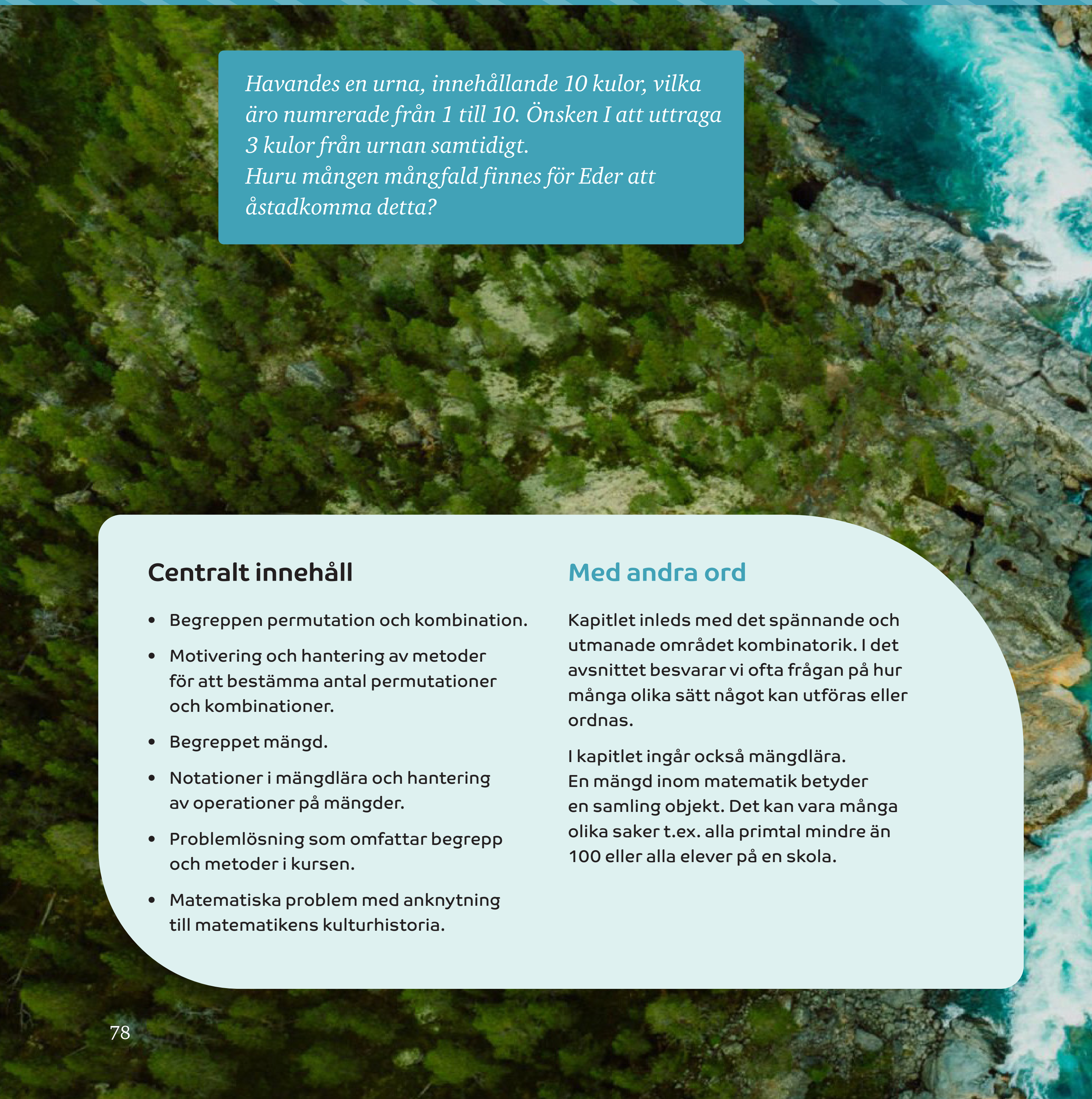
2 KOMBINATORIK OCH MÄNGDLÄRA



Havandes en urna, innehållande 10 kulor, vilka äro numrerade från 1 till 10. Önsken I att uttraga 3 kulor från urnan samtidigt.
Huru mången mångfald finnes för Eder att åstadkomma detta?

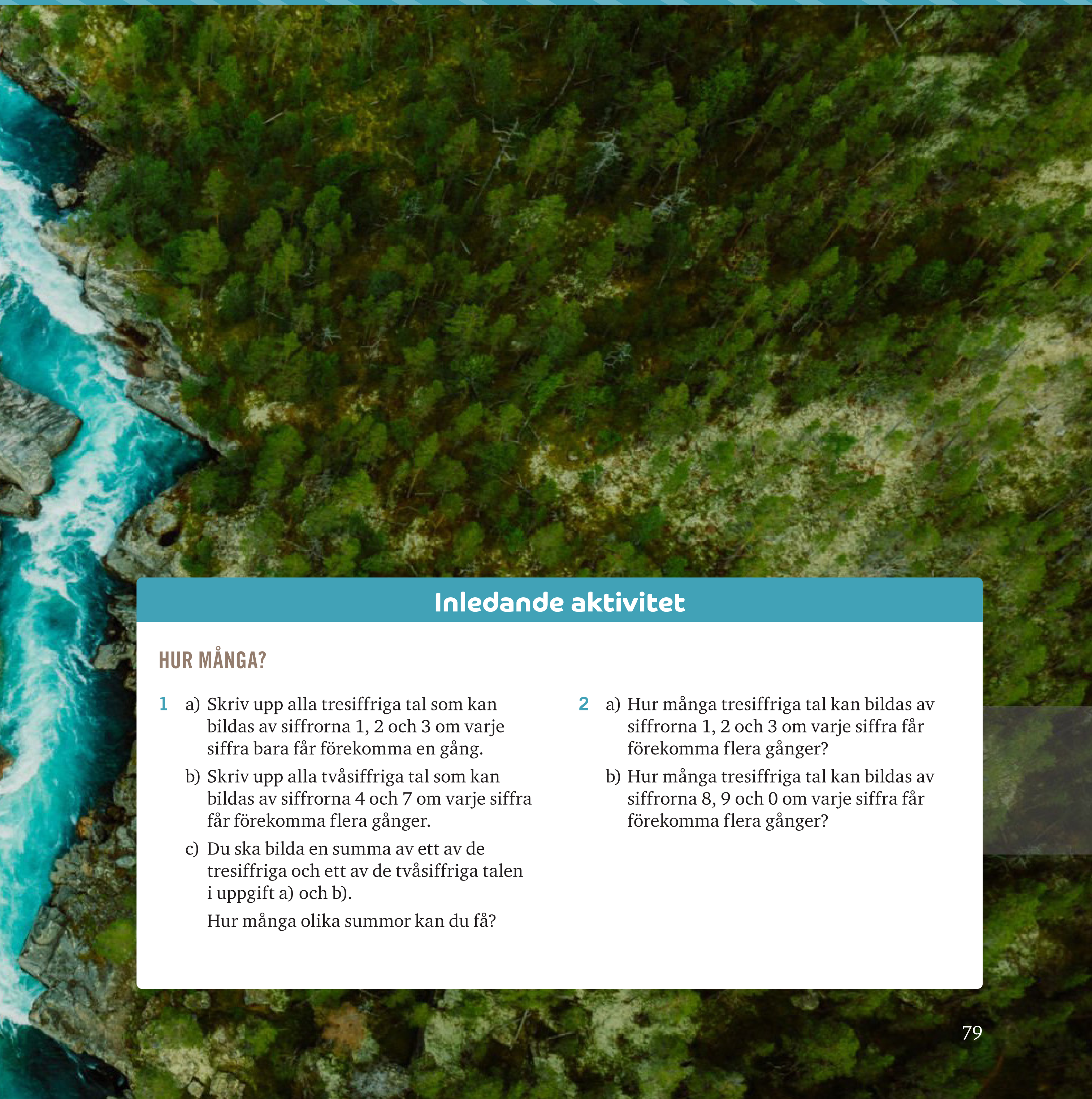
Centralt innehåll

- Begreppen permutation och kombination.
- Motivering och hantering av metoder för att bestämma antal permutationer och kombinationer.
- Begreppet mängd.
- Notationer i mängdlära och hantering av operationer på mängder.
- Problemlösning som omfattar begrepp och metoder i kursen.
- Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.

Med andra ord

Kapitlet inleds med det spännande och utmanade området kombinatorik. I det avsnittet besvarar vi ofta frågan på hur många olika sätt något kan utföras eller ordnas.

I kapitlet ingår också mängdlära. En mängd inom matematik betyder en samling objekt. Det kan vara många olika saker t.ex. alla primtal mindre än 100 eller alla elever på en skola.



Inledande aktivitet

HUR MÅNGA?

1 a) Skriv upp alla tresiffriga tal som kan bildas av siffrorna 1, 2 och 3 om varje siffra bara får förekomma en gång.

b) Skriv upp alla tvåsiffriga tal som kan bildas av siffrorna 4 och 7 om varje siffra får förekomma flera gånger.

c) Du ska bilda en summa av ett av de tresiffriga och ett av de tvåsiffriga talen i uppgift a) och b).

Hur många olika summor kan du få?

2 a) Hur många tresiffriga tal kan bildas av siffrorna 1, 2 och 3 om varje siffra får förekomma flera gånger?

b) Hur många tresiffriga tal kan bildas av siffrorna 8, 9 och 0 om varje siffra får förekomma flera gånger?

2.1 Kombinatorik

Multiplikations- och additionsprincipen

Exempel 1 Kalle Larsons café säljer mackor, kaffe och smoothies.

Dennis ska köpa en macka, en kaffe och en smoothie. Han funderar på hur många olika sätt han kan välja dessa tre saker.

Vi börjar med att ange antalet alternativ i varje val.

- Macka: 3 sorter
- Kaffe: 2 sorter
- Smoothie: 3 smaker

Kalle Larsons café

Mackor:	Ost Salami Vegansk
Kaffe:	Bryggkaffe Latte
Smoothies:	Blåbär Vinbär Choklad

Antalet sätt att välja en macka, en sorts kaffe och en smoothie får vi genom att multiplicera antalet alternativ i varje val. Det ger

$3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$

Det finns alltså 18 olika sätt att välja en macka, en kaffe och en smoothie.

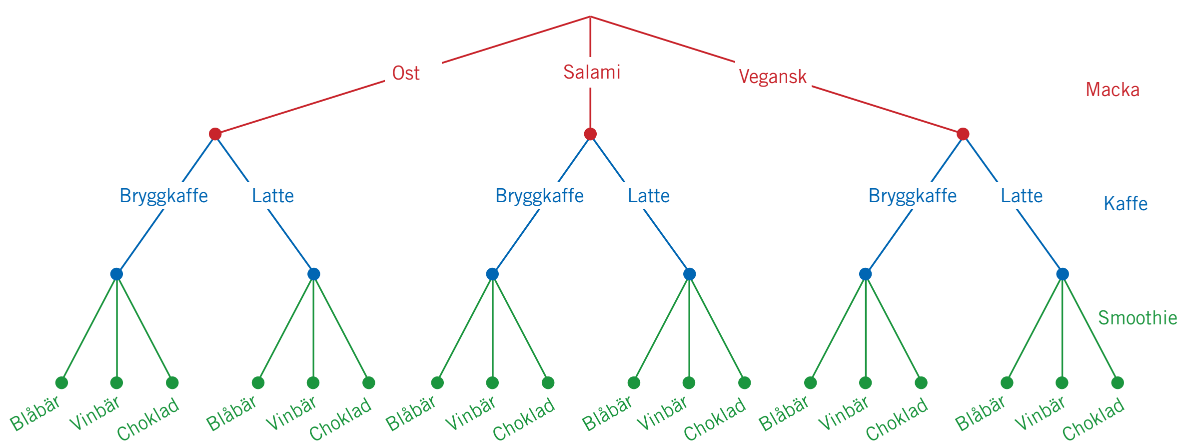
Vi har använt det som kallas multiplikationsprincipen.

Multiplikations-principen

> Ett första val kan göras på p sätt och ett andra val kan göras på q sätt.
> De två valen kan göras efter varandra på $p \cdot q$ sätt.

Antalet sätt kan presenteras i ett träddiagram.

Längst ner ser vi att trädet har 18 olika grenar. Grenarna visar att det finns 18 olika sätt att kombinera en macka, en kaffe och en smoothie på Kalle Larsons café.



Exempel 2 Ella ska köpa något att dricka, alltså en kaffe *eller* en smoothie på caféet.

Det finns 2 olika sorters kaffe och 3 smaker på smoothie.
Hon har $2 + 3 = 5$ sätt att välja en dryck.

Vi har använt det som kallas för additionsprincipen.

Additionsprincipen

Ett första val kan göras på p sätt och ett andra val kan göras på q sätt. Om antingen det första eller det andra valet ska utföras kan det göras på $p + q$ sätt.

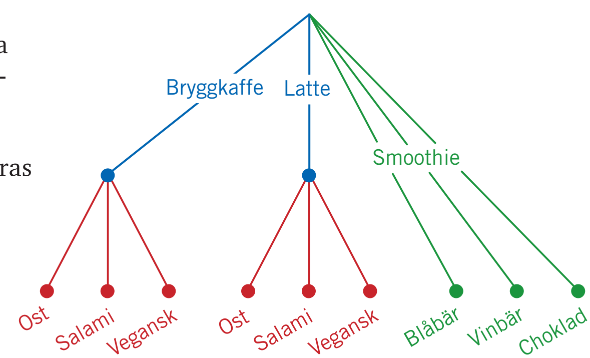
En förutsättning är det första och det andra valet inte har något gemensamt alternativ.

Exempel 3 Dana ska köpa antingen en kaffe och en macka *eller* en smoothie på Kalle Larsons café. Antalet sätt att välja beräknas i två steg.

Först använder vi multiplikationsprincipen för att beräkna antalet sätt att välja en kaffe och en macka. $2 \cdot 3 = 6$

Antalet sätt att välja smoothie är 3. Antalet sätt att välja kaffe och macka eller en smoothie är enligt additionsprincipen $6 + 3 = 9$.

Antalet sätt kan även här representeras av grenarna i ett träddiagram.

