]\cup(4;+\infty)$; 2) $(-\infty;-2)\cup(3;8)$; 3) $(4;5]$; 4) $[-10;-2)\cup(4;+\infty)$. **3.12.** 1) $[-2;-1]\cup[1;2]$; 2) $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$; 3) $(-\infty;-3]\cup(0;3]$; 4) $(-6;2)$. **3.13.** 1) $(-2;2)\cup[4;+\infty)$; 2) $(-2;-1)$ або 1; 3) $(-\infty;0)\cup[2;3]$; 4) $(-\infty;-1)\cup[4;+\infty)$.

§ 4. **4.1.** 1) 2; 2) 3; 3) $(1;0)$. **4.2.** 1) 0; 2) 0; 3) -1; 4) 0,5. **4.3.** 1) 3; 2) $(-2;5)$; 3) $(3;1)$; 4) коренів немає; 5) $(2;1)$; 6) $(-1;2;-3)$. **4.4.** 1) 6; 2) 1; 3) 0; 4) 6; 5) 2; 6) 1. **4.5.** 1) $(-5;-5)$; $(2;2)$; 2) $(-2;-2)$; 3) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 4) $(-2;-2)$.

§ 7. **7.1.1.** 1) $a=4$, $b=5$, $c=0$, $d=1$; 2) $a=2$, $b=0$, $c=1$, $d=2$. **7.1.2.** $a=0$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{2}$. **7.1.5.** $a=1$, $b=2$. **7.1.6.** $a=\frac{6}{11}$, $b=-\frac{10}{11}$. **7.2.1.** 1) $3x^2+x+4$; 2) $x^8-x^6+x^4-x^2+1$; 3) x^3-2x^2+4x-2. **7.2.2.** 1) $Q(x)=4x^2-6x-1$, $R(x)=12x+3$; 2) $Q(x)=x^3+2x^2+5x+10$, $R(x)=20x+21$. **7.2.3.** 1) $a=-18$, $b=-35$; 2) $a=-8$, $b=20$; 3) $a=-1$, $b=-2$. **7.2.4.** 1) $Q(x)=x+6$, $R(x)=12x+12$; 2) $Q(x)=x$, $R(x)=-20x-30$. **7.3.1.** 1) -101. **7.3.2.** $a=-3$. **7.3.3.** $x+3$. **7.3.4.** $a=-1$, $b=1$. **7.3.5.** 8; $5\frac{2}{3}$. **7.3.7.** $-2x^3+8x^2+14x-20$. **7.3.8.** $a=-2$. **7.3.9.** 3. **7.3.10.** $2x^3-10x^2+6x+18$. **7.3.11.** $a=3$, $b=9$. **7.3.12.** $x^2+5x+1=0$. **7.3.13.** $x^2-5x+2=0$. **7.3.14.** $x^2-30x+9=0$.

§ 8. **8.1.** 1) $-\frac{2}{3}$; 4; 2) 0,5; 3,5; 3) -1; 2; 3; 6. **8.2.** 1) $(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$; 2) $(-0,8;\ 2)$; 3) $(-3;-1)\cup\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$; 4) $\left(-2;2\frac{2}{3}\right)$. **8.3.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) -1; -3. **8.4.** 1) $[1;3]$; 2) -8; 12; 3) $[-5;8]$. **8.5.** 1) Розв'язків немає; 2) $[2+\infty)$; 3) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup(8;+\infty)$. **8.6.** 1) $[1;2]$; 2) $-2\frac{1}{3}$; 3. **8.7.** 1) -3; 5; 2) $[-1;4]$. **8.8.** 1) $-\frac{2}{3}$; 0,5; 2; 2) $-2-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$. **8.9.** 1) 0; ± 2; 4; 2) -2; 1; 3; 6. **8.10.** 1) $(-1;5)$; 2) $\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{41}}{2}\right)\cup(-1;2)\cup\left(\frac{1+\sqrt{41}}{2};+\infty\right)$. **8.11.** 1) $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$; 2) $[1;3]$. **8.12.** 1) $(-5;-2)\cup(-1;+\infty)$; 2) $(-\infty;-5)\cup(-3;3)\cup(5;+\infty)$. **8.13.** 1) $[-6;-2]\cup[4;8]$; 2) $(-\infty;-8)\cup(2;+\infty)$. **8.14.** 1) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$; 2) $(-\infty;-5]\cup[4;+\infty)$.

8.15. 1) $\left[-3-\sqrt{5};-4\right)\cup(-2;0]$; 2) $\left[-1-2\sqrt{2};-3\right)\cup(1;3]$.

§ 9. 9.1. 3) При $a<0$ розв'язків немає, при $a\geqslant 0$ x — будь-яке дійсне число. **9.2.** 2) При $a<-2$ або $a>2$ розв'язків немає, при $a=-2$ будь-яке $x\in[-2;0]$, при $a=2$ будь-яке $x\in[0;2]$; при $-2<a<2$ $x_1=\frac{a}{2}-1$, $x_2=\frac{a}{2}+1$. **9.4.** 1) $a=0$, $a=2$, $a=4$. **9.5.** 1) $a=0$; 2) $a=0$, $a=1$. **9.7.** $a=1$, $a=-1$. **9.8.** $a<-1$. **9.9.** $k=-3$. **9.10.** $2<m<5$.

Тест № 1. **1.** А. **2.** Б. **3.** В. **4.** Б. **5.** В. **6.** В. **7.** В. **8.** Г. **10.** При $a=2$ розв'язків немає; при $a<2$ $x\in(1;\ 2-0{,}5a)$; при $a>2$ $x\in(2-0{,}5a;\ 1)$.