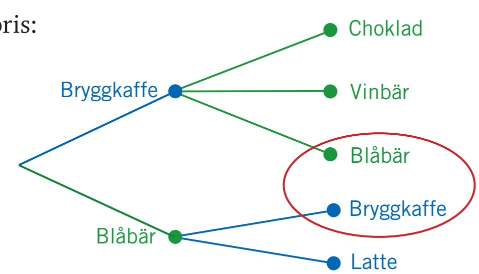


Exempel 4 Kalle Larsons café har ett erbjudande med bra pris:

Bryggkaffe och valfri smoothie

eller

En blåbärssmoothie och valfritt kaffe



Multiplikationsprincipen ger antalet sätt att välja:

Bryggkaffe och valfri smoothie:
$1 \cdot 3 = 3$

En blåbärssmoothie och valfritt kaffe:
$2 \cdot 1 = 2$

Bryggkaffe och en blåbärssmoothie kommer med två gånger. Det kan vi också se i figuren till höger. Vi måste därför minska antalet sätt med 1.

Det finns $3 + 2 - 1 = 4$ sätt att välja erbjudandet.

Sannolikheten för en händelse

Vi repeterar hur man beräknar sannolikheten P för en händelse H om alla utfall är lika sannolika.

$$P(H) = \frac{\text{antalet gynnsamma utfall}}{\text{antalet möjliga utfall}}$$

Exempel 5 Sannolikheten att välja en smoothie med bärsmak (blåbär eller vinbär) om man slumpvis väljer en av de tre smakerna är

$$P(\text{bärsmak}) = \frac{\text{2 med bärsmak}}{\text{3 smaker}} = \frac{2}{3}$$

2101 När Alma ska träna har hon följande kläder att välja på:

Topp: svart linne, blått linne, kortärmad tröja eller långärmad tröja

Byxor: korta byxor, knälånga byxor eller långa byxor

Skor: löparskor eller inomhusskor

På hur många sätt kan hon klä sig om hon gör alla tre valen?

Hon står inför tre valsituationer med följande antal valmöjligheter:

- 4 olika toppar
- 3 olika byxor
- 2 olika skor

Antalet sätt att klä sig $= 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Svar: Hon kan klä sig på 24 olika sätt.

2102 Ett hänglås har en sifferkod med tre siffror. Hur stor är sannolikheten att på måfå använda rätt kod om man gör ett försök?

Det finns 10 siffror (0–9)

Antalet koder $= 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$

Det är endast en kod som är rätt.

$$P(\text{rätt kod}) = \frac{1}{1\,000}$$

Man kan också svara i decimalform eller i procentform.

Svar: Sannolikheten är $\frac{1}{1\,000}$

2103 En restaurang, med menyn till höger, erbjuder en tvårättersmeny till ett bra pris.

Man kan välja antingen förrätt och huvudrätt *eller* huvudrätt och efterrätt.

På hur många sätt kan man välja en sådan tvårättersmeny?

Antalet sätt att välja:

Förrätt och Huvudrätt: $2 \cdot 3 = 6$
Huvudrätt och Efterrätt: $3 \cdot 3 = 9$
En tvårättersmeny: $6 + 9 = 15$

Svar: Det finns 15 sätt att välja en tvårättersmeny enligt erbjudandet.

1

2104 På ett café finns det fem olika mackor med ljust bröd och tre olika med mörkt bröd.

På hur många sätt kan man välja

a) en macka med ljust bröd och en med mörkt bröd

b) en macka med ljust bröd eller en med mörkt bröd?

2105 Mandy ska köpa en mobiltelefon och ställs inför flera val. Hon har tre märken att välja mellan och varje märke har tre modeller hon är intresserad av. Dessutom finns det fem olika abonnemang till varje modell.

På hur många olika sätt kan Mandy välja en mobiltelefon med abonnemang?

2106 En frågetävling består av fyra frågor med fyra svarsalternativ och fyra frågor med tre alternativ.

På hur många sätt kan man besvara frågorna?

2107 a) Hur många fyrsiffriga pinkoder finns det?

b) Hur många fyrsiffriga pinkoder som börjar med en nolla finns det?

2108 Ted har valt ut filmer till en filmkväll.

Han har hittat 15 filmer i 3 olika genres: 5 actionfilmer, 3 thrillers och 4 komedier

På hur många sätt kan han välja

a) tre filmer med en i varje genre

b) två filmer i olika genre

c) alternativet en actionfilm och en thriller eller alternativet en komedi?

2109 a) Hur många olika bilregistreringsskyltar för bilar kan man göra enligt modellen ”först 3 bokstäver och sedan 3 siffror”? Bokstäverna I, Q, V, Å, Ä och Ö används inte.

b) Hur stor är sannolikheten att en slumpvis vald skylt börjar med A och slutar med 9 om alla möjliga skyltar används?

c) Sedan år 2019 kan sista platsen på svenska registreringsskyltar vara antingen en siffra eller en bokstav.

Bokstäverna I, O, Q, V, Å, Ä och Ö används inte på den sista platsen.

Hur många skyltar finns enligt den här modellen?

2110 En kokbok innehåller 50 förrätter, 100 huvudrätter och 50 efterrätter.

På hur många sätt kan man ur boken komponera en två- eller trerättersmiddag som innehåller en huvudrätt?

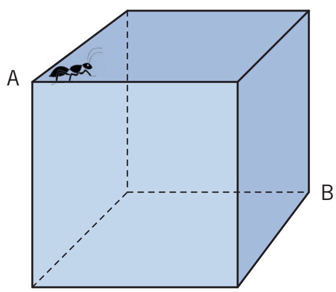
2

2111 Sex personer är med i utlottningen av två lika stora vinster. Varje person kan bara få en vinst.

Soha och Kirsty är två av de som är med i utlottningen.

På hur många sätt kan de två vinsterna fördelas om åtminstone en av Soha och Kirsty vinner?

2112 En myra kryper kortaste vägen från A till B längs kubens kantlinjer.



Hur många vägar kan myran krypa?

2113 I en klass går 17 killar och 9 tjejer. I en annan klass går 13 killar och 15 tjejer. En elev från vardera klass ska utses till elevrådsrepresentant.

På hur många olika sätt kan detta ske om

a) båda representanterna ska vara killar

b) en kille och en tjej ska utses

c) åtminstone en tjej ska utses?

2114 Hur många binära heltal finns det som är större än eller lika med noll och som har sex eller färre siffror?

2115 I sin garderob har Ato

- 1 röd, 1 blå, 1 vit och 1 grön skjorta
- 2 par blå jeans, 1 par grå finbyxor och 1 par chinos
- 1 par stumpor av vardera färgerna röd, blå, svart och vit
- 1 par boots, 1 par sneakers och 1 par svarta lackskor.

På hur många sätt kan han klä sig, om

a) alla skjortor, byxor, strumpor och skor kan användas tillsammans

b) bootsen bara kan användas till jeans eller chinos

c) han bara kan ha svarta strumpor till lackskorna och alltid vit skjorta till finbyxorna?

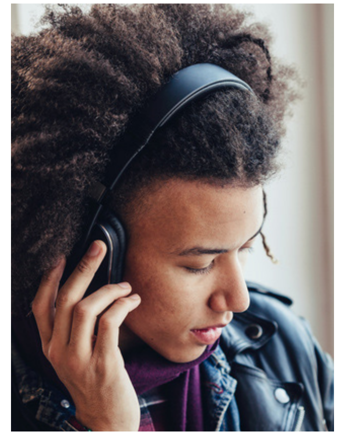
3

2116 Visa att ett val bland p föremål följt av ett val bland q föremål alltid leder till fler valmöjligheter, än ett val bland $p + q$ föremål, förutsatt att $p \geq 2$ och $q > 2$.

2117 Hur många positiva binära tal finns det som är mindre än 256_{tio} och som har två ettor i början, i slutet eller både i början och slutet?

Permutationer och kombinationer

Exempel 1 Johannes har en spellista med 10 låtar. Vi ska beräkna på hur många sätt spellistan kan spelas om vi tar hänsyn till i vilken ordning låtarna kommer. Varje låt får endast spelas en gång. Vi tillåter alltså inte upprepning.



permutation

Ett sådant urval med hänsyn till ordning och utan upprepning kallas en *permutation*.

På hur många olika sätt kan Johannes spellista spelas?

När den första låten ska väljas finns det 10 valmöjligheter. Den andra låten kan sedan väljas på 9 sätt och den tredje på 8 sätt osv.

Antalet möjliga sätt blir då enligt multiplikationsprincipen

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$

Antalet permutationer av 10 föremål (element) kan skrivas 10!

$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

***n*-fakultet** Produkten av alla heltal från 1 till n kallas *n-fakultet* och betecknas $n!$

Allmänt gäller:

Antalet permutationer av *n* element

> Antalet permutationer av n element är
>
> $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
>
> där n är ett positivt heltal.
>
> Enligt definition är $0! = 1$.

Exempel 2 Om man endast väljer 7 låtar från listan med 10 låtar och tar hänsyn till i vilken ordning låtarna spelas kan detta göras på

$\underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}_{\text{7 faktorer}} = 604\,800$ olika sätt.

Det finns alltså 604 800 permutationer av 7 element ur 10 givna.

Allmänt gäller:

Antalet permutationer av *k* element ur *n* givna

> Antalet sätt att välja k element ur n givna element, med hänsyn till ordningen, är
>
> $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$ $\quad$ (k faktorer)

Exempel 3 En annan spellista innehåller fem låtar som vi kallar A, B, C, D respektive E. Om vi väljer tre av de fem låtarna kan det göras på $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ sätt. Tabellen nedan visar alla 60 permutationerna.

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
ABE	AEB	BAE	BEA	EAB	EBA
ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA
ACE	AEC	CAE	CEA	EAC	ECA
ADE	AED	DAE	DEA	EAD	EDA
BCD	BDC	CBD	CDB	DBC	DCB
BCE	BEC	CBE	CEB	EBC	ECB
BDE	BED	DBE	DEB	EBD	EDB
CDE	CED	DCE	DEC	ECD	EDC

Endast låtarna A, B och C.

Den första raden innehåller permutationer av låtarna A, B och C. Det finns $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sätt att spela de tre låtarna.

Den andra raden innehåller permutationer av låtarna A, B och D, tredje raden innehåller permutationer av låtarna A, B och E osv.

Om vi inte tar hänsyn till vilken ordning låtarna spelas kan varje rad betraktas som ett och samma val. Det finns totalt 10 rader.

Antalet sätt man kan välja tre låtar av fem om man inte tar hänsyn till i vilken ordning de spelas är alltså 10. Man säger att det finns 10 kombinationer för att välja tre element av fem.

kombination

Varje urval av k element ur n givna element, utan hänsyn till ordningen, kallas en *kombination*.

Antalet kombinationer av 3 låtar ur en spellista på 5 låtar kan beräknas

$$\frac{\text{Antalet permutationer av 3 element ur 5 givna}}{\text{Antal permutationer av 3 element}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{60}{6} = 10$$

Allmänt gäller:

Antalet kombinationer av k element ur n givna

Antalet kombinationer av k element ur n givna element kan beräknas

$$\frac{\text{Antalet permutationer av } k \text{ element ur } n \text{ givna}}{\text{Antalet permutationer av } k \text{ element}}$$

2118

Julia ska sätta upp förstoringar av tre foton i sitt rum.
De ska hänga på rad.

a) Utgå från det tre fotona A, B och C och gör en lista över de olika permutationerna.

b) Hur många permutationer finns det?

c) Julia lägger till fem foton och har nu åtta att välja på. På hur många sätt kan hon välja tre av åtta foton, om hon tar hänsyn till ordningen?

d) På hur många sätt kan hon välja tre av åtta foton, om hon inte tar hänsyn till ordningen?

a) De möjliga permutationerna är

A B C   B A C   C B A
A C B   B C A   C A B

b) Antalet permutationer av 3 element är
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Svar: Det finns 6 permutationer.

c) Antalet permutationer av 3 element ur 8 givna är
$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Här tar vi hänsyn till ordningen.

Svar: Det finns 336 sätt att välja 3 av 8 foton om man tar hänsyn till ordningen.

d) Antalet kombinationer av 3 element ur 8 givna är

Här tar vi inte hänsyn till ordningen.

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$$

Svar: Det finns 56 sätt att välja 3 av 8 foton om man inte tar hänsyn till vilken ordning de väljs.

2119 Hur många olika femsiffriga koder kan man skapa av siffrorna 1, 2, 3, 3, 4?

Fem siffror kan ordnas på $5! = 120$ olika sätt.

Två av de 120 koderna är 3 1 3 2 4 och 3 1 3 2 4, där 3:orna har bytt plats.

Eftersom 3:orna kan ordnas på $2! = 2$ olika sätt kommer varje kod att finnas 2 gånger.

Antalet unika koder $= \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{120}{2} = 60$

Svar: Det finns 60 unika koder.

1

2120 Sju personer ska skriva sitt namn på en lista.
På hur många sätt kan listan se ut om man tar hänsyn till namnens inbördes ordning?

2121 Beräkna

a) $4!$ b) $\frac{5!}{2!}$

2122 I styrelsen till en idrottsförening ska man välja ordförande, sekreterare och kassör.
På hur många sätt kan dessa väljas om styrelsen består av

a) 6 personer b) 12 personer?

2123 En tränare ska välja ut 4 av 7 skidåkare till ett stafettlag. På hur många sätt kan tränaren välja ut laget om man

a) tar hänsyn till i vilken ordning åkarna ska starta

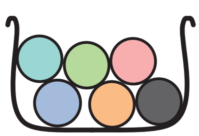
b) bara tar hänsyn till vilka åkare som är med i laget?

2124 En vanlig kortlek innehåller 52 olika kort.
På hur många sätt kan man dra fem kort om man tar hänsyn till ordningen och

a) inte lägger tillbaka korten

b) lägger tillbaka kortet efter varje dragning?

2125 En skål innehåller sex kulor i olika färg.



a) Förklara vad beräkningen $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ beskriver i detta sammanhang.

b) På hur många sätt kan man ta tre kulor om ordningen inte spelar någon roll?

2126 Beräkna antalet

a) permutationer av 5 element av 12

b) kombinationer av 5 element av 12.

2127 Hur många fyrsiffriga koder finns det med

a) siffrorna 0, 6, 8, 9

b) fyra olika siffror (0–9)

c) siffrorna 3, 5, 5, 9?

2

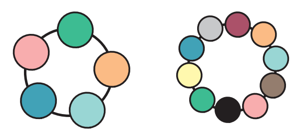
2128 a) Hur många olika ”ord” kan man bilda av alla bokstäverna i ordet B A N A N?

b) Hur många av orden i uppgift a) börjar med AN?

(De flesta av dessa ”ord” saknar betydelse.)

2129 Adrian är ledig två dagar varje vecka.
Hur många olika sätt finns det att ordna ledigheten om han inte vill vara ledig både lördag och söndag?

2130 Fiona tillverkar armband av pärlor i olika färger enligt figuren.



På hur många olika sätt kan armbanden se ut om de består av

a) fem pärlor i olika färger

b) tio pärlor i olika färger?