Розділ 2

§ 10. 10.2. 1) −2; 2) 0,5; 3) −1; 4) 2; 5) 5; 6) 3. **10.3.** 1) 20; 2) 10; 3) 6; 4) $3\sqrt[5]{16}$. **10.4.** 1) 3; 2) 10; 3) −2; 4) 5. **10.5.** 1) −2; 2) 3; 3) −5; 4) 2. **10.6.** 1) 77; 2) 6; 3) 15; 4) 5. **10.7.** 1) 108; 2) 200; 3) 0,9; 4) $1\frac{1}{3}$. **10.9.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[3;+\infty)$; 3) $[-2;+\infty)$; 4) $(0;+\infty)$. **10.10.** 1) $\frac{3\sqrt[7]{64}}{2}$; 2) $\frac{2(\sqrt{7}+1)}{3}$; 3) $\frac{1}{6}$ при $a=9$; $\frac{\sqrt{a}-3}{a-9}$ при $0\leqslant a\leqslant 9$ або $a>9$; вираз невизначений при $a<0$; 4) $\frac{1}{3}$ при $x=1$; $\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ при $x\neq 1$. **10.11.** 1) $a^2b\sqrt[5]{ab^2}$; 2) $ab^3\sqrt[4]{a^3b}$; 3) $-3ab^4\sqrt[3]{a^2b^2}$; 4) $2ab^2\sqrt[6]{2a^3b^5}$. **10.12.** 1) $|ab^3|\sqrt{|b|}$; 2) $ab\sqrt[7]{a^2b}$; 3) $2a^2b\sqrt[6]{b}$; 4) $a^2|b|\sqrt[8]{ab}$. **10.13.** 1) $\sqrt[3]{7a^3}$; 2) $-\sqrt[4]{ab^5}$; 3) $\sqrt[7]{5a^7b^7}$; 4) $\sqrt[6]{a^7b}$. **10.14.** 1) $\sqrt[4]{7a^4}$ при $a\geqslant 0$; $-\sqrt[4]{7a^4}$ при $a<0$; 2) $\sqrt[7]{a^{22}b}$; 3) $\sqrt[6]{2ab^7}$; 4) $\sqrt[8]{-3b^{11}}$. **10.15.** 1) $-a$; 2) a; 3) 0; 4) 0. **10.16.** 1) $2|a|b^2\sqrt[4]{2}$; 2) ab^2c; 3) $\sqrt[20]{|a|^{17}}$; 4) $\sqrt[60]{2}\cdot\sqrt[12]{3}\cdot\sqrt[30]{|a|^{11}}$. **10.17.** 1) $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$; 2) $\sqrt[4]{y}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{b}\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)}{\sqrt{a}}$; 4) $-\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$ при $x\geqslant 0$, $y>0$; $\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$ при $x\leqslant 0$, $y<0$. **10.18.** 1) $\sqrt[3]{7}$; 2) $\pm\sqrt[6]{3}$; 3) $-\sqrt[5]{5}$; 4) коренів немає; 5) ±2; 6) −4.

§ 11. 11.1. 1) 3; 2) коренів немає; 3) −26; 4) 0; 5) 45. **11.2.** 1) 8; 2) 2. **11.3.** 1) 2; 2) 10; 3) 4; 4) 7. **11.4.** 1) 3; 2) −5; 3) −11; 4) −8; 5. **11.5.** 1) 1; 2) 3; 3) 0; 4) $\pm\sqrt{2}$. **11.6.** 1) 1; 2; 10; 2) −1. **11.7.** 1) (8; 0); 2) (4; 1); 3) (4; 1); 4) (16; 1). **11.8.** 1) (27; 1), (1; 27); 2) розв'язків немає; 3) $\left(-\frac{5}{7};-\frac{3}{7}\right)$; 4) (0,5; 1,5). **11. 9.** 1) $\frac{13-\sqrt{61}}{2}$; 2) −3; 1; 3) 4; 4) 4. **11.10.** 1) 1; 2) $[5;8]$. **11.11.** 1) $1\frac{2}{7}$; 2) $2-2\sqrt{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

§ 12. 12.1.1. 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{1}{9}}$; 3) $\sqrt[4]{5}$; 4) $\sqrt[7]{\frac{1}{64}}$; 5) $\sqrt{8}$; 6) $\sqrt[3]{\frac{1}{49}}$. **12.1.2.** 1) $3^{\frac{5}{6}}$; 2) $4^{\frac{1}{5}}$; 3) $7^{-\frac{9}{2}}$; 4) $a^{-\frac{2}{9}}$; 5) $(2b)^{\frac{1}{4}}$; 6) $|c|^{\frac{4}{11}}$. **12.1.3.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. **12.1.4.** 1) $[0;+\infty)$; 2) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; 3) $(1;+\infty)$; 4) $[-3;+\infty)$; 5) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$; 6) $\boldsymbol{R}$. **12.1.5.** 1) 9; 2) $\frac{3}{8}$; 3) 32; 4) $\frac{9}{625}$; 5) 8,2; 6) 3,25. **12.1.7.** 1) $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}+5}$; 3) $\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}-d^{\frac{1}{2}}}$; 4) $m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}$. **12.1.8.** 1) 1; 2) 128; 3) $4\sqrt{2}$; 4) $\pm 4\sqrt{2}$. **12.2.1.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; 3) $[1;+\infty)$; 4) $(0;+\infty)$; 5) $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$; 6) $\boldsymbol{R}$.

§ 13. 13.1. 1) $(-\infty;-3]$; 2) $(-\infty;0]\cup\left[3;3\frac{4}{7}\right)$. **13.2.** 1) $\left(-\infty;-\frac{5}{6}\right]\cup[3;+\infty)$ 2) $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$. **13.3.** 1) $\{-2\}\cup[-1;3]$; 2) $\{-3\}\cup(-0{,}5;1]$. **13.4.** 1) $[2;+\infty)$; 2) $[10;+\infty)$. **13.5.** 1) $\left[3-2\sqrt{2};9\right)$; 2) $[0;4)\cup(9;+\infty)$. **13.6.** 1) $(-\infty;-3]\cup(0;+\infty)$; 2) $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$. **13.7.** 1) $[2;5{,}2]$; 2) $[1;5)\cup(10;+\infty)$. **13.8.** 1) Розв'язків немає; 2) 2; 3. *Вказівка*. Знайдіть ОДЗ нерівності.