2131 Hur många ”ord” kan bildas av bokstäverna i F I S K A om varje bokstav bara får användas en gång och om ”orden” får bestå av allt från 1 till 5 bokstäver?
(De flesta ”ord” kommer att sakna betydelse.)

2132 Ett spelbolag har ett spel, där det gäller att bland åtta deltagare i en tävling tippa de n första i rätt ordning.
Hur stort måste n minst vara, om antalet olika tipsrader ska bli mer än 10 000?
Motivera.

Formler för permutationer och kombinationer

Ofta tar man hjälp av formler för att beräkna antalet permutationer och antalet kombinationer.

Exempel 1 Antalet permutationer P för ett urval av 3 element av 10 kan skrivas
$P(10, 3) = 10 \cdot 9 \cdot 8$

Beräkningen kan göras med hjälp av fakulteter om vi förlänger med 7!

$$P(10, 3) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10!}{(10-3)!}$$

Allmänt gäller:

Antalet permutationer

Antalet sätt att välja k element ur n givna element med hänsyn till ordningen är

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Två specialfall:

- Om vi väljer n element av n, alltså alla elementen, vet vi att antalet permutationer är $n!$

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

0! = 1 enligt definition

- Om vi väljer 0 element av n får vi

$P(n, 0) = \frac{n!}{n!} = 1$ med tolkningen: ”noll element kan väljas på ett sätt”.

Exempel 2 Antalet kombinationer C för ett urval av 3 element av 10 kan skrivas

$$C(10, 3) = \frac{P(10, 3)}{3!} = \frac{\frac{10!}{(10-3)!}}{3!} = \frac{10!}{3!(10-3)!}$$

Allmänt gäller:

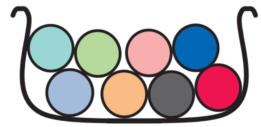
Antalet kombinationer

Antalet sätt att välja k element ur n givna element utan hänsyn till ordningen är

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$C(n, k)$ skrivs ofta $\binom{n}{k}$ och läses ”n över k”.

Exempel 3 I en skål ligger 8 olikfärgade kulor. Vi ska ta 3 av de 8 kulorna utan att lägga tillbaka någon, dvs. utan återläggning. Antalet sätt att göra detta, om vi inte tar hänsyn till ordningen, är



$$C(8, 3) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$$

När vi tar 3 kulor av de 8 kommer 5 kulor att ligga kvar i skålen. Antalet sätt att ta 5 kulor av 8 utan hänsyn till ordningen är

$$C(8, 5) = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

Vi ser att $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$ som kan skrivas $\binom{8}{5} = \binom{8}{8-3}$

Allmänt gäller att antalet sätt att välja k element av n och antalet sätt att välja $(n-k)$ element av n är alltid detsamma.

Kombinationer och symmetri

Symmetri ger att $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2133 Tolka och beräkna med hjälp av en formel.
Kontrollera med digitalt verktyg.

a) $P(7, 3)$ b) $\binom{30}{12}$ c) $C(15, 13)$

a) $P(7, 3)$ är antalet sätt att välja 3 element av 7 givna med hänsyn till ordningen.

$P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$ *Kontroll*: nPr(7, 3) = 210

Svar: Antalet permutationer är 210.

b) $\binom{30}{12}$ är antalet sätt att välja 12 element av 30 givna utan hänsyn till ordningen.

$\binom{30}{12} = \frac{30!}{12!(30-12)!} = \frac{30!}{12! \cdot 18!} = 86\,493\,225$ *Kontroll*: nCr(30, 12) = 86493225

Svar: Antalet kombinationer är 86 493 225.

c) $C(15, 13)$ är antalet sätt att välja 13 element av 15 givna utan hänsyn till ordningen.

$C(15, 13) = \binom{15}{13} = \frac{15!}{13!(15-13)!} = \frac{15!}{13! \cdot 2!} = 105$ *Kontroll*: nCr(15, 13) = 105

Svar: Antalet kombinationer är 105.

2134 Hur många sexsiffriga koder finns det med siffrorna 0–9 om varje siffra endast får förekomma en gång?
Lös uppgiften med formeln för antalet permutationer.

Antalet permutationer av 6 element ur 10 givna ges av

$$P(10, 6) = \frac{10!}{(10-6)!} = 151\,200$$

Svar: Det finns 151 200 sexsiffriga koder.

2135 Agnes har 30 pocketböcker i sin bokhylla. 10 av dem är på engelska och resten är på svenska.
På hur många sätt kan hon välja böcker om det ska vara

a) en bok på engelska och en på svenska

b) två böcker på engelska och fyra på svenska

c) två böcker på engelska eller fyra på svenska?

a) Hon har 10 böcker på engelska och 30 – 10 = 20 böcker på svenska.
Multiplikationsprincipen ger antalet möjliga sätt:
$10 \cdot 20 = 200$

Svar: Det finns 200 sätt.

b)

	Engelska	Svenska
Antal pocketböcker	10	20
Antal att välja	2	4
Antal sätt	$\binom{10}{2}$	$\binom{20}{4}$

Ordningen spelar ingen roll.

Multiplikationsprincipen ger antalet möjliga sätt:

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{20}{4} = \frac{10!}{2!(10-2)!} \cdot \frac{20!}{4!(20-4)!} = 45 \cdot 4\,845 = 218\,025$$

Svar: Det finns 218 025 sätt.

c) Additionsprincipen ger antalet möjliga sätt:

$$\binom{10}{2} + \binom{20}{4} = 45 + 4\,845 = 4\,890$$

Svar: Det finns 4 890 sätt.

1

2136 Beräkna och tolka.

a) $P(8, 3)$
b) $\binom{10}{5}$
c) $C(13, 3)$
d) $P(7, 7)$

2137 Beräkna $\dfrac{8!}{2! \cdot 6!}$

2138 Visa hur man beräknar med en formel.

a) $P(9, 2)$
b) $C(7, 3)$

2139 Bestäm

a) $P(5, 1)$
b) $P(5, 5)$
c) $P(5, 0)$

2140 Lasse ska göra en bukett. Han har 15 olika blommor att välja bland.

På hur många sätt kan han välja blommor till buketten om den ska bestå av

a) 10 blommor
b) 5 blommor?
c) Kommentera resultatet i a) och b).

2141 Förenkla uttrycken så långt som möjligt.

a) $16! \cdot 17 \cdot 18$
b) $\dfrac{144!}{143!}$

2142 Ett test har tio frågor, där svaret på varje fråga är antingen rätt eller fel. För godkänt krävs minst 7 rätt, varav 3 rätt ska vara bland de 5 första uppgifterna och 4 rätt bland de 5 sista uppgifterna.

På hur många sätt kan man få precis 7 rätt och bli godkänd?

2143 Vilka av alternativen **A–F** ger samma antal?

A Antalet sätt att välja 4 element bland 20 utan hänsyn till ordning.

B Antalet sätt att välja 4 element bland 20 med hänsyn till ordningen.

C Antalet permutationer av 4 element bland 20.

D $\binom{20}{4}$ **E** $\dfrac{20!}{4! \cdot 16!}$ **F** $\dfrac{20!}{(20-4)!}$

2

2144 Använd symmetriegenskapen för att bestämma vilka tal som kan stå i rutorna.

a) $\binom{15}{3} = \binom{15}{\square}$

b) $\binom{\square}{5} = \binom{\square}{9}$

c) $\binom{20}{\square} = \binom{\square}{8}$

2145 Under en period spelar fotbollslaget i en stad fem hemmamatcher och basketlaget spelar sju hemmamatcher.

På hur många sätt kan Melvin välja att gå på hemmamatcherna om han väljer

a) en fotbolls- och en basketmatch
b) två fotbolls- och två basketmatcher
c) tre fotbolls- eller fyra basketmatcher?

2146 Vilka beräkningar ger samma svar?

A $P(8, 5)$
B $\dfrac{8!}{3!(8-3)!}$
C $P(8, 3)$
D $C(8, 5)$
E $\binom{8}{3}$
F $\dfrac{8!}{(8-5)!}$

2147 Förenkla uttrycken så långt som möjligt.

a) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot n}$
b) $6n! \cdot \binom{n+3}{3}$

2148 a) Bestäm värdet på k om $5 \cdot 9! + 5 \cdot 8! = k \cdot 8!$

b) Visa att $a \cdot n! + a(n + 1)!$ kan skrivas $a \cdot n! \cdot (n + 2)$

2149 a) Visa att $\binom{10}{a} = \binom{10}{10-a}$ om $a = 4$.

b) Visa att $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ där n och k är heltal, $n \geq 1$ och $k \geq 0$.

2150 Lena ska bjuda 7 personer till en fest. Hon väljer bland 12 kompisar, där Nils och Sally ingår. Hon vet att det inte är lyckat att bjuda dem på samma fest.

På hur många sätt kan hon göra sitt val om hon tar hänsyn till detta?

2151 Ett innebandylag med 23 ungdomar och tre tränare har fått tio biljetter till en A-lagsmatch. De undrar på hur många sätt de kan lotta ut de tio biljetterna om minst en tränare ska med.

Erik föreslår beräkningen:

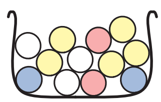
$$\binom{23}{9}\binom{3}{1}+\binom{23}{8}\binom{3}{2}+\binom{23}{7}\binom{3}{3}$$

Filip föreslår beräkningen:
$C(26, 10) - C(23, 10)$

Förklara hur Erik respektive Filip kan ha tänkt.

3

2154 Skålen innehåller 2 blå, 3 vita, 2 rosa och 5 gula kulor.



Två kulor kan väljas på $\binom{12}{2}$ sätt.

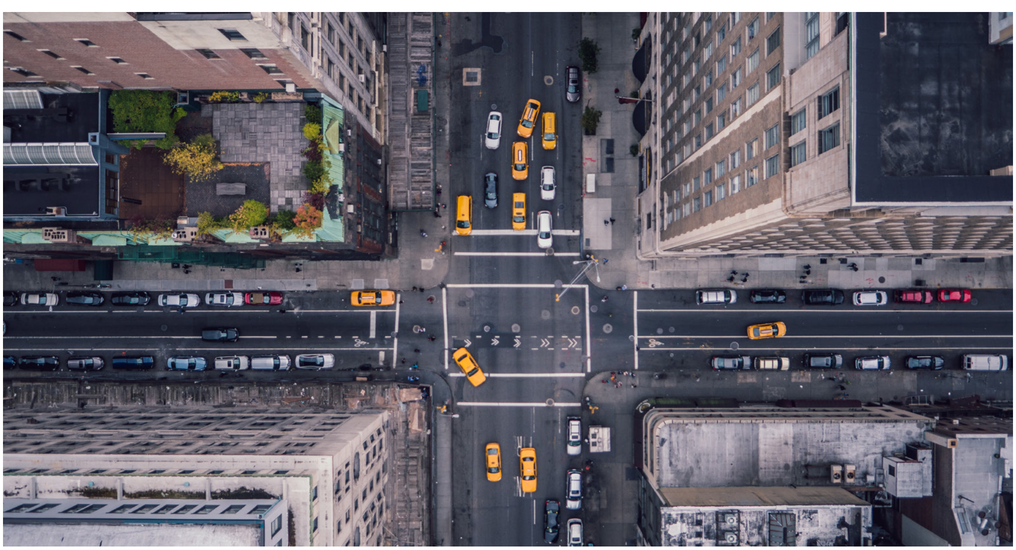
Hur stor andel av dem ger två kulor av olika färg?

2153 Visa att $P(n, n) = P(n, n - 1)$.

2154

På Manhattan i New York är gatorna i kvarteren parallella. Anta att du ska gå från korsningen 5th Avenue och 35th Street till Chrysler building.

På hur många sätt kan du då gå den kortaste vägen?



Mer om kombinatorik

I föregående avsnitt beräknade vi antalet permutationer och kombinationer när ett objekt bara kunde väljas en gång. Vi kallar detta för att valen görs utan återläggning eller upprepning.

Vi utökar nu med exempel när samma objekt kan väljas flera gånger, dvs. när valen görs med återläggning eller upprepning.

Exempel Lisen ska trä pärlor på en tråd. Det finns pärlor i fyra olika färger: blå, rosa, grå och gul.

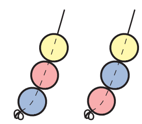
Vi beräknar antalet sätt man kan välja de första tre pärlorna, alltså antalet sätt att välja $k = 3$ element av $n = 4$ givna.

Resultatet kommer att bero på om valen sker med eller utan upprepning och om vi tar hänsyn till ordningen eller inte.

1 Utan upprepning och med hänsyn till ordning

Lisen ska välja 3 pärlor där ordningen har betydelse. Det betyder att t.ex. blå, rosa, gul och rosa, blå, gul räknas som två olika sätt.

Vi beräknar antalet permutationer av tre pärlor av fyra givna.



Ordningen har betydelse. Här räknas urvalen som olika.

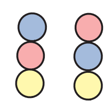
Ordnat urval utan upprepning

$$P(4,\ 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24 \qquad \text{Allmänt: } P(n,\ k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2 Utan upprepning och utan hänsyn till ordning

Lisen ska välja 3 pärlor där ordningen inte spelar någon roll, vilket betyder att t.ex. blå, rosa, gul och rosa, blå, gul räknas som ett och samma sätt.

Vi beräknar antalet kombinationer av tre pärlor av fyra givna.



Ordningen har inte betydelse. Här räknas urvalen som lika.

Oordnat urval utan upprepning

$$C(4,\ 3) = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4 \qquad \text{Allmänt: } C(n,\ k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3 Med upprepning (återläggning) och med hänsyn till ordning

Lisen ska välja 3 pärlor där ordningen är har betydelse och där hon varje gång kan välja bland 4 pärlor i färgerna blå, rosa, grå och gul.

Vi beräknar antalet sätt att utföra 3 val med vardera 4 olika valmöjligheter.

Ordnat urval med upprepning

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64 \qquad \text{Allmänt: } n^k$$

4 Med upprepning (återläggning) och utan hänsyn till ordning

Lisen ska välja 3 pärlor där ordningen inte spelar någon roll och där hon varje gång kan välja bland 4 pärlor i färgerna blå, rosa, grå och gul.

I tabellen på nästa sida visar vi alla sätt som pärlorna kan väljas på. Prickarna på varje rad motsvarar ett sätt att välja tre pärlor.

Vi ser att det finns 20 olika sätt.