§ 14. 14.1. 1) При $a\in\boldsymbol{R}$ $x=a+4$; 2) при $a\geqslant 0$ $x=a^2-2a$; при $a<0$ коренів немає; 3) при $m\leqslant 0$ або $m>3$ коренів немає; при $0<m\leqslant 3$ $x=\frac{m^4-6m^2+81}{4m^2}$; 4) при $a=0$ $x=0$; при $a\geqslant 1$ $x=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$; при $a<0$ або $0<a<1$ коренів немає. **14.2.** 1) При $a\leqslant 1$ $x=a$; при $1<a<2$ $x\in[1;a]$; при $a=2$ $x\in[1;2)$; при $a>2$ $x=a$ або $x\in[1;2)$; 2) при $a<0$ розв'язків немає; при $a=0$ $x\in(0;+\infty)$; при $a>0$ $x\in\left[-\frac{4}{3}a;-a\right)\cup(0;+\infty)$; 3) при $a\leqslant -4$ розв'язків немає; при $-4<a\leqslant 0$ $x\in\left(2-\sqrt{4+a};2+\sqrt{4+a}\right)$; при $a>0$ $x\in\left[-\frac{a}{4};2+\sqrt{4+a}\right)$; 4) при $a\leqslant -\frac{1}{2}$ $x\in\left[a;\frac{-3+\sqrt{-7-16a}}{8}\right]$; при $-\frac{1}{2}<a<-\frac{7}{16}$

$x \in \left[\frac{-3-\sqrt{-7-16a}}{8}; \frac{-3+\sqrt{-7-16a}}{8}\right]$; при $a=-\frac{7}{16}$ $x=-\frac{3}{8}$; при $a>-\frac{7}{16}$ розв'язків немає; 5) при $a<-2$ або $a>2$ $x \in \left(\frac{2-\sqrt{2a^2-4}}{2}; |a|\right)$; при $-2 \leqslant a < -\sqrt{2}$ або $\sqrt{2} < a \leqslant 2$ $x \in \left(\frac{2-\sqrt{2a^2-4}}{2}; \frac{2+\sqrt{2a^2-4}}{2}\right)$; при $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$ розв'язків немає. **14.3.** $a \leqslant 5{,}125$. **14.4.** $a<0$, $a=\sqrt{2}$. **14.5.** $a \leqslant 1$. **14.6.** 1) При $a \leqslant 1$ один розв'язок; при $a>1$ розв'язків немає.

Тест № 2. **1.** Б. **2.** Г. **3.** Б. **4.** Б. **5.** Г. **6.** В. **7.** При $a<2$ або $a>2\sqrt{2}$ коренів немає; при $a=2\sqrt{2}$ $x=3$, при $2 \leqslant a < 2\sqrt{2}$ $x_1 = 3-\frac{a\sqrt{8-a^2}}{2}$, $x_2 = 3+\frac{a\sqrt{8-a^2}}{2}$.

Розділ 3

§ 15. 15.3. 1) $\frac{5\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{5}$; 3) $\frac{5\pi}{9}$; 4) $-\frac{4\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{8}$; 6) $-\frac{5\pi}{6}$. **15.4.** 1) 540°; 2) 135°; 3) −72°; 4) 210°; 5) −10°; 6) 330°; 7) −22,5°; 8) $\frac{540°}{\pi}$. **15.7.** −150°; $-\frac{5\pi}{6}$ рад. **15.8.** 600°; $\frac{10\pi}{3}$ рад.

§ 16. 16.1. 3) III; 4) III; 5) III; 6) IV.

§ 17. 17.1. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) 1; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) −1; 8) $\sqrt{3}$. **17.2.** 2) $T=\pi$; 4) $T=\frac{\pi}{3}$; 5) T — будь-яке дійсне число, крім 0. Найменшого додатного періоду не існує. **17.3.** 1) π; 2) $\frac{\pi}{5}$; 3) 6π; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) 5π.

§ 18. 18.5. 1) $\sin 3{,}9$, $\sin 3{,}3$, $\sin 1{,}2$; 2) $\cos 1{,}9$, $\cos 1{,}2$, $\cos 0{,}3$; 3) $\operatorname{tg}(-1{,}3)$, $\operatorname{tg} 0{,}7$, $\operatorname{tg} 1{,}5$; 4) $\operatorname{ctg} 2{,}9$, $\operatorname{ctg} 1{,}1$, $\operatorname{ctg} 0{,}5$.

§ 19. 19.1. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) так. **19.2.** 1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}4$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$; 2) $\sin\alpha = 0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$, $\operatorname{ctg}\alpha = -1\frac{1}{3}$; 3) $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$; 4) $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -5$. **19.3.** 1) 0; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 1; 4) $-\cos^2\alpha$; 5) 1; 6) 0; 7) $\sin\alpha$; 8) 1; 9) $\frac{2}{3}$; 10) $-2\operatorname{tg}\alpha$. **19.4.** 1) $-\frac{3}{8}$. 2) а) 2; б) 2.

§ 20. 20.1.1. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 9) 1; 10) $\sqrt{3}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **20.1.2.** 1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\sin\alpha$; 4) $\cos\beta$; 5) $\operatorname{ctg} 3\alpha$; 6) $\operatorname{tg} 6\alpha$; 7) $\operatorname{tg} 7\alpha$; 8) $\operatorname{tg} 5\alpha$; 9) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$; 10) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.
20.1.3. 1) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; 5) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; 6) $-2-\sqrt{3}$. **20.2.1.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $1\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $\frac{1}{2}$. **20.2.4.** 1) $\sin\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $2\sin\alpha$; 4) $\frac{1}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$.
20.2.5. 1) $-\frac{24}{25}$; 2) $-\frac{7}{25}$; 3) $3\frac{3}{7}$; 4) $\frac{7}{24}$.
20.2.6. 1) $\frac{120}{169}$; 2) $-\frac{119}{169}$; 3) $-1\frac{1}{119}$; 4) $-\frac{119}{120}$.
20.2.7. 1) $\frac{24}{25}$; 2) $\frac{7}{25}$; 3) $3\frac{3}{7}$; 4) $\frac{7}{24}$.
20.2.8. −0,8. **20.2.9.** −1,125; 0. **20.3.1.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) −1; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 8) 1. **20.3.2.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **20.3.3.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $-\cos^2\alpha$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha$; 5) 1.
20.4.1. 1) 0; 2) $-\sin 18°$; 3) $\sqrt{2}\sin 25°$; 4) $\operatorname{tg} 20° \operatorname{ctg} 5°$; 5) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$; 6) $4\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$; 7) $4\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$.
20.4.3. 1) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}\left(\cos 10° - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{10}\right)$. **20.4.4.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$.

§ 21. 21.1. 1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; 3) $\sqrt{2}-1$. **21.2.** 1) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{2}{3}$. **21.3.** $3+2\sqrt{2}$. **21.4.** $-\frac{2}{\sqrt{13}}$.
21.5. 0,6. **21.6.** $-\frac{1}{3}$. **21.7.** 2. **21.8.** $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Вказівка. Якщо $\alpha=18°$, то $36°=2\alpha$ і $54°=3\alpha$ (де $\sin\alpha>0$).

Тест № 3. **1.** В. **2.** В. **3.** 1 — В, 2 — Г, 3 — А. **4.** В. **5.** В. **6.** Б. **7.** В. **8.** 1 — Г, 2 — В, 3 — Б.

Розділ 4

§ 22. **22.1.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{2}$; 6) $-\frac{\pi}{4}$. **22.2.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$.
22.3. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) π; 6) $\frac{3\pi}{4}$.
22.4. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$. **22.5.** 1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{3}{4}$. **22.6.** 1) 7; 2) 3; 3) $\frac{3}{\sqrt{10}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **22.7.** 1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. **22.8.** 1) $\sqrt{7}$; 2) 1,5; 3) $\frac{1}{\sqrt{26}}$; 4) $\frac{3}{5}$.
22.9. 1) $\frac{\pi}{7}$; 2) $7-2\pi$; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) $8-2\pi$; 5) $\frac{\pi}{5}$; 6) $4-\pi$; 7) $\frac{\pi}{9}$; 8) $10-3\pi$.

§ 23. **23.1.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) коренів немає; 3) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.2.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) коренів немає. **23.3.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.4.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.5.** 1) $(-1)^{n+1}\arcsin 0{,}6+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\arccos 0{,}3+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-\mathrm{arctg}\,3{,}5+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\mathrm{arcctg}\,2{,}5+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
23.6. 1) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{4}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,3+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
23.7. 1) $(-1)^n\pi+4\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{15\pi}{4}+10\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2}+3\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{7\pi}{4}+7\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
23.8. 1) $(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm2\pi+6\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^n\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.9.** 1) $(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{4}+3\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.10.** 1) $\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $4\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+3\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.11.** 1) $-\frac{5\pi}{12}-\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pi-2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-8\pi n$; $-\frac{4\pi}{3}-8\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.12.** 1) $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{17\pi}{12}$; $\frac{19\pi}{12}$; 2) $\pm\frac{\pi}{18}$; $\pm\frac{11\pi}{18}$; $\pm\frac{13\pi}{18}$; 3) $-\frac{5\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{16}$; $\frac{7\pi}{16}$; $\frac{11\pi}{16}$; $\frac{15\pi}{16}$. **23.13.** 1) $-\frac{17\pi}{18}$; $-\frac{13\pi}{18}$; $-\frac{5\pi}{18}$; $-\frac{\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{18}$; $\frac{19\pi}{18}$; 2) 0; $\pm2\pi$; 4π; 3) 0; 2π; 4π; 4) $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{19\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{4}$.
23.14. 1) При $a<-\frac{1}{2}$ або $a>\frac{1}{2}$ коренів немає; при $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ $x=(-1)^n\arcsin(2a)+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) при $a\neq0$ коренів немає; при $a=0$ $x=2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $x=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(3a)+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $x=\frac{1}{3}\mathrm{arcctg}(2a)+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 5) при $a=0$ x — будь-яке число; при $a<-1$ або $a>1$ коренів немає; при $-1\leqslant a<0$ або $0<a\leqslant1$ $x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 6) при $a=0$ x — будь-яке число; при $a<-3$, або $-1<a<0$, або $a>0$ коренів немає; при $-3\leqslant a\leqslant-1$ $x=\pm\arccos(a+2)+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

§ 24. **24.1.** 1) $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{(-1)^{n+1}}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\pi+4\pi n$, $(-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **24.2.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\pi+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\pi+6\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
24.3. 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $(-1)^n\arcsin\frac{1}{5}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **24.4.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{2}\mathrm{arcctg}\,5+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-\mathrm{arctg}\,2+\pi n$; $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$;

4) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $2\operatorname{arcctg}\frac{5}{7}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

24.5. 1) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{4}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **24.6.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}2+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

24.7. 1) $\pi+2\pi n$; $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{5}{13}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^n\arcsin\frac{3}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

24.8. 1) $2\pi n$; $\pi+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $4\pi n$; $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **24.9.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}2+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{-7\pm\sqrt{53}}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

24.10. 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **24.11.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

24.12. 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) πn; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

24.13. 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\operatorname{arctg}2+\pi n$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **24.14.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. **24.15.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. **24.16.** 1) $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **24.17.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **24.18.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}2+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$; $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}4+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. **24.19.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-2\operatorname{arctg}2+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) πn; $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

24.20. 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\pi+2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$.

§ 25. **25.1.1.** 1) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}-2\pi n\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}-2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi(1-n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi(1-n)\right)$, $n\in\mathbf{Z}$.

25.1.2. 1) $\left(\pi n;\frac{\pi}{4}-\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;-\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\left(2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **25.1.3.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\left(\pi+2\pi n;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\pi+2\pi k\right)$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$. **25.1.4.** 1) $\left((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n;\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi n\right)$, $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n;\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$.

25.1.5. 1) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(k+n);\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(k+n);-\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi(n+k);\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+\pi(n+k);-\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$.

25.1.6. 1) $\left(\frac{5\pi}{12}+\pi(k+n);\frac{\pi}{12}+\pi(k-n)\right)$, $\left(\frac{\pi}{12}+\pi(k+n);\frac{5\pi}{12}+\pi(k-n)\right)$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{12}+\pi(n+k);-\frac{\pi}{12}+\pi(n-k)\right)$, $\left(\frac{5\pi}{12}+\pi(n+k);-\frac{5\pi}{12}+\pi(n-k)\right)$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$.

25.1.7. 1) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n-\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$.

25.1.8. 1) $\left(2\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$.