Blå pärla	Rosa pärla	Grå pärla	Gul pärla
● ● ●			
● ●	●		
● ●		●	
● ●			●
●	● ●		
●	●	●	
●	●		●
●		● ●	
●		●	●
●			● ●
	● ● ●		
	● ●	●	
	● ●		●
	●	● ●	
	●	●	●
	●		● ●
		● ● ●	
		● ●	●
		●	● ●
			● ● ●

20 olika sätt

Varje rad i tabellen innehåller tre pärlor och tre streck som avgränsar de fyra färgerna.

Vi kan se det som sex positioner som ska fyllas med pärlor eller streck.

Första raden: ● ● ● | | |

Andra raden: ● ● | ● | |

Tredje raden: ● ● | | ● |

Fjärde raden: ● ● | | | ● osv.

Om tre pärlor ska placeras ut på sex positioner utan hänsyn till ordning kan det göras på $\binom{6}{3} = 20$ sätt.

Allmänt gäller:

Oordnat urval med upprepning

$$\binom{3 + (4-1)}{3} = 20 \qquad \text{Allmänt: } \binom{k + (n-1)}{k}$$

2155 Hur många olika koder med fem bokstäver kan man skapa av bokstäverna **A**, **E**, **O**, **U**, **Y** och **X** om

a) varje bokstav bara får väljas en gång

b) varje bokstav får väljas hur många gånger som helst?

a) Vi väljer bokstäver utan upprepning och med hänsyn till ordningen.

$$P(6, 5) = \frac{6!}{(6-5)!} = 720$$

Svar: Det finns 720 koder

b) Vi väljer bokstäver med upprepning och med hänsyn till ordningen.

Till varje plats finns fem bokstäver att välja på.

Antalet koder $= 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7\,776$

Svar: Det finns 7 776 koder.

2156 Sebbe har gjort en tipspromenad med fyra frågor. Varje fråga har tre svarsalternativ markerade 1, X eller 2.

Hur stor är sannolikheten att få exakt två rätt om man fyller i svaren helt slumpartat?

Metod 1:

Antalet möjliga sätt att fylla i svaren $= 3^4 = 81$

Antalet sätt att få rätt på de två första frågorna och fel på de två sista är

$$\binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} = 4$$

Antalet sätt att placera de två frågorna som är rätt bland de fyra frågorna.

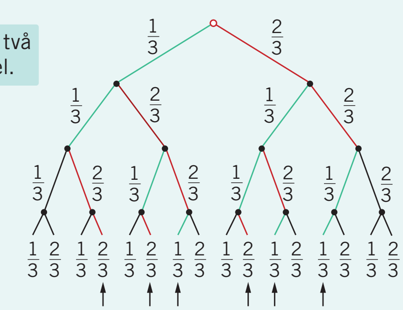
Antalet sätt att få exakt två rätt är $\binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2} = 24$

Sannolikheten att få exakt två rätt $= \frac{24}{81} = \frac{8}{27} \approx 0{,}30$

Metod 2:

Vi ritar ett träddiagram och skriver sannolikheterna på grenarna.

6 grenar med två rätt och två fel.



$P(\text{rätt}) = \frac{1}{3}$ och $P(\text{fel}) = \frac{2}{3}$

$$P(2 \text{ rätt och } 2 \text{ fel}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{24}{81} = \frac{8}{27} \approx 0{,}30$$

Svar: Sannolikheten är ca 30 %.

1

2157 I ett handbollslag ska 4 av 16 spelare väljas ut för ett dopningstest.

På hur många sätt kan spelarna väljas ut?

2158 Oscar, Inez, Ivar och ytterligare fyra personer ska ställa sig i kö.

På hur många sätt kan personerna placera sig om vi vet att

a) Oscar står sist i kön

b) Inez eller Ivar står på den första platsen i kön?

2159 Hur många sexsiffriga koder kan bildas av siffrorna

a) 2 2 2 1 6 9 b) 2 2 8 8 6 9

2160 Formulera en uppgift inom kombinatorik som kan lösas med följande beräkning

a) 5! b) 2^5 c) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

2161 I en klass med 32 elever ska tre av eleverna slumpvis väljas för att presentera sina arbeten under en lektion.

a) På hur många sätt kan de tre eleverna väljas om man tar hänsyn till i vilken ordning eleverna ska presentera?

b) Hur stor är sannolikheten att de tre elever som sitter närmast dörren får göra sina presentationer under lektionen?

2162 Poker spelas med en vanlig kortlek som innehåller 52 olika kort: 13 spader ♠, 13 hjärter ♥, 13 ruter ♦ och 13 klöver ♣, En pokerhand har fem kort.

a) Hur många möjliga pokerhänder finns det?

b) Hur många pokerhänder innehåller minst ett hjärterkort?

2

2163 Fia kastar en sexsidig tärning 10 gånger.

Hur stor är sannolikheten att tre av kasten visar en femma?

2164 Evy har gjort en tipspromenad med 16 frågor som ska besvaras med 1, X eller 2.

Hon påstår att

a) det finns fler än 16 miljoner olika möjligheter att skriva en sådan tipsrad. Stämmer det?

b) det bara finns 17 tipsrader med minst 15 rätt. Stämmer det?

Motivera dina svar.

2165 Andreh ska välja några av de 12 bordsdekorationerna till sitt kalas.

På hur många sätt kan han, utan hänsyn till ordningen, välja

a) 3 dekorationer om minst 1 ska vara gul

b) 6 dekorationer om minst 4 av dem ska vara blå?

2166 12 personer ska sätta sig på en bänk.

Av dem tillhör två personer familjen A, tre tillhör familjen B och sju tillhör familjen C.

a) På hur många sätt kan de placera sig om man vill att personer i samma familj ska sitta bredvid varandra?

b) Hur stor är sannolikheten att alla som tillhör en och samma familj sitter bredvid varandra om alla blir slumpmässigt placerade?

3

2167 Hur många binära tal finns det som består av 16 siffror varav 7 är ettor, där en av ettorna är placerad som första siffra i talet?

2168 Linn bakar tio cupcakes. Det finns fyra möjliga dekorationer.

På hur många sätt kan dekorationerna fördelas om

a) alla dekorationer inte behöver användas

b) alla dekorationer måste användas?

Poker och Yatzy

Poker spelas med en vanlig kortlek som har 52 kort. I kortleken finns 4 färger (hjärter, ruter, spader och klöver) och varje färg finns i 13 valörer. En pokerhand består av fem kort.

Exempel 1 *Tvåpar* i poker betyder 2 kort av en valör och 2 kort av en annan valör, samt 1 kort av en tredje valör.

Hur många pokerhänder med tvåpar finns det?

Först ska vi välja 2 valörer av 13.

Det kan göras på $\binom{13}{2}$ sätt.

Sedan ska vi välja 2 färger av 4 för den ena valören. Det kan göras på $\binom{4}{2}$ sätt.

Därefter ska vi välja 2 färger av 4 för den andra valören. Det kan göras på $\binom{4}{2}$ sätt.

Det sista kortet kan väljas på $4 \cdot 11 = 44$ olika sätt eftersom 2 valörer inte får väljas.

Antalet möjliga pokerhänder med tvåpar är $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 44 = 123\,552$

Exempel 2 Yatzy är ett tärningsspel, där man kastar fem vanliga tärningar. I spelet får man kasta tre gånger, men vi ska undersöka utfallen vid ett kast. Vi kallar det ett yatzykast.

Ett par i Yatzy betyder 2 tärningar med samma valör (samma antal prickar) och 3 tärningar med andra valörer. De tre tärningar som inte ingår i paret måste ha olika valörer, annars får man ett tvåpar eller en kåk.

Hur många yatzykast med ett par finns det?

Först ska vi välja 1 valör av 6. Det kan göras på 6 sätt.

Sedan ska vi välja 2 tärningar av 5, vilket kan göras på $\binom{5}{2}$ sätt.

De tre sista tärningarna måste ha olika valörer. De kan väljas på $P(5, 3)$ sätt.

Antalet möjliga yatzykast med ett par är

$6 \cdot \binom{5}{2} \cdot P(5, 3) = 3\,600.$

Tema

När man beräknar antalet pokerhänder/yatzykast med t.ex. ett par, ska de händer/kast som är bättre (t.ex. tvåpar) inte inkluderas i antalet.

1 Hur många olika pokerhänder finns det?

2 Hur många pokerhänder har

a) *ett par*, dvs. 2 kort i en valör och 3 kort av andra valörer

b) *tretal* (triss), dvs. 3 kort i en valör och 2 kort i andra valörer

c) *fyrtal*, dvs. 4 kort i en valör och 1 kort i en annan valör.

3 Hur många pokerhänder har

a) *stege i färg* (straight flush), dvs. 5 kort i rad i samma färg, där ess kan vara både 1 och 14

b) *stege*, dvs. 5 kort i rad, men inte i samma färg

c) *färg*, dvs. 5 kort i samma färg?

4 Beräkna sannolikheten att du får en pokerhand med

a) ett par
b) tvåpar
c) triss
d) fyrtal
e) stege i färg
f) stege
g) färg
h) kåk.

Stämmer sannolikheterna med händernas rangordning i poker?

5 Hur många pokerhänder har *kåk*, dvs. 3 kort i en valör och 2 kort i en annan valör?

6 Hur många utfall finns det vid ett yatzykast?

7 Hur många av utfallen vid ett yatzykast har

a) *fyrtal*, dvs. 4 tärningar visar lika

b) *tretal*, dvs. 3 tärningar visar lika

c) *tvåpar*, dvs. 2 tärningar visar en valör och 2 tärningar en annan valör och den sista tärningen en tredje valör

d) *kåk*, dvs. 3 tärningar i en valör och 2 tärningar i en annan valör

e) *stege*, dvs. 5 tärningar som visar 1–5 eller 5 tärningar som visar 2–6

f) *yatzy*, dvs. alla tärningarna visar lika?

Motivera ditt svar.

8 Hur stor är sannolikheten att du i ett yatzykast får

a) ett par
b) tvåpar
c) tretal
d) fyrtal
e) kåk
f) stege
g) yatzy?

2.2 Binomialsatsen och lådprincipen

Binomialsatsen

binom Ett *binom* är ett polynom som består av endast två termer.

Vi ska studera utvecklingar av ett binom $a + b$ upphöjt till ett naturligt tal n. Utvecklingarna av $(a + b)^n$ för $n = 0, 1, 2, 3$ och 4 visas nedan.

Resultatet på en rad får vi genom att multiplicera föregående rad med $(a + b)$.

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$

Vi försöker se ett mönster för att kunna förutsäga hur nästa utveckling ser ut. Enligt utvecklingarna ovan bör $(a + b)^5$

- innehålla 6 termer
- innehålla termerna a^5 och b^5
- endast ha termer där summan av exponenterna är 5.

Uttrycket $(a + b)^5 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$ kan skrivas

$(a + b)^5 = a^5 + \_\_\, a^4 b + \_\_\, a^3 b^2 + \_\_\, a^2 b^3 + \_\_\, ab^4 + \_\_\, b^5$

Hur får vi de utelämnade koefficienterna?

Termen a^4b får vi genom att multiplicera a från fyra parenteser med b från en parentes. Till exempel:

$(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b) = \ldots + a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b + \ldots = \ldots + a^4b + \ldots$

eller

$(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b) = \ldots + a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot a + \ldots = a^4b + \ldots$

Antalet sätt att välja ett b ur fem parenteser är $\binom{5}{1} = 5$

Koefficienten för a^4b är 5.

Termen a^3b^2 får vi genom att multiplicera a från tre parenteser med b från två parenteser. Till exempel:

$(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b) = \ldots + a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b + \ldots = \ldots + a^3b^2 + \ldots$

Antalet sätt att välja två b ur fem parenteser är $\binom{5}{2} = 10$ sätt.

Koefficienten för a^3b^2 är 10.

Vi sammanfattar:
$(a + b)^5$ kan utvecklas och förenklas till ett uttryck med 6 termer.

Term	Antal *a*	Antal *b*	Koefficient (antal sätt att välja *b*)
a^5	5	0	$\binom{5}{0} = 1$
a^4b	4	1	$\binom{5}{1} = 5$
a^3b^2	3	2	$\binom{5}{2} = 10$
a^2b^3	2	3	$\binom{5}{3} = 10$
ab^4	1	4	$\binom{5}{4} = 5$
b^5	0	5	$\binom{5}{5} = 1$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Utvecklingen av $(a + b)^n$ beskrivs av binomialsatsen.

Binomialsatsen

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n} b^n$$

binomialkoefficient

Koefficienterna $\binom{n}{k}$ i uttrycket ovan kallas *binomialkoefficienter*.

Pascals triangel

För att underlätta binomialutveckligar har man samlat de enklaste binomialkoefficienterna i en tabell, som kallas *Pascals triangel*.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

1 + 3 = 4

6 + 4 = 10

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Varje tal i Pascals triangel är summan av de båda närmaste talen i raden ovanför, vilket beskrivs med Pascals formel.

Pascals formel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad 1 \le k \le n-1$$

Vi bevisar Pascals formel genom att utgå från högerledet.

$$\text{HL} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-1-k)!(n-k)} + \frac{k(n-1)!}{(k-1)!\cdot k(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)! - k(n-1)! + k(n-1)!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \text{VL}$$

V.S.B.

Antalet kombinationer av k föremål bland n är lika med summan av antalet kombinationer där ett visst föremål ingår och de kombinationer där föremålet inte ingår.
Pascals formel kan alltså ses som ett specialfall av additionsprincipen.

Exempel Antalet sätt att välja 3 siffror av siffrorna 1–8 utan hänsyn till ordningen är $\binom{8}{3} = 56$.

- I hur många av de 56 kombinationerna ingår siffran 8?

  Om 8:an är bestämd ska 2 siffror av 7 väljas.

  Det finns $\binom{7}{2} = 21$ kombinationer där 8 ingår.

- I hur många av de 56 kombinationerna ingår inte siffran 8?

  Om 8 inte ingår ska 3 siffror av 7 väljas.

  Det finns $\binom{7}{3} = 35$ kombinationer där 8 inte ingår.

Vi ser att Pascals formel stämmer i detta fall.

$$\binom{8}{3} = \binom{7}{3} + \binom{7}{2}$$

$$56 = 35 + 21$$

2201 Bestäm de tre första termerna i utvecklingen av $(x + y)^6$ med hjälp av

a) Pascals triangel b) binomialsatsen.

a) Koefficienterna för utvecklingen är enligt Pascals triangel

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

$$(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + \ldots$$

b) $(x + y)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^{n-k} y^k$

Första termen $= \binom{6}{0} x^6 = x^6$

Andra termen $= \binom{6}{1} x^5 y = 6x^5y$

Tredje termen $= \binom{6}{2} x^4y^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} x^4y^2 = 15x^4y^2$

2202 Av de fem bokstäverna A, B, C, D och E ska olika kombinationer med fyra olika bokstäver väljas ut.

Detta kan ske på $\binom{5}{4} = 5$ sätt.

a) I hur många av dessa urval ingår bokstaven A?

b) I hur många urval saknas bokstaven A?

c) Visa att Pascals formel stämmer i detta exempel.

a) Tillsammans med A ska tre av de fyra övriga bokstäverna väljas.