25.2.1. 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
25.2.2. 1) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) коренів немає; 3) $3+4n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) 1; 5) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
25.2.3. 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{11}+\pi n$, k, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, k, $n\in\boldsymbol{Z}$.
25.2.4. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $(0{,}5;\pi+4\pi n)$; $(-0{,}5;\pi-4\pi n)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **25.2.5.** 1) 1; 2) $-0{,}25$; 3) 1; 4) 1; 5) 0,125; 6) 0; ±1. **25.2.6.** 1) -2; 2) 7; 3) 0; 4) $\pm0{,}5$; 1. **25.2.7.** 1) 0; $\pm\frac{4\pi}{3}$; $\pm\frac{8\pi}{5}$; 2) $-\frac{10\pi}{3}$; -2π; $-\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{6+\sqrt{2}}{4}$; 4) 1,75.
25.2.8. 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) коренів немає. **25.2.9.** 1) 0; 2) 1; 3) $\pm\sqrt{2}$; 4) 0. **25.2.10.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi(2k-n);\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+\pi(2k+n);-\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, k, $n\in\boldsymbol{Z}$;
2) $\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(4k+n);\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$, k, $n\in\boldsymbol{Z}$;
3) $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$; $\left((-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n;\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, k, $n\in\boldsymbol{Z}$;
4) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, k, $n\in\boldsymbol{Z}$;
5) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, k, $n\in\boldsymbol{Z}$; 6) $(\pi n;\pi k)$; $(-0{,}5\arccos(-0{,}75)+\pi n;-0{,}5\arccos(-0{,}75)+\pi k)$, $(0{,}5\arccos(-0{,}75)+\pi n;0{,}5\arccos(-0{,}75)+\pi k)$, $(-0{,}5\arccos 0{,}25+\pi n;-0{,}5\arccos 0{,}25+\pi k)$, $(0{,}5\arccos 0{,}25+\pi n;0{,}5\arccos 0{,}25+\pi k)$, k, $n\in\boldsymbol{Z}$. *Вказівка*. Подати систему у вигляді $\begin{cases}4\sin(3x+2y)=-\sin x,\\ \sin y=-4\sin(2x+3y)\end{cases}$ і перемножити відповідно праві й ліві частини одержаних рівнянь. Врахувати, що при таких перетвореннях можлива поява сторонніх розв'язків системи. Розв'язуючи проміжне рівняння $4\sin 5x+\sin x=0$, зручно скористатися тим, що $\sin 5x=\sin(x+4x)$.

§ 26. 26.1. 1) При $-1<a<1$ коренів немає; при $a\leqslant-1$ або $a\geqslant1$ $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{a}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) при $-0{,}5\leqslant a\leqslant0{,}5$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; при $a<-0{,}5$ або $a>0{,}5$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2a}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) при $a=0$ або $a<-1$, або $a>1$ $x=\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; при $-1\leqslant a<0$ або $0<a\leqslant1$ $x=\pi n$, $x=\pm\arccos a+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) при $-1<a<1$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; при $a\leqslant-1$ або $a\geqslant1$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{a}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
26.2. 1) При $a<-0{,}5$ або $a>4$ коренів немає; при $a=-0{,}5$ $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; при $-0{,}5<a\leqslant0$ $x=(-1)^n\arcsin\frac{1\pm\sqrt{2a+1}}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; при $0<a\leqslant4$ $x=(-1)^n\arcsin\frac{1-\sqrt{2a+1}}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$;
2) при $a<-1{,}25$ або $a\geqslant5$ $x=\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; при $a=-1{,}25$ $x=\pm\arccos 0{,}25+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; при $-1{,}25<a<1$ $x=\pi n$; $x=\pm\arccos\frac{1\pm\sqrt{4a+5}}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; при $1\leqslant a<5$ $x=\pi n$, $x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{4a+5}}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$;
3) при $b=0$ рівняння не визначене; при $b\neq0$ і $a=0$ $x\neq\frac{\pi k}{b}$, $x\in\boldsymbol{R}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; при $b\neq0$ і $a\neq0$ $x=\frac{\pi n}{a}$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $n\neq\frac{ak}{b}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 4) при $a=-1$ або $2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$ $x=2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; при $a<-1$ або $-1<a\leqslant2-2\sqrt{2}$, або $a\geqslant2+2\sqrt{2}$ $x=2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2+a}{a\sqrt{2}}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
26.3. 1) $-2\sqrt{5}\leqslant a\leqslant2\sqrt{5}$; 2) $-5\leqslant b\leqslant5$; 3) $a\in\boldsymbol{R}$; 4) $a\in\boldsymbol{R}$; 5) $\frac{4-\pi}{2}\leqslant a\leqslant\frac{4+\pi}{2}$.
26.4. $3-\frac{1}{\sqrt{2}}<a<3+\frac{1}{\sqrt{2}}$. **26.5.** $(0;1)$; $(1;1)$.
26.6. $\left[-\frac{3+\sqrt{3}}{3};-\frac{1}{3}\right]$. **26.7.** 1) $a<-2$; $a>2$; $a=-1$; 2) $a<0$; $a>4$; $a=1$; 3) $a=2$.

26.8. 1) При $a \neq 0$ розв'язків немає, при $a = 0$ $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, k, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) при $a < 0$ система не означена, при $a > 0$ розв'язків немає, при $a = 0$ $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $\left(\pi+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, k, $n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 27. **27.1.** 1) $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) розв'язків немає; 4) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.2. 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\boldsymbol{R}$; 4) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.3. 1) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left[\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.4. 1) $\left(\pi n; \frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left[\frac{3\pi}{4}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.5. 1) $\left(\frac{\pi}{8}+\pi n; \frac{3\pi}{8}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}+6\pi n; \frac{11\pi}{2}+6\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{5}+\frac{\pi n}{5}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.6. 1) $\left[\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left[-\frac{9\pi}{2}+6\pi n; 6\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(-\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{2}; \frac{5\pi}{48}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.7. 1) $\left(-\frac{2\pi}{9}-\frac{2\pi n}{3}; -\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left[-\frac{7\pi}{60}+\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{60}+\frac{\pi n}{5}\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(-\frac{3\pi}{2}+2\pi n; 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.8. 1) $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{4}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.9. 1) $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.10. 1) $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n; \pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{3\pi}{8}+\pi n; \frac{\pi}{8}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.11. 1) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.12. 1) $\left(\pi n; \frac{\pi}{8}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{3\pi}{8}+\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8}+\pi n; \frac{2\pi}{3}+\pi n\right) \cup \left(\frac{7\pi}{8}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.13. 1) $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.14. 1) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; -\frac{2\pi}{7}+2\pi n\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{7}+2\pi n; 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{4\pi}{7}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{4\pi}{7}+2\pi n; \frac{6\pi}{7}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{6\pi}{7}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.15. $\left(-\frac{7\pi}{12}; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{12}\right)$.