Antal kombinationer där A ingår $= \binom{4}{3} = 4.$

b) Om A saknas måste de övriga fyra bokstäverna ingå.

Antal kombinationer där A saknas $= \binom{4}{4} = 1.$

c) $\text{VL} = \binom{5}{4} = 5$

$\text{HL} = \binom{4}{4} + \binom{4}{3} = 1 + 4 = 5$

VL = HL, formeln stämmer!

$$\binom{5}{4} = \binom{4}{4} + \binom{4}{3}$$

2203 Bestäm med binomialsatsen de tre första termerna i utvecklingen av $(a - 2b)^{12}$

$(a - 2b)^{12} = (a + (-2b))^{12}$

Första termen $= a^{12}$

Andra termen $= \binom{12}{1} a^{11}(-2b)^1 = 12a^{11}(-2b) = -24a^{11}b$

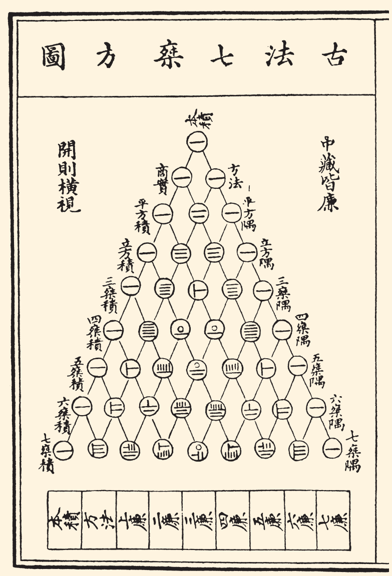
Tredje termen $= \binom{12}{2} a^{10}(-2b)^2 = 66a^{10} \cdot 4b^2 = 264a^{10}b^2$

Historik

Pascals triangel

Blaise Pascal (1623–1662) var en fransk matematiker, fysiker och filosof. I matematiska skrifter beskrev han teorier om bl a geometri, sannolikhetslära, talföljder och serier. Pascal konstruerade även en räknemaskin och gjorde grundläggande fysikaliska försök där han mätte tryck med kvicksilverbarometrar. Hans namn Pascal står som måttenhet för tryck.

Triangelformade tabeller över binomialkoefficinterna var kända långt innan Pascal arbetade med dem. I Iran kallas triangeln Khayyams triangel, efter matematikern Omar Khayyam (1048–1131). I Kina kallas triangeln Yang Huis triangel efter 1200-talsmatematikern med samma namn.



1

2204 Utveckla med hjälp av Pascals triangel.

a) $(x + y)^3$
c) $(x + y)^4$
b) $(x - y)^3$
d) $(x + 2y)^4$

2205 Bestäm de tre första termerna i utvecklingen av

a) $(x + 3y)^5$
b) $(x - 3y)^5$

2206 Bestäm tredje och fjärde termen i utvecklingen av

a) $(x - y)^7$
b) $(2a + 3b)^{10}$

2207 Martin har en anställning där han arbetar tre dagar varje vecka.

a) På hur många sätt kan tre av veckans sju dagar väljas ut?
b) I hur många av urvalen ingår lördag?
c) I hur många av urvalen saknas lördag?
d) Beräkna summan av antalet urval där lördag ingår med antalet där lördag inte ingår och jämför det med svaret i a).

2208 EU består av 27 medlemsländer (år 2023). Till ett möte ska en representant från fem olika medlemsländer bjudas in.

a) På hur många sätt kan de fem länderna väljas ut?
b) I hur många urval ingår Sverige?
c) I hur många urval saknas Sverige?

2209 Formulera en uppgift med kombinatorik som handlar om årets månader i en vardaglig situation och som uppfyller likheten

$$\binom{12}{4} = \binom{11}{4} + \binom{11}{3}$$

2

2210 Rad $n = 8$ i Pascals triangel ser ut så här:

1 8 28 56 70 56 28 8 1

a) Hur ser nästa rad i Pascals triangel ut?
b) I utvecklingen av $(a + b)^{10}$ finns två termer med koefficienten 120. Vilka termer är det?

2211 Bestäm koefficienten för

a) x^4y^7 i utvecklingen av $(x + y)^{11}$
b) x^4y^3 i utvecklingen av $(x - 3y)^7$

Kontrollera med symbolhanterande verktyg.

2212 Undersök om termen $80x^3y^2$ ingår i utvecklingen av följande uttryck.

a) $(2x - y)^5$
b) $(2x + y)^5$
c) $(x + 2y)^5$

2213 Bestäm den konstanta termen i uttrycket

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{30}$$

2214 Visa, utan att använda Pascals formel, att

$$\binom{n}{3} = \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2}$$

2215 Koefficienten för x^3 i utvecklingen av $(ax + 3)^6$ är 4 320.

Bestäm a.

3

2216 a) Skriv en formeln för summan av koefficienterna i en rad i Pascals triangel.

b) Visa att formeln gäller för alla rader n.

2217 Visa att

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Lådprincipen

Exempel Om en brevbärare ska lägga 6 brev i 5 brevlådor, så måste åtminstone en brevlåda innehålla två eller fler brev. Detta är ett exempel på *lådprincipen* som kan hjälpa oss att lösa många olika typer av kombinatoriska problem.

lådprincipen

Om brevbäraren i stället har 16 brev att lägga i de 5 lådorna så kommer åtminstone en brevlåda att innehålla 4 eller fler brev.

Motivering:
$16 = 5 \cdot 3 + 1$ (3 brev i varje låda och ytterligare 1 brev)

Lådprincipen

Om $n + 1$ föremål ska placeras i n lådor, så måste åtminstone en låda innehålla två eller fler av föremålen.

Om $n \cdot k + 1$ föremål ska placeras i n lådor, så måste åtminstone en låda innehålla $k + 1$ eller fler av föremålen.

Lådprincipen kan tyckas självklar, men tyvärr är det inte alltid så lätt att identifiera vad som är "låda" och vad som är "föremål".

2218 Visa att i en grupp på 13 personer har minst två personer födelsedag i samma månad.

Lådor: Årets 12 månader

Föremål: De 13 födelsedagarna

Placera de 13 födelsedagarna i de 12 månaderna. Enligt lådprincipen innehåller då åtminstone en månad två eller fler födelsedagar.

2219 Vi antar att en människa har färre än 500 000 hårstrån på huvudet. Storstockholm har ca 2 400 000 invånare. Visa att åtminstone 5 av dessa invånare har exakt samma antal hårstrån.

Lådor: 500 000 st, dvs. 0, 1, 2, ..., 499 999 hårstrån

Föremål: 2 400 000 stockholmare

Eftersom $2\,400\,000 > 500\,000 \cdot 4 + 1$ så säger lådprincipen att åtminstone en låda innehåller minst $4 + 1$ föremål. Det innebär att minst 5 stockholmare har samma antal hårstrån på huvudet.

2220 Visa att om fem punkter placeras i en liksidig triangel med sidan 6 cm, så finns det minst två punkter vars avstånd är högst 3 cm.

Triangeln delas i fyra liksidiga deltrianglar med sidan 3 cm.

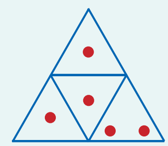
Lådor: De fyra deltrianglarna ($n = 4$)

Föremål: De fem punkterna ($n + 1 = 5$)

Placera de fem punkterna i de fyra deltrianglarna.

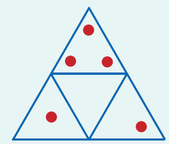
Enligt lådprincipen innehåller då minst en triangel två eller fler punkter. Avståndet mellan två sådana punkter är högst 3 cm.

T.ex.



6 cm

T.ex.



6 cm

1

2221 I en låda ligger enfärgade, osorterade strumpor i färgerna svart, vit, blå och grå.

Hur många strumpor måste man ta ur lådan för att vara säker på att få ett par av samma färg?

2222 Visa att det i en klass på 32 elever finns åtminstone två som har födelsedag på samma datum i någon månad.

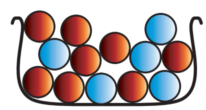
2223 Till en nordisk skolkonferens kom det sammanlagt 31 elever från Sverige, Norge, Danmark, Finland och Island.

Visa att något land representeras av minst 7 elever.

2224 EU-parlamentet består av 705 personer från 27 olika stater.

Visa att minst 27 personer kommer från samma stat.

2225



I en skål ligger 8 röda och 5 blå kulor.

Hur många kulor måste du slumpvis ta upp för att säkert få två av

a) samma färg

b) olika färg

c) varje färg?

2

2226 I ett rum finns det n gifta par.

Hur många av dessa $2n$ personer måste väljas ut för att man ska vara säker på att få minst ett gift par? Motivera.

2227 Visa att om fem punkter placeras i en kvadrat med sidan 2 cm, så finns det minst två punkter vars avstånd är högst $\sqrt{2}$ cm.

2228 En låda innehåller 50 tröjor i fyra olika färger.

Förklara varför det är

a) minst 13 tröjor av samma färg

b) minst 14 tröjor av samma färg om man vet att det finns exakt 8 röda tröjor.

2229 Enligt SCB hade Sverige 10 521 556 invånare den 27 december 2022.

Någon dag under året kommer åtminstone x svenska invånare har födelsedag.

Bestäm det största möjliga värdet på x.

2230 Ett schackbräde består av 64 rutor fördelade på 8 rader och 8 kolumner. I varje ruta står högst en pjäs.

Vilket är det högsta antalet pjäser som kan ställas ut utan att

a) två pjäser hamnar i rutor bredvid varandra i någon rad

b) två pjäser hamnar i rutor bredvid varandra i någon rad, kolumn eller diagonal?

2231 Ett år fanns det 8,1 miljoner personer som var 20 år eller äldre i Sverige.

Medianlönen bland dessa personer var då 33 000 kr.

Visa att det detta år fanns åtminstone 121 svenskar som hade exakt på kronan samma månadsinkomst.

2232 En musiker övar 70 timmar under en period på 12 dagar.

Visa att hon övar sammanlagt minst 12 timmar under två på varandra följande dagar. (Anta att hon övar i hela timmar.)

3

2233 Visa att om 10 punkter placeras i en liksidig triangel med sidan 6 cm, så finns det två punkter vars avstånd är högst 2 cm.

2234 På Stryktipset ska man tippa om en match slutar med: 1 (hemmavinst), X (oavgjord) eller 2 (bortavinst).

En stryktipsrad består av 13 matcher.

Hur många rader måste man tippa för att vara säker på att ha minst 5 rätt?

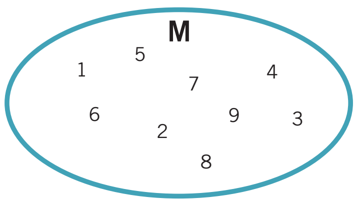
2.3 Mängdlära

Mängder – några begrepp

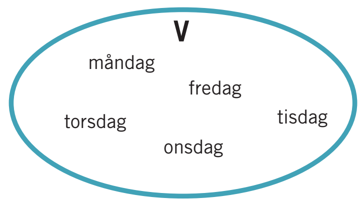
mängd
element

Inom matematiken är en *mängd* en samling objekt. Objekten kallas mängdens *element*. En mängd betecknas ofta med stor bokstav och elementen kan anges inom klamrar {} eller genom att ringa in de element som tillhör mängden.

Exempel 1



M = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}



V = {måndag, tisdag, onsdag, torsdag, fredag}

tillhör ∈
tillhör inte ∉

Talet 6 är ett element som *tillhör* mängden **M**. Det kan skrivas: $6 \in$ **M**

Lördag *tillhör inte* mängden **V**. Det kan skrivas: lördag $\notin$ **V**

Två mängder är lika om de innehåller samma element. I vilken ordning man anger elementen eller om samma element förekommer flera gånger saknar betydelse.

Följande mängder är alltså lika: $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}$

tomma mängden, ∅

Den mängd som inte innehåller några element kallas den *tomma mängden* och betecknas $\emptyset$ eller {}.

Exempel 2

Låt **A** $= \{2, 5, 7\}$ och **B** $= \{2, 5\}$.

delmängd ⊆

Vi säger att **B** är en *delmängd* till **A** om varje element i **B** också är ett element i **A**. Det kan skrivas **B** $\subseteq$ **A**. Notera att **A** inte är en delmängd av **B**.

Det finns åtta delmängder till mängden **A**. De är:

$\emptyset$ $\{2\}$ $\{5\}$ $\{7\}$ $\{2, 5\}$ $\{2, 7\}$ $\{5, 7\}$ $\{2, 5, 7\}$

Den tomma mängden $\emptyset$ är enligt överenskommelse en delmängd till varje mängd.

Att antalet delmängder i detta fall är 8 kan vi förklara på följande sätt: För varje element i **A** finns 2 möjligheter: Det tillhör eller tillhör inte delmängden. Eftersom **A** har 3 element är antalet delmängder $2^3 = 8$.

Allmänt gäller:

Antal delmängder

> En mängd med n element har totalt 2^n delmängder.

äkta delmängd ⊂

En *äkta delmängd* till **A** är en delmängd som inte är lika med **A**. Det finns alltså sju äkta delmängder till mängden **A**. I dem ingår inte $\{2, 5, 7\}$. Beteckningen för äkta delmängd är $\subset$.

Det finns olika sätt att beskriva en mängd, t.ex:

Mängden **M** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} eller **M** = {positiva ental}

mängdbyggare

Mängden **M** kan också skrivas med en så kallad *mängdbyggare*:

M = $\{x \mid x$ är ett heltal, $0 < x < 10\}$

Detta utläses: Mängden **M** består av alla element x, där x är heltal större än noll och mindre än 10.

Mängden **M** innehåller 9 element. En mängd kan också innehålla ett oändligt antal element t.ex. mängden av alla heltal.

Vissa talmängder har standardbeteckningar:

Talmängd	Beteckning	Beskrivning
De naturliga talen	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
De hela talen	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
De rationella talen	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q} = \left\{\text{Alla tal } \frac{a}{b} \text{ där } a \text{ och } b \in \mathbb{Z} \text{ och } b \neq 0\right\}$
De reella talen	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} = \{$Alla rationella och irrationella tal$\}$
De komplexa talen	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} = \{$Alla tal $a + bi$ där a och $b \in \mathbb{R}$ och i är den imaginära enheten.$\}$

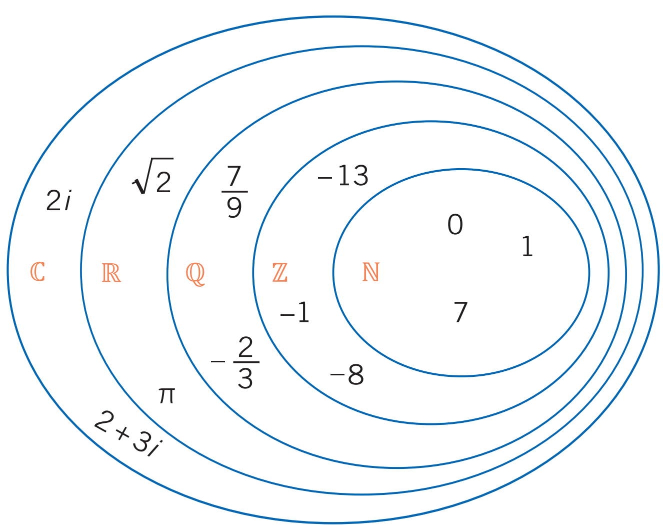
Beteckningarna Z^+ och Z^- anger positiva respektive negativa heltal.

Med hjälp av standardbeteckningar kan vi skriva mängden

M = $\{x \mid x \in \mathbb{N}, 0 < x < 10\}$

Figuren nedan visar att de naturliga talen $\mathbb{N}$ är en äkta delmängd av de hela talen $\mathbb{Z}$, som är en äkta delmängd av de rationella talen $\mathbb{Q}$ osv.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$



2301 Vi har fyra mängder:

A = {a, b, c, d} **B** = {c, d} **C** = {a, d, e} **D** = Ø

Stämmer det att

a) $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ b) $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{A}$ c) $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{A}$?

Motivera.

a) Ja, **B** är en delmängd av **A**.

Motivering:
Alla elementen i mängd **B** ingår i mängd **A.**

b) Nej, **C** är inte en delmängd av **A**.

Motivering:
Alla element i mängd **C** ingår inte i mängd **A**.

c) Ja, den tomma mängden är en delmängd av **A**.

Motivering:
Den tomma mängden är en delmängd av alla mängder.

2302 Låt **A** = $\{x \mid x$ är ett positivt heltal och $x < 5\}$

a) Ange alla element i mängd **A**.

b) Hur många delmängder har mängd **A**?

a) Mängd **A** innehåller bara positiva heltal som är mindre än 5.

A = {1, 2, 3, 4}

b) Antal element: $n = 4$
Antal delmängder: $2^n = 2^4 = 16$

Svar: Mängd **A** har 16 delmängder.

1

2303 Vi har tre mängder:

M = {5, 10, 15}

N = {5, 15}

P = {5, 10, 15, 20, 25}

a) Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt.

A $10 \in \mathbf{P}$ C $20 \notin \mathbf{M}$

B $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ D $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{P}$

b) Hur många delmängder har **M**?

c) Ange alla delmängder till **N**.

2304 Skriv följande korrekta påståenden med mängdlärans symboler.

a) Talet 4 tillhör mängden naturliga tal.

b) Talet π tillhör mängden reella tal.

c) Talet π tillhör inte mängden rationella tal.

d) {5, 10} är en delmängd av {5, 10, 20}.

e) De reella talen är en delmängd av de komplexa talen.

f) Den tomma mängden är en delmängd av de hela talen.

2305 Vilken av symbolerna $\in$ eller $\notin$ ska stå i rutan?

a) $7 \,\square\, \{2, 5, 9, 17\}$

b) $13 \,\square\, \mathbb{N}$

c) $91 \,\square\,$ {alla primtal}

d) $6 \,\square\, \{x \mid x$ är en faktor i $128\}$

e) $36 \,\square\, \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

f) $\sqrt{2} \,\square\, \mathbb{Z}$

2306 Ange de element som ingår i mängderna

a) **A** = {alla positiva, udda heltal mindre än 12}

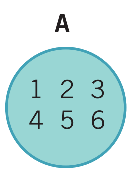
b) **B** = {de tre största primtalen mindre än 20}

c) **C** = $\{x \mid x$ är ett jämnt tal och $0 < x < 10\}$

d) **D** = $\{n \mid n \in \mathbb{Z}$ och $-4 < n < 4\}$

2307 Beskriv mängden **A** med en mängdbyggare, dvs. $\{x \mid \ldots\}$

a)



b) **A** = $\{5, 10, 15, 20, 25, \ldots\}$

c) **A** = $\{5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

2308 Låt **M** = {Bo, My, Pi, Ia}

Ange alla delmängder till mängden **M** som har

a) 3 element b) 2 element.

2309 Hur många delmängder har

a) $\{a, a, b, c, d\}$

b) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 < x < 10\}$

2310 Mängden **M** = $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13\}$ har en delmängd **D**.

Ange alla element i delmängden **D** om

a) **D** = $\{x \mid x < 4\}$

b) **D** = $\{n \mid 3$ är en faktor i $n\}$

c) **D** = $\{x \mid x$ är ett primtal$\}$

d) **D** = $\{x \mid 2$ delar x (dvs. $2|x$)$\}$

2

2311 Hur många mängder **X** uppfyller

a) $\{a\} \subseteq \mathbf{X} \subseteq \{a, b, c\}$

b) $\{1, 2\} \subseteq \mathbf{X} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2312 Ange alla element i mängden **M** om

a) **M** = $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ och $x^2 - 6x - 7 = 0\}$

b) **M** = $\{x \mid x \in \mathbb{Z}$ och $|x| < 3\}$

c) **M** = $\{x \mid x \equiv 2 \pmod 3$ och $1 < x < 10\}$

d) **M** = $\{a_n \mid a_n = 3 \cdot 2^{n-1}, n \in \mathbb{Z}^+$ och $n \leq 4\}$

2313 Två mängder är givna

A = $\{x \mid x \in 2n + 1$ där $n \in \mathbb{N}$ och $x < 6\}$

B = $\{x \mid x \in 2n$ där $n \in \mathbb{N}$ och $0 < x < 6\}$

Är det sant att **A** har dubbelt så många delmängder som **B**?
Motivera ditt svar.

2314 **A** = $\{x \mid x \equiv 1 \pmod 3\}$

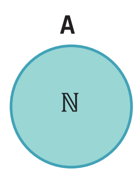
B = $\{x \mid x \equiv 1 \pmod{12}\}$

a) Ange de tre minsta positiva talen som ingår i både **A** och **B**.

b) Stämmer det att $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$?
Motivera ditt svar.

3

2315 Ange de element som mängderna **A**, **B** och **C** har gemensamt om



B = $\{x \mid x(2x - 12)(x - 2) = 0\}$

C = $\{n \mid n \equiv 1 \pmod 2\}$

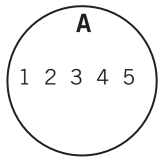
2316 **M** = $\{x \mid \text{SGD}(x, 60) = 1$ och $1 < x < a\}$

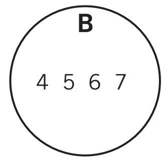
Mängden **M** har 128 delmängder.

Vilket är det minsta heltal a kan anta?

Mängdoperationer och Venndiagram

Mängderna **A** och **B** har två gemensamma element, 4 och 5.



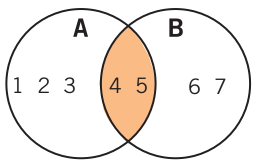


A = {1, 2, 3, 4, 5} **B** = {4, 5, 6, 7}

Vi bildar en mängd av de element som tillhör både **A** och **B**.

snitt, ∩

Den nya mängden kallas *snittet* av **A** och **B** och skrivs
A ∩ **B** = {4, 5}

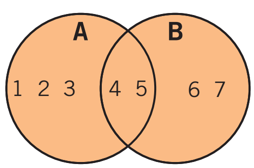


A ∩ B

Vi bildar en mängd av alla element som tillhör åtminstone en av mängderna **A** och **B,** dvs. tillhör **A** och/eller **B.**

union, ∪

Den nya mängden kallas *unionen* av **A** och **B** och skrivs
A ∪ **B** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}



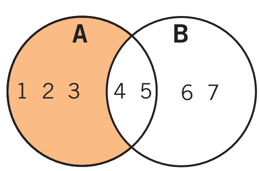
A ∪ B

Elementen 4 och 5, som finns i båda mängderna, skrivs bara en gång.

Vi bildar en mängd av de element som tillhör **A** men inte **B**.

**differens, **

Den nya mängden kallas *differensen* av **A** och **B** och skrivs
A \ **B** = {1, 2, 3}



A \ B

Lägg märke till att **B** \ **A** = {6, 7} ≠ **A** \ **B**.

De kommutativa lagarna gäller för både snitt och union.
A ∩ **B** = **B** ∩ **A** **A** ∪ **B** = **B** ∪ **A**

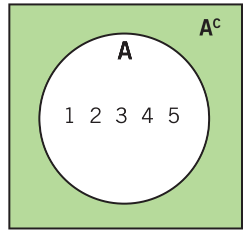
grundmängd

Den mängd som innehåller alla element som kan komma ifråga i en viss situation kallas *grundmängd*. Andra namn för grundmängd är universum eller universalmängd.

Vi utgår från grundmängden $\mathbf{G} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ och bildar en mängd av de element som ingår i $\mathbf{G}$ men inte i $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

komplement

Den nya mängden kallas för *komplementet* till $\mathbf{A}$ och skrivs $\complement\mathbf{A} = \{6, 7, 8, 9\}$ eller $\mathbf{A}^c = \{6, 7, 8, 9\}$



Venndiagram

Figurerna som vi har ritat för att illustrera mängdbegreppen snitt, union, differens och komplement kallas *Venndiagram*. Namnet kommer fránden brittiske logikern John Venn.

2317 Tre mängder är givna. $\mathbf{A} = \{3, 5, 7, 9\}$, $\mathbf{B} = \{2, 4, 5, 7, 8\}$ och grundmängden $\mathbf{G} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Bestäm

a) $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$ b) $\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$ c) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ d) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ e) $\mathbf{B}^c$

a) Differensen av **A** och **B**:
$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \{3, 9\}$

De element som tillhör **A** men inte **B**.

b) Differensen av **B** och **A**:
$\mathbf{B} \setminus \mathbf{A} = \{2, 4, 8\}$

De element som tillhör **B** men inte **A**.

c) Unionen av **A** och **B**:
$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

Alla element som tillhör minst en av mängderna **A** eller **B**.

d) Snittet av **A** och **B**:
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{5, 7\}$

De element som tillhör både **A** och **B**.

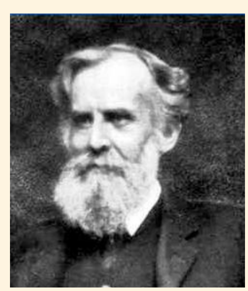
e) Komplementet till **B**:
$\mathbf{B}^c = \{1, 3, 6, 9\}$

De element som tillhör grundmängden **G** men inte **B**.

John Venn

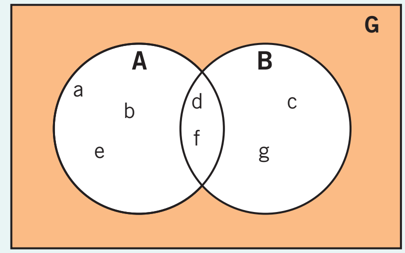
John Venn var en brittisk logiker och filosof, mest känd för att ha utvecklade de diagram som nu bär hans namn.

Ursprungligen skapade Venn diagrammen som ett avancerat försök att överföra logiska relationer till matematisk algebra. I dag hittar vi Venndiagram i de allra flesta läroböcker i matematik och logik.



John Venn (1834–1923)

2318 I Venndiagrammet visas de element som tillhör mängderna **A** och **B**. Grundmängden **G** är de tio första bokstäverna i alfabetet:
$\mathbf{G} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$



Bestäm

a) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$ b) $\mathbf{A}^c \cap \mathbf{B}$ c) $\complement(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

a) Vi ska ange de element som ingår i unionen av **A** och **B** men inte i snittet av **A** och **B**.

$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{d, f\}$

Svar: $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \{a, b, c, e, g\}$

b) Vi börjar med att bestämma komplementet till **A**.

$\mathbf{A}^c = \{c, g, h, i, j\}$ De element som tillhör grundmängden **G** men inte **A**.

Vi ska ange de element som ingår både i komplementet till **A** och i mängden $\mathbf{B} = \{c, d, f, g\}$.

Svar: $\mathbf{A}^c \cap \mathbf{B} = \{c, g\}$

c) Vi börjar med att bestämma unionen av **A** och **B**.

$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

Vi ska ange de element som ingår i grundmängden **G** men inte i unionen av **A** och **B**.

Svar: $\complement(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \{h, i, j\}$

1

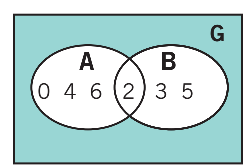
2319 Tre mängder är givna:

$\mathbf{A} = \{a, c, k, z\}$
$\mathbf{B} = \{a, i, k, p\}$
$\mathbf{C} = \{a, c, p\}$

Bestäm

a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{C}$ d) $\mathbf{B} \cup \mathbf{C}$
b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ e) $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$
c) $\mathbf{B} \cap \mathbf{C}$ f) $\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$

2320 Venndiagrammet visar delmängderna **A** och **B** till grundmängden $\mathbf{G} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



Bestäm

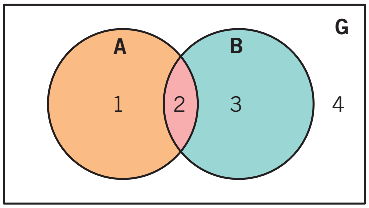
a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ c) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})^c$
b) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ d) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})^c$

2321 Två mängder är givna:

$\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\mathbf{B} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

Rita mängderna i ett Venndiagram.

2322 Delmängderna **A** och **B** delar in grundmängden **G** i fyra områden markerade med olika färger och siffrorna 1–4.