27.16. $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$. **27.17.** 1) При $a \leqslant -2$ $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \pi+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-2 < a < -\sqrt{2}$ $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right) \cup \left(\pi+2\pi n; 2\pi-\arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a = -\sqrt{2}$ $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\pi+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

при $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$ $x\in\left(2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\arccos\frac{a}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(2\pi-\arccos\frac{a}{2}+2\pi n;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$;
при $a=\sqrt{2}$ $x\in\left(2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$;
при $\sqrt{2}<a<2$ $x\in\left(2\pi n;\arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi m;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;2\pi-\arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; при $a\geqslant 2$
$x\in\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;2\pi+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **27.18.** 1) $\left[-1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
2) $(0{,}5;1]$, 3) $[-1;\sin 0{,}5)\cup(\sin 1;1]$;
4) $[-1;\cos 2)$. **27.19.** 1) $\left(\frac{17\pi}{36}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\frac{53\pi}{36}+2\pi n;\frac{35\pi}{18}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$;
3) $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; 4) $(0;1)$.

Тест № 4. **1.** Г. **2.** Б. **3.** Б. **4.** 1 — В, 2 — Б, 3 — А. **5.** В. **6.** $\pi+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
7. При $a<-3$ або $a>5$ коренів немає, при $-3\leqslant a\leqslant 5$ $x=(-1)^n\arcsin\left(\sqrt{4+a}-2\right)+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Розділ 5

§ 28. **28.2.** 1) -3; 2) 9; 3) 0; 4) 1.
28.3. 1) 11; 2) 1; 3) $\frac{1}{6}$; 4) -8. **28.4.** 1) $[2;3]$;
2) $(-1;0{,}5)$; 3) $[3;4)$; 4) $[1;3]\cup(4;+\infty)$.
28.5. 1) $(2;5]$; 2) $[0{,}5;1)\cup(1;+\infty)$;
3) $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup[-1;1]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$ або $x=1{,}5$;
4) $(4;28]$.

§ 29. **29.4.** 1) -3; 2) ± 2; 3) 2; 4) -3; 1.
29.5. 1) -3; 2) 25; 3) $-\frac{5}{6}$; 4) 14; 5) 5; 6) -3;
7) 0,25; 8) $2\sqrt{2}$; 9) 3; 10) 2; 11) 0; 12) $-1\frac{5}{7}$;
13) $\frac{a}{b}$; 14) 1; 15) 1,25; 16) $4\frac{2}{3}$; 17) $\frac{13}{14}$.
29.6. 1) 2; 2) ∞; 3) 3; 4) -4; 5) 0; 6) -1.

§ 30. **30.1.** 1) $x=0$, $y=0$; 2) $x=3$, $y=4$;
3) асимптот немає; 4) $x=1$, $y=1$.
30.2. 1) $x=0$, $y=2x$; 2) $x=3$, $y=x+3$;
3) $x=-2$, $y=x-2$; 4) $y=x$. **30.3.** 1) $x=0$, $y=0$; 2) $y=0$; 3) $x=0$, $y=3$; 4) $y=1$.
30.4. 1) $x=-1$, $y=1$, $y=-1$; 2) $x=3$, $y=x+3$; 3) $y=0$; 4) $x=-1$, $y=x$.

§ 31. **31.1.** 1) 6; 2) 7; 3) 5. **31.2.** 1) $3\Delta x$;
2) $3x_0\Delta x(x_0+\Delta x)+(\Delta x)^3$; 3) $\Delta x(2x_0+\Delta x-1)$;
4) $\Delta x+\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}$. **31.5.** а) $f'(x_1)=\sqrt{3}$;
$f'(x_2)=1$; б) $f'(x_1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $f'(x_2)=0$;
в) $f'(x_1)=0$; $f'(x_2)=0$; г) $f'(x_1)=0$;
$f'(x_2)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **31.6.** 1) 6; 2) 1; 3) -1; 4) 1.
31.7. 1) $y=2x-1$; 2) $y=0$; 3) $y=x-0{,}25$;
4) $y=-6x-9$. **31.8.** 1) $y=0{,}5x+0{,}5$;
2) $y=x+0{,}25$; 3) $y=0{,}25x+3$; 4) $y=\frac{1}{6}x+1\frac{1}{2}$.
31.9. 1) 1; 2) 13; 3) 75; 4) 0,25.

§ 32. **32.1.** 1) $8x^7$; 2) $-5x^{-6}$; 3) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$;
4) $20x^{19}$; 5) $-20x^{-21}$; 6) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. **32.2.** 1) 1;
2) $5x^4-1$; 3) $-\frac{1}{x^2}-3x^2$; 4) $2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
32.3. 1) $6x^2+3$; 2) $2x+5$; 3) $4x^3-4x$;
4) $\frac{1}{\sqrt{x}}+12x^2$. **32.4.** 1) $6x^2+6x^5$;
2) $-6x^2+2x+2$; 3) $-4x^3+6x^2-3$; 4) $\frac{15x^2-3x}{2\sqrt{x}}$.
32.5. 1) $\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}$; 2) $-\frac{7}{(3x-2)^2}$; 3) $-\frac{11}{(5x+1)^2}$;
4) $\frac{2x^2-2x}{x^4}$. **32.6.** 1) $f'(-2)=-2$; $f'\left(\frac{1}{2}\right)=3$;
2) $f'(2)=28$; $f'(-1)=-8$; 3) $f'(0)=-\frac{5}{9}$;
$f'(-3)=-\frac{5}{81}$; 4) $f'\left(-\sqrt{2}\right)=1{,}5$; $f'(0{,}1)=101$.
32.7. 1) 1; 2) -2; 0; 3) $\pm 0{,}5$; 4) 0,25.
32.8. 1) $(1;+\infty)$; 2) $(-2;0)$; 3) $(-2;0)\cup(0;2)$;
4) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **32.9.** 1) $f(u)=\sqrt{u}$;
$u(x)=\sin x$; 2) $f(u)=u^5$; $u(x)=2x+x^2$;
3) $f(u)=\sqrt{u}$; $u(x)=x^3-x$; 4) $f(u)=\cos u$;
$u(x)=2x-\frac{\pi}{4}$. **32.10.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[-3;+\infty)$;
3) $(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$; 4) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$;
5) $[2\pi k;\pi+2\pi k]$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 6) $(0;0{,}5]$.
32.11. 1) $3(x^2-x)^2(2x-1)$; 2) $-10(2x-1)^{-6}$;
3) $\frac{5-2x}{2\sqrt{5x-x^2}}$; 4) $\frac{3}{4\sqrt{3x}\left(2+\sqrt{3x}\right)}-\frac{4}{(2x-1)^3}$.
32.12. 1) $y=7x-4$; 2) $y=26x+54$;
3) $y=-0{,}5x+1{,}5$; 4) $y=7x+6$.

§ 33. **33.1.** 1) $-\sin x$; 2) $2\cos x-3$; 3) $\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}$; 4) $3x^2+\frac{1}{\sin^2 x}$.
33.2. 1) $\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}$; 2) $\operatorname{ctg} x-\frac{1}{\sin^2 x}$; 3) $\sin x\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$; 4) $-\cos x\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.
33.3. 1) $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$; 2) $\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}$; 3) $\sin 2x$; 4) $-\sin 2x$. **33.4.** 1) $\cos x$; 2) $-6\sin 6x$; 3) $2\cos 2x$; 4) $-4\sin 4x$; **33.5.** 1) $\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$; 2) $-2x\sin x^2$; 3) $-\sin x\cos(\cos x)$; 4) $\frac{3}{\cos^2 6x\sqrt{\operatorname{tg} 6x}}$. **33.6.** 1) $5x^4+4\cos 4x$; 3) $-2\cos 2x$; 4) $\frac{12\operatorname{tg}^2 4x}{\cos^2 4x}$. **33.7.** 1) $\frac{x-\sin 2x}{x^3\cos^2 x}$; 2) $\sin 2x$; 4) $\frac{1+\cos x}{2\sqrt{x+\sin x}}$. **33.8.** 1) 0; 2) 2; 3) -1; 4) -8. **33.9.** 1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) -5.
33.10. 1) Немає; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi k}{4}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.
33.11. 1) 0; 4; 2) 0; 3; 3) 1; 4) 2.
33.12. 1) $(-2;2)$; 2) $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$; 3) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $(0;4)$.
33.13. 1) а) 1; 3; б) $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$; в) $(1;3)$; 2) а) 1; 3; б) $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$; в) $(1;3)$; 3) а) 1; б) $(1;+\infty)$; в) $(0;1)$; 4) а) 0; б) $(0;4)$; в) $(-4;0)$.
33.14. 1) $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}$; 2) $y=4x+1-\frac{\pi}{2}$; 3) $y=3$; 4) $y=0{,}5x-1{,}5$. **33.15.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 2) 2; -2; 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.
33.16. $y=-3x+5$. **33.17.** $y=5x-5$.

§ 34. **34.1.1.** а) Зростає на $[-6;-4]$ та $[-2;2]$; спадає на $[-4;-2]$ та $[2;6]$; б) зростає на $[-7;-4]$ та $[-2;2]$; спадає на $[-4;-2]$ та $[2;7]$. **34.1.2.** Зростає на $(-\infty;-5]$ та $[5;+\infty)$; спадає на $[-5;5]$. **34.1.3.** Зростає на $[-3;-1]$; спадає на $(-6;-3]$ та $[-1;3)$. **34.1.6.** 1) Зростає на $[1;+\infty)$; спадає на $(-\infty;1]$; 2) зростає на $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right]$ та $\left[2\sqrt{2};+\infty\right)$; спадає на $\left[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right]$; 3) зростає на $[-1;0]$ та $[1;+\infty)$; спадає на $(-\infty;-1]$ та $[0;1]$; 4) зростає на $(-\infty;-1]$ та $[1;+\infty)$; спадає на $[-1;0)$ та $(0;1]$; 5) спадає на $(-\infty;0]$; зростає на $[0;+\infty)$; 6) зростає на $\boldsymbol{R}$. **34.1.7.** 1) Зростає на $(-\infty;-3]$ та $[3;+\infty)$, спадає на $[-3;3]$; 2) зростає на $[-1;1]$, спадає на $(-\infty;-1]$ та $[1;+\infty)$; 3) зростає на $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$ спадає на $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 4) зростає на $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{5\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$; спадає на $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$. **34.1.8.** 1) $(-\infty;0]$; 2) $[1;+\infty)$; 3) $[0;9]$. **34.1.9.** 1) 1; 2) 2; 3) π; 4) -1. **34.1.12.** 1) Зростає на $(-\infty;-2]$, $[1;+\infty)$; спадає на $[-2;1]$; 2) $x=-2$ — точка максимуму; $x=1$ — точка мінімуму.
34.1.16. 1) Зростає на $[3;+\infty)$; спадає на $(-\infty;3]$; $x=3$ — точка мінімуму; $f(3)=-4$; 2) зростає на $[-1;0]$ та $[1;+\infty)$; спадає на $(-\infty;-1]$ та $[0;1]$; $x=\pm1$ — точки мінімуму; $f(-1)=f(1)=-1$; $x=0$ — точка максимуму; $f(0)=0$; 3) зростає на $(-\infty;-2]$ та $[2;+\infty)$; спадає на $[-2;0)$ та $(0;2]$; $x=-2$ — точка максимуму; $f(-2)=-4$; $x=2$ — точка мінімуму; $f(2)=4$; 4) зростає на $[1;2]$; спадає на $[2;3]$; $x=2$ — точка максимуму; $f(2)=2$.
34.1.17. 1) Зростає на $[-2;2]$, спадає на $(-\infty;-2]$ та $[2;+\infty)$; $x=-2$ — точка мінімуму, $y(-2)=-0{,}25$; $x=2$ — точка максимуму, $y(2)=0{,}25$; 2) зростає на $[-0{,}5;0]$ та $[0{,}5;+\infty)$; спадає на $(-\infty;-0{,}5]$ та $[0;0{,}5]$; $x=\pm0{,}5$ — точки мінімуму; $f(-0{,}5)=f(0{,}5)=-1{,}25$; $x=0$ — точка максимуму; $f(0)=-1$; 3) зростає на $(-\infty;+\infty)$; 4) зростає на $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$; спадає на $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{5\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$; $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$ — точка мінімуму; $f\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$, — точка максимуму; $f\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $k\in \boldsymbol{Z}$.
34.2.4. 1) б) $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$; в) при $a<-4$, $a>4$ — два; при $a=\pm4$ — один; при

$-4<a<4$ — немає; 2) б) $[-2;+\infty)$; в) при $a<-2$ — немає; при $a=-2$, $a>0$ — один; при $-2<a\leqslant 0$ — два; 3) б) $[-0{,}25;+\infty)$; в) при $a<-0{,}25$ коренів немає, при $a=-0{,}25$ або $a>0$ — один, при $-0{,}25<a<0$ — два; 4) б) $[4;+\infty)$; в) при $a<4$ коренів немає, при $a=4$ — один, при $a>4$ — два.