Vilket eller vilka områden i Venndiagrammet motsvarar

a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$
b) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$
c) $\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$
d) $\mathbf{A}^c$

2323 Bestäm komplementet till **A** med avseende på grundmängden
$\mathbf{G} = \{1, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 15, 21, 45\}$

a) $\mathbf{A} = \{3, 7, 15, 21\}$
b) $\mathbf{A} = \{x \mid x \in \mathbf{G}$ och är ett primtal$\}$
c) $\mathbf{A} = \{x \mid x \in \mathbf{G}$ och x är delbart med 3$\}$
d) $\mathbf{A} = \{x \mid x \in \mathbf{G}$ och $3x \in \mathbf{G}\}$

2324 Låt grundmängden vara alla postiva heltal och

$\mathbf{P} = \{x \mid x$ primtal$\}$
$\mathbf{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$
$\mathbf{T} = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

Ange mängderna

a) $\complement \mathbf{A}$
b) $\mathbf{P} \cap \mathbf{T}$
c) $\mathbf{P} \cap \complement \mathbf{A}$
d) $\complement \mathbf{A} \cap \mathbf{T}$

2

2325 Låt $\mathbf{A} = \{$likbenta trianglar$\}$
$\mathbf{B} = \{$liksidiga trianglar$\}$
$\mathbf{C} = \{$rätvinkliga trianglar$\}$

Är det sant att

a) **B** är en delmängd av **A**
b) **C** är en delmängd av $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$?

Motivera dina svar.

2326 Sätt $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
$\mathbf{B} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ och $\mathbf{C} = \{2, 4, 6, 8\}$
samt bestäm mängderna

a) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}$
b) $(\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$
c) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{C} \cap \emptyset)$

2327 Använd bilden till uppgift 2322 och uttryck följande områden med symboler från mängdläran:

a) Område 1 och 4
b) Område 1 och 3
c) Område 2 och 4

2328 Grundmängden är hela alfabetet.

För delmängderna **A**, **B** och **C** gäller:

$\mathbf{B} = \{a, b, c, d, e\}$
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{a, b, d\}$
$\mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \{a\}$
C är en delmängd till **B**.

Ge exempel på en möjlig

a) mängd **A**
b) mängd **C**.

2329 **A**, **B** och **C** är delmängder till $\mathbb{R}$.

$\mathbf{A} = \{x \mid x < 6\}$
$\mathbf{B} = \{x \mid 4 < x \leq 8\}$
$\mathbf{C} = \{x \mid 3 \leq x < 5\}$

Bestäm

a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$
b) $\mathbf{B} \cap \mathbf{C}$
c) $\mathbf{B} \setminus \mathbf{C}$
d) $(\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \cap \mathbf{A}$

3

2330 Ange de tre minsta positiva talen i mängden $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$ om

$\mathbf{A} = \{n \mid n \in \mathbf{N}$ och $n \equiv 3 \pmod 9\}$
$\mathbf{B} = \{n \mid n \in \mathbf{N}$ och $n \equiv 3 \pmod 6\}$

2331 För två mängder **A** och **B** gäller:

$\mathbf{A} = \{x \mid 0 < x \leq 10$ och $2 \mid x\}$
$\mathbf{B} = \{x \mid x \equiv 0 \pmod a\}$

Ange det minsta möjliga värdet på a om $a > 0$ och $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$.

Mer om mängder

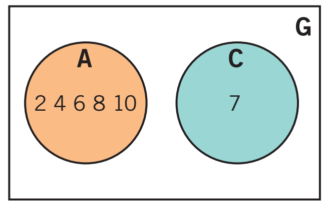
Exempel 1

Tre mängder är givna:

Grundmängden $\mathbf{G} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
Delmängden $\mathbf{A} = \{x \mid x \text{ är ett jämnt tal}\}$
Delmängden $\mathbf{C} = \{x \mid x \text{ är delbart med } 7\}$

kardinalitet

Vi inför begreppet *kardinalitet* som anger antalet element i en mängd.
Mängden **A**, som innehåller 5 element, har kardinaliteten 5.
Detta kan skrivas $|\mathbf{A}| = 5$.



Vi ritar ett Venndiagram. Mängderna **A** och **C** överlappar inte varandra, dvs. de har inga gemensamma element.

disjunkta

A och **C** kallas *disjunkta* mängder.
Vi kan också säga att snittet av **A** och **C** är den tomma mängden.

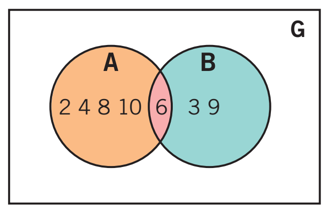
$\mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \emptyset$

Vi kan beräkna det totala antalet element i unionen mellan **A** och **C** genom att addera antalet element i de två mängderna.

$|\mathbf{A} \cup \mathbf{C}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{C}| = 5 + 1 = 6$

Det finns 6 element i $\mathbf{A} \cup \mathbf{C}$.

Exempel 2



I Venndiagrammet till höger är
Grundmängden $\mathbf{G} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Delmängden $\mathbf{A} = \{x \mid x \text{ är ett jämnt tal}\}$
Delmängden $\mathbf{B} = \{x \mid x \text{ är delbart med } 3\}$

Mängderna **A** och **B** överlappar varandra.
Talet 6 ingår i båda mängderna eftersom 6 är ett jämnt tal som är delbart med 3.

Snittet $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{6\}$

Det finns totalt 7 element i $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, dvs. $|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = 7$.

Om vi adderar antalet element i **A** med antalet element i **B** kommer det element (talet 6) som ingår i snittet att räknas två gånger.

Antalet element i unionen av **A** och **B** får vi därför genom:
$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| = 5 + 3 - 1 = 7$

Antalet element i unionen

> Allmänt gäller för två mängder **A** och **B**
>
> $|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$

inklusion och exklusion

Detta sätt att räkna kallas också principen om *inklusion* och *exklusion*.
Vi inkluderar (tar med) elementen i **A** och **B** men exkluderar (tar bort) de element som finns i både **A** och **B**.

2332 I ett basketlag med 15 spelare kan 11 spela anfall och 8 kan spela försvar.
Hur många spelare kan spela både anfall och försvar?

Om vi sätter $\mathbf{A}$ = {alla spelare som kan spela anfall} och $\mathbf{B}$ = {alla spelare som kan spela försvar} får vi

$|\mathbf{A}| = 11$ och $|\mathbf{B}| = 8$

$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = 15$ eftersom det finns 15 spelare totalt.

Vi vet att

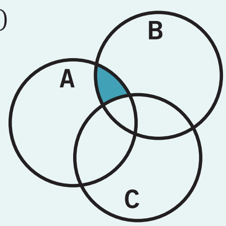
$$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$$
$$15 = 11 + 8 - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$$
$$|\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| = 11 + 8 - 15$$
$$|\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| = 4$$

Antalet spelare i snittet av $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är 4.

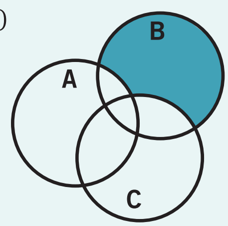
Svar: 4 spelare kan spela både anfall och försvar.

2333 Beskriv det markerade området i figuren med hjälp av symboler för mängder.

a)



b)



a) Området består av de element som tillhör snittet av $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$, men inte tillhör mängden $\mathbf{C}$.

Med symboler:
$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \setminus \mathbf{C}$

b) Området består av de element som tillhör mängden $\mathbf{B}$, men inte unionen mellan $\mathbf{A}$ och $\mathbf{C}$.

Med symboler:
$\mathbf{B} \setminus (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$

2334 I en skola kan eleverna välja att läsa en eller flera av kurserna biologi, kemi och fysik.

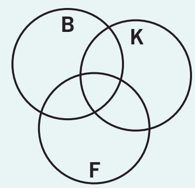
10 elever valde alla tre kurserna.
15 valde biologi och kemi.
20 elever valde biologi och fysik.
15 valde kemi och fysik.
30 elever valde biologi, 28 fysik och 22 kemi.

Hur många elever valde

a) endast biologi b) minst en av de tre kurserna?

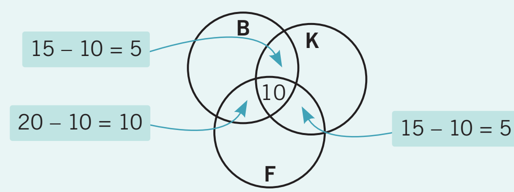
Vi ritar ett Venndiagram med följande tre mängder:

B = {alla elever som valde biologi}
K = {alla elever som valde kemi}
F = {alla elever som valde fysik}

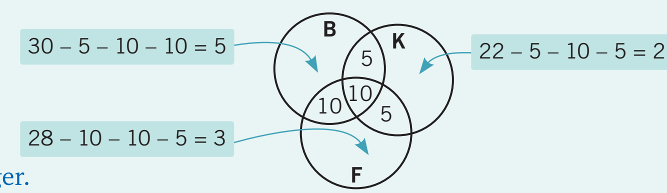


Vi börjar med att, i mitten av diagrammet, skriva in antalet som valde alla tre kurserna.
$|\mathbf{B} \cap \mathbf{K} \cap \mathbf{F}| = 10$

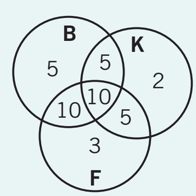
Sedan använder vi
$|\mathbf{B} \cap \mathbf{K}| = 15$
$|\mathbf{B} \cap \mathbf{F}| = 20$
$|\mathbf{K} \cap \mathbf{F}| = 15$
för att bestämma antalet som endast valt två av ämnena.
Se figuren till höger.



Till sist använder vi
$|\mathbf{B}| = 30$, $|\mathbf{F}| = 28$ och
$|\mathbf{K}| = 22$
för att bestämma antalet som endast valt ett av ämnena. Se figuren till höger.



I den nedersta figuren har vi skrivit in antalet element i alla figurens områden.



a) **Svar:** 5 elever valde endast biologi.

b) Totala antalet som valde någon av kurserna
$5 + 5 + 2 + 10 + 10 + 5 + 3 = 40$

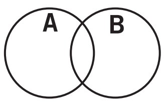
Svar: 40 elever valde minst en av kurserna.

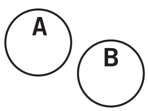
2335 I en grupp med förskolebarn väljer 12 att ha jordgubbssylt på sin pannkaka. 10 barn väljer att ha hallonsylt och 6 barn väljer båda sorternas sylt.

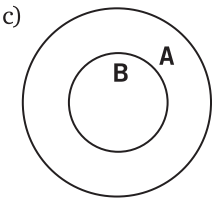
Hur många barn finns i gruppen om alla barn väljer minst en sylt?

2336 Rita av varje Venndiagram två gånger.

Skugga $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$ i det ena och $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ i det andra diagrammet.

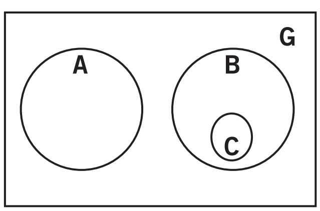
a) 

b) 

c) 

2337 Figuren visar

Grundmängden **G** = {månghörningar}
Mängden **A** = {trianglar}
Mängden **B** = {fyrhörningar}
Mängden **C** = {rektanglar}



Förklara vad det betyder att

a) mängderna **A** och **B** är disjunkta

b) **C** är en delmängd av **B**.

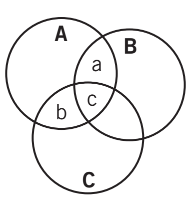
2338 Mängden **A** = {tal delbara med 2}
Mängden **B** = {tal delbara med 3}
Mängden **C** = {tal delbara med 5}

Vilket eller vilka av talen 4 6 9 12 15 20 ligger i område:

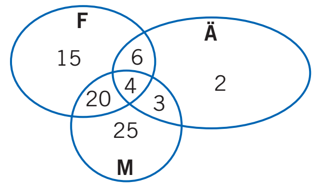
a) område a

b) område b

c) område c?



2339 Venndiagrammet visar hur många personer som valde filmjölk (**F**), ägg (**Ä**) och/eller macka (**M**) på en frukostbuffé.



Hur många personer valde

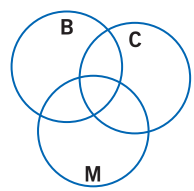
a) endast ägg

b) ägg och filmjölk

c) macka men inte filmjölk

d) filmjölk och macka men inte ägg?

2340 I Venndiagrammet beskriver **B** mängden av de personer på ett företag som äger en bil, **C** de som äger en cykel och **M** de som äger en moped.



Markera området som motsvarar

a) de som äger både en bil och en cykel men inte moped

b) de som äger antingen bara en bil eller både en cykel och en moped.

2341 Vad blir mängden $\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q} \cup \mathbf{R})$ lika med, om

a) $\mathbf{P} \subset \mathbf{R}$

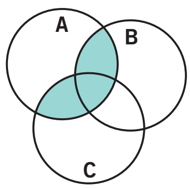
b) $\mathbf{R} = \emptyset$

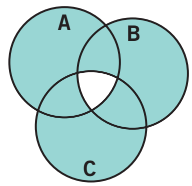
c) $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$?

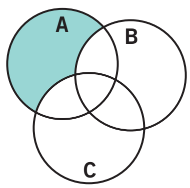
2342 I en undersökning av 1 000 hushåll fann man att 19 % av hushållen hade katt, 15 % hade hund och 25 % hade hund, katt eller både hund och katt.

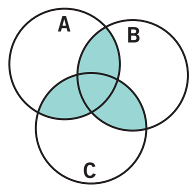
Hur många av hushållen hade både hund och katt?

2343 Beskriv med symboler den färgade delen av Venndiagrammet.

a)


c)


b)


d)


2344 Visa med hjälp av Venndiagram att $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}^c = \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$ för två godtyckliga mängder **A** och **B**.

2345 Till en miljökonferens kom 50 gymnasieelever. På konferensen kunde de bland annat höra föredrag om vindkraft, luftföroreningar och regnskogar.

Av eleverna gick 21 på föredrag om vindkraft, 22 om luftföroreningar och 19 om regnskogar. 7 gick både på vindkraft och luftföroreningar, 8 på både vindkraft och regnskogar samt 4 på både luftföroreningar och regnskogar. 3 elever gick på alla tre föredragen.

Hur många elever hörde

a) endast föredrag om regnskogar

b) inget av fördragen?