34.2.5. 1) 2; 2) 2; 3) 1. **34.3.1.** 1) $f_{\max}=9$, $f_{\min}=5$; 2) $f_{\max}=5$, $f_{\min}=-4$; 3) $f_{\max}=6$, $f_{\min}=-2$; 4) $f_{\max}=1$, $f_{\min}=-31$.

34.3.2. 1) $f_{\max}=4$, $f_{\min}=-4$; 3) $f_{\max}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$, $f_{\min}=0$. **34.3.3.** 2) $f_{\max}=1$, $f_{\min}=-3$; 3) $f_{\min}=-5$, $f_{\max}=-3$; 4) $f_{\min}=-1$, $f_{\max}=1$.

34.3.4. 1) $f_{\max}=5$, $f_{\min}=-52$; 2) $f_{\min}=0$, $f_{\max}=2\sqrt{3}$; 4) $f_{\min}=0{,}5$, $f_{\min}=2{,}25$. **34.3.5.** $\frac{a}{6}$.

34.3.6. 5; 5. **34.3.7.** 3,5; 0,5. **34.3.8.** 6; −2.

34.3.9. Квадрат зі стороною 5 см.

34.3.12. 4. **34.3.13.** Рівнобедрений трикутник із бічною стороною $\frac{a}{2}$ і кутом α при вершині. **34.3.14.** $\frac{\pi R^3}{\sqrt{2}}$. **34.3.16.** До точки відрізка AB, віддаленої від B на 1 км.

§ 35. **35.1.** 1) $6x-6$; 2) $\frac{8\sin 2x}{\cos^3 2x}$; 3) $-2\sin x-x\cos x$; 4) $(2-x^2)\sin x+4x\cos x$.

35.2. 1) Опукла вниз на $(-\infty;-1)$ та $(1;+\infty)$; опукла вгору на $(-1;1)$; $x=\pm 1$ — точки перегину; 2) опукла вниз на $\left(-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$ та $\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$; опукла вгору на $\left(-\pi;-\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$ та $\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right)$; $x=\pm\frac{\pi}{4}$, $x=\pm\frac{3\pi}{4}$ — точки перегину; 3) опукла вниз на $(-\infty;-1)$ та $(0;1)$; опукла вгору на $(-1;0)$ та $(1;+\infty)$; $x=0$ — точка перегину; 4) опукла вниз на $\left(-\infty;\sqrt[3]{36}\right)$ опукла вгору на $\left(\sqrt[3]{36};+\infty\right)$, $x=\sqrt[3]{36}$ — точка перегину.

§ 36. **36.1.1.** 1) 3; 2) 5. **36.1.2.** 1) ±1; 2) 0; 3) 2. **36.1.3.** 1) 2; 2) 0; 3) 2. **36.1.4.** 1) 0; 2) 0; **36.1.5.** 1) 1; 2; 2) 1; 3; 3) −1; −2. **36.1.6.** 1) 1; 2; −2; 2) −1; 2; −2; 3) 1; −1; 2. **36.1.8.** 1) $(-1;+\infty)$; 2) $(1;+\infty)$; 3) $(5;+\infty)$. **36.1.9.** 1) 3; 2) 11.

§ 37. **37.1.** $a\leqslant -3$ або $a\geqslant 1$. **37.2.** $a=1$. **37.3.** $k=2$. **37.4.** $x=1$, $a=3$. **37.5.** 1. **37.6.** $a=3$, $b=1$. **37.7.** $a=-23{,}25$. **37.8.** $5-3\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 5+3\sqrt{3}$. **37.9.** $a\leqslant -32$ або $a\geqslant 32$. **37.10.** $a<-7$ або $a>11$. **37.11.** $-7\leqslant a<0$ або $0<a\leqslant 7$. **37.12.** $0<a\leqslant 9$. **37.13.** $a=-\frac{2}{3}$.

Тест № 5. **1.** Б. **2.** Г. **3.** А. **4.** В. **5.** В. **6.** В. **7.** 1 — А, 2 — В, 3 — Б. **8.** Б. **9.** $\max\limits_{[-2;\,0]} y=y(-2)=15$; $\min\limits_{[-2;\,0]} y=y(-1)=6$. **10.** 2) При $a<-\frac{2}{3}$ або $a>\frac{2}{3}$ — єдиний корінь; при $a=-\frac{2}{3}$ або $a=\frac{2}{3}$ — два корені; при $-\frac{2}{3}<a<\frac{2}{3}$ — три корені.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Розділ 4. Тригонометричні рівняння і нерівності

Розділ 5. Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування

Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім’я учня / учениці	Навчаль-ний рік	Стан підручника	
			на початку року	в кінці року
1				
2				
3				
4				
5				

Навчальне видання

НЕЛІН Євген Петрович

«АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ (ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ)»
підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Редактор *О. В. Костіна*. Технічний редактор *А. В. Пліско*. Художнє оформлення *В. І. Труфен*.
Комп’ютерна верстка *О. М. Правдюк*. Коректор *Н. В. Красна*.

В оформленні підручника використані зображення,
розміщені в мережі Інтернет для вільного використання

Підписано до друку 16.07.2018. Формат 84×108/16. Папір офсетний. Гарнітура Шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 28,56. Обл.-вид. арк. 27,4.
Тираж 8898 прим. Зам. № 5007-2018.

ТОВ Видавництво «Ранок»,
вул. Кібальчича, 27, к. 135, Харків, 61071.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 5215 від 22.09.2016.
Адреса редакції: вул. Космічна, 21а, Харків, 61145.
E-mail: office@ranok.com.ua. Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.

Надруковано у друкарні ТОВ “ТРІАДА-ПАК”,
пров. Сімферопольський, 6, Харків, 61052.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 5340 від 15.05.2017.
Тел. +38 (057) 703-12-21. E-mail: sale@triada.kharkov.ua

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

Особливості підручника:

- узагальнюючі таблиці в кожному параграфі
- приклади розв'язування завдань з коментарями
- різнорівневі запитання і вправи
- завдання, які сприяють формуванню й розвитку предметних і ключових компетентностей

Інтернет-підтримка дозволить:

- здійснити онлайн-тестування за кожною темою
- детальніше ознайомитися з навчальним матеріалом
- дізнатися про досягнення видатних учених України та світу

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

ISBN 978-617-09-4357-6

Інтернет-підтримка
interactive.ranok.com.ua