3

2346 Låt **A** och **B** vara delmängder av grundmängden $\mathbf{G} = \{1, 2, 3, ..., 9, 10\}$.

Undersök om det finns mängder **A** och **B** sådana att

a) $|\mathbf{A}| = 4,\ |\mathbf{B}| = 6$ och $|\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| = 3$

b) $|\mathbf{A}| = 4,\ |\mathbf{B}| = 5$ och $|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = 5$

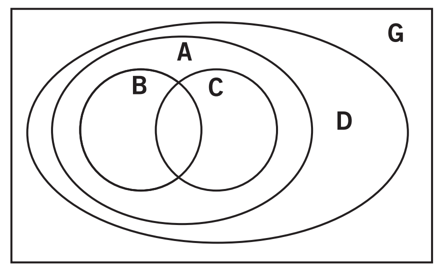
c) $|\mathbf{A}| = 7,\ |\mathbf{B}| = 5$ och $|\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| = 1$

d) $|\mathbf{A}| = 7,\ |\mathbf{B}| = 5$ och $|\complement\mathbf{A} \cup \complement\mathbf{B}| = 4$

2347 I Venndiagrammet är

$\mathbf{G} = \{$alla fyrhörningar$\}$

$\mathbf{B} = \{$alla rektanglar$\}$



Ange den mängd som bör innehålla

a) parallellogram

b) kvadrater

c) parallelltrapetser

d) romber.

Motivera dina svar.

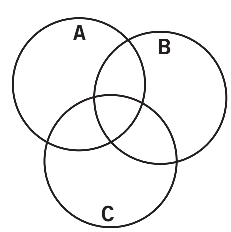
2348 Visa med hjälp av Venndiagram att

a) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})^c = \mathbf{A}^c \cap \mathbf{B}^c$

b) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$

c) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus \mathbf{C} = (\mathbf{A} \setminus \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{C})$

2349 Skriv ett uttryck för antalet element i snittet mellan mängderna **A**, **B** och **C**.



Programmering

Sant eller falskt?

Avgör om påståendena är sanna eller falska. Syftet är att utveckla förmågan att föra ett matematiskt resonemang. Motivera därför svaren med beräkningar och förklaringar.

Arbeta gärna i par eller grupp.

1 Antalet permutationer för ett givet urval är alltid större än antalet kombinationer.

2 $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ och $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ kan aldrig vara lika i ett Venndiagram.

3 I en grupp om 28 personer är det säkert att minst tre av personer fyller år i samma månad.

4 $\binom{7}{3}$ betyder antalet sätt man kan välja tre element av sju med hänsyn till i vilken ordning de väljs.

5 I en skål ligger fem kulor, 2 gula och 3 blå. Sannolikheten att få 2 gula kulor om man slumpmässigt tar 2 kulor utan att titta är lika stor som sannolikheten att få 3 blå om man tar 3 kulor.

6 $n(n-1)!$ kan skrivas $n!$

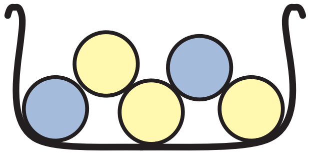
7 $\binom{100}{51}$ har samma värde som $\binom{100}{49}$

8 Om 80 % av medlemmarna i en motionsförening går på gym och 70 % går på gruppträning, så går hälften av medlemmarna på både gym och gruppträning.

9 Om $|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = 18$, $|\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| = 7$ och $|\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}| = 5$ så gäller $|\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}| = 11$.

10 6 personer kan sätta sig på 6! sätt kring ett runt bord med 6 platser.

11 Du tar slumpvis kulor ur skålen.



Du måste ta fler kulor för att vara säker på att få två av samma färg än två av olika färg.

12 Utvecklingen av $(a + b)^n$ ger efter förenkling bland annat termerna nb^n och $(n-1)a^{n-1}$

Sammanfattning 2

Multiplikationsprincipen

Ett första val kan göras på p sätt och ett andra val kan göras på q sätt. De två valen kan göras efter varandra på $p \cdot q$ sätt.

Additionsprincipen

Ett första val kan göras på p sätt och ett andra val kan göras på q sätt. Om antingen det första eller det andra valet ska göras kan det göras på $p + q$ sätt.

Sannolikheter

Sannolikheten P för en händelse H om alla utfall är lika sannolika beräknas

$$P(H) = \frac{\text{Antalet gynnsamma utfall}}{\text{Antalet möjliga utfall}}$$

Permutationer

Ett ordnat urval utan upprepning kallas en permutation

Antalet permutationer av n element är $n!$ (n-fakultet).

Exempel:
5 personer kan bilda en kö på 5! olika sätt.
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Antalet permutationer av k element ur n givna element är

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exempel:
3 personer av 8 kan väljas med hänsyn till ordningen på $P(8, 3) = \dfrac{8!}{(8-3)!}$ olika sätt.

$$P(8, 3) = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Kombinationer

Ett oordnat urval utan upprepning kallas en kombination.

Antalet kombinationer av k element ur n givna element är

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exempel:
3 personer av 8 kan väljas utan hänsyn till ordningen på $\binom{8}{3}$ olika sätt.

$$\binom{8}{3} = C(8, 3) = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

Symmetri ger att:

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{8-3} = \binom{8}{5}$$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n =$$
$$= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Talen $\binom{n}{k}$ kallas binomialkoefficienter.

Pascals formel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad 1 \le k \le n-1$$

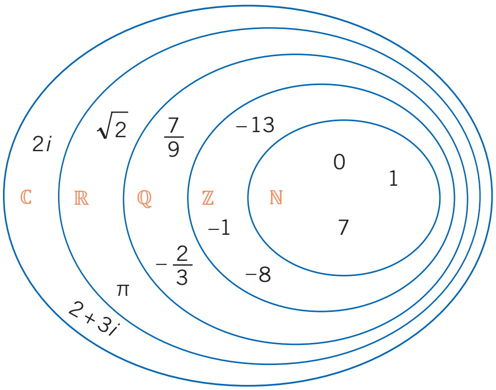
Lådprincipen

Om $n + 1$ föremål ska placeras i n lådor, så måste åtminstone en låda innehålla två eller fler av föremålen.

Om $n \cdot k + 1$ föremål ska placeras i n lådor, så måste åtminstone en låda innehålla $k + 1$ eller fler av föremålen.

Mängder

En mängd är en samling objekt (element).



En mängd kan beskrivas på olika sätt:

$\mathbb{Z}$ är mängden av de hela talen.
$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
$\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ är ett heltal}\}$

$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ betyder att **A** är en delmängd av **B**.

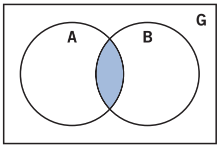
Grundmängden **G** är den mängd som innehåller alla element som kan komma i fråga i en viss situation.

Den tomma mängden $\emptyset$ saknar element och är en delmängd av varje mängd.

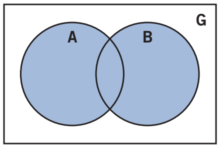
En mängd med n element har totalt 2^n delmängder.

Mängdoperationer och Venndiagram

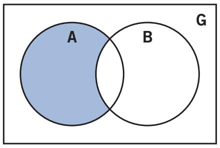
1 Snittet $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathbf{A} \text{ och } x \in \mathbf{B}\}$
2 Unionen $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathbf{A} \text{ och/eller } x \in \mathbf{B}\}$
3 Mängddifferensen $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathbf{A} \text{ och } x \notin \mathbf{B}\}$
4 Komplementmängden till **A**
$\complement\mathbf{A} = \mathbf{A}^c = \{x \mid x \in \mathbf{G} \text{ och } x \notin \mathbf{A}\}$
Där **G** är grundmängden.



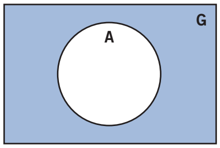
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$



$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$



$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$



$\complement\mathbf{A}$

Antal element i mängder

Antalet element i en mängd **A** kallas mängdens kardinalitet och betecknas $|\mathbf{A}|$.

För två mängder **A** och **B** gäller
$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$

Exempel:
Mängden **A** innehåller 17 element, mängden **B** innehåller 12 element och snittet till mängderna **A** och **B** innehåller 10 element, dvs.
$|\mathbf{A}| = 17 \quad |\mathbf{B}| = 12 \text{ och } |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| = 10$

Då är antalet element i unionen
$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = 17 + 12 - 10 = 19$
Vi inkluderar (tar med) elementen i **A** och **B** och exkluderar (tar bort) elementen i $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$.

Kan du det här?

Delkapitel	BEGREPP	PROCEDUR
2.1 Kombinatorik	Multiplikationsprincipen Additionsprincipen Permutation Kombination "n över k" $\binom{n}{k}$ n-fakultet $n!$	• beräkna antalet permutationer respektive kombinationer för olika urval • beräkna sannolikheten vid likformig sannolikhetsfördelning • lösa kombinatoriska problem.
2.2 Binomialsatsen och lådprincipen	Binomialsatsen och binomialkoefficient Lådprincipen	• beräkna koefficienter till ett binom med hjälp av binomialsatsen • använda lådprincipen.
2.3 Mängdlära	Mängd och element Grundmängd, tom mängd och delmängd Snittet, unionen, mängddifferensen och komplement Kardinalitet Venndiagram	• kunna beskriva en mängd på olika sätt • beräkna antalet delmängder av en given mängd • avgöra vilka element som tillhör snittet, unionen, mängddifferensen och komplementet • bestämma antal element i mängd • använda principen om inklusion och exklusion för enklare tillämpningar.

Testa dig själv 2

2.1 Kombinatorik

1 Isik kommer ihåg att första siffran i hans fyrsiffriga pinkod är 2.

Hur många möjliga pinkoder finns det om

a) alla siffror i pinkoden är olika

b) alla siffror kan förekomma på de resterande tre platserna?

2 På en musikfestival finns tre scener med olika artister hela kvällen.

Alla scenerna har konserter vid samma fem tidpunkter under kvällen.

På hur många sätt kan man välja fem konserter?

3 Beräkna

a) $4! \cdot 2!$

b) $P(5, 2)$

c) $C(5, 2)$

d) $\binom{101}{99}$

4 På en arbetsplats ingår alla åtta anställda i en utlottning av tre vinster. Varje person kan bara få en vinst.

På hur många sätt kan vinsterna fördelas om

a) alla vinster är likadana

b) det finns en 1:a, en 2:a och en 3:e vinst?

5 Klas ska köpa läsk och snacks till en fest. Han ska välja tre av fem läsksorter och två sorters snacks av popcorn, chips, ostbågar eller nötter.

På hur många olika sätt kan han välja sitt inköp?

2.2 Binomialsatsen och lådprincipen

6 Utveckla

a) $(1 + a)^6$

b) $(2x - y)^5$

7 I en skål ligger tre röda och sju gröna äpplen.

Hur många måste du slumpvis ta för att säkert få två av

a) samma färg

b) olika färg?

2.3 Mängdlära

8 Sant eller falskt? Motivera dina svar.

a) $7 \in \{x \mid x \text{ primtal och } x < 10\}$

b) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2\}$

c) Mängden $\{4, 6\}$ har fyra delmängder.

d) $\{x \mid x^2 + 9 = 0 \text{ och } x \in \mathrm{R}\} = \emptyset$?

9 Låt $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbf{B} = \{4, 5, 6\}$ och $\mathbf{C} = \{5, 6, 7\}$.

Grundmängden:
$\mathbf{G} = \{x \mid 0 < x < 10 \text{ och } x \in \mathbb{Z}\}$.

Bestäm

a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$

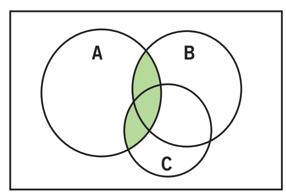
b) $\mathbf{B} \cup \mathbf{C}$

c) $\complement\mathbf{B} \setminus \mathbf{C}$

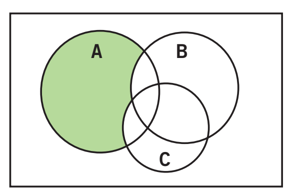
d) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}$

10 Beskriv med mängdsymboler det färgade området.

a)



b)



11 I en friidrottsförening tävlar 150 ungdomar i minst en av grenarna löpning, längdhopp och tresteg.

85 av dem tävlar i löpning. 7 tävlar i både längdhopp och tresteg, men inte i löpning.

Hur många av ungdomarna tävlar endast i antingen tresteg eller längdhopp?

Blandade övningar 2

1 Utan digitala verktyg

1 Låt $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$, $\mathbf{B} = \{b, c, d, e, f\}$ och $\mathbf{C} = \{a, c, d, g\}$.

Bestäm

a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$

b) $\mathbf{B} \setminus \mathbf{C}$

c) $\mathbf{A} \cap \mathbf{C}$

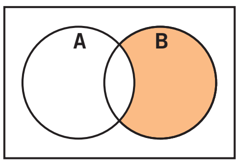
d) $\mathbf{B} \cap \mathbf{C}$

e) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$

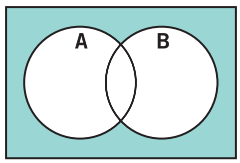
f) $|\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}|$

2 Beskriv med symboler den färgade delen av Venndiagrammet.

a)



b)



3 I ett jaktlag jagar alla antingen älg eller rådjur och 4 personer jagar båda djuren.

Det är 7 personer som jagar älg och 6 som jagar rådjur.

Hur många ingår i jaktlaget?

4 I skolkafeterian kan man köpa ett mellanmål för 50 kr. Man får då antingen en dryck och en smörgås eller en dryck, en yoghurt och en frukt.

Det finns te, kaffe eller saft, tre olika smörgåsar, fyra yoghurtsmaker och äpple eller banan att välja på.

På hur många sätt kan man välja sitt mellanmål för 50 kr?

5 I en godispåse ligger 10 röda, 10 gröna och 10 gula karameller av samma typ. Du tar, utan att titta, karameller ur påsen.

Hur många måste du ta för att vara säker på att få minst 5 av samma färg?

2

6 I en låda med åtta nya batterier har det hamnat två gamla som ska slängas. Du tar tre batterier ur lådan.

Hur många sådana urval

a) är möjliga

b) innehåller bara nya batterier

c) innehåller minst ett gammalt batteri?

7 Utveckla

a) $\binom{n}{3}$

b) $\binom{n+1}{2}$

c) $\binom{n}{n-2}$

d) $\binom{n+1}{n-1}$

8 Hur många permutationer finns av de fyra symbolerna, om de ska placeras på rad?

a) ✚ ♥ ✸ ▼

b) ✚ ♥ ✚ ✸

c) ✚ ♥ ✚ ♥

d) ✸ ▼ ✸ ✸

9 Varför är alla fakulteter utom 1! jämna tal?

3

10 Visa att

a) $m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$

b) $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$ för alla $n \geq 1$.

11 **A** och **B** är mängder.

a) Beskriv innebörden av mängddifferensen $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$ med ord.

b) Vad innebär $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \emptyset$?

12 Går det att hitta mängder **A**, **B** och **C** som uppfyller

$\mathbf{A} \cup \mathbf{C} = \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$ och $\mathbf{A} \setminus \mathbf{C} = \mathbf{B} \setminus \mathbf{C}$ och $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$?

1 Med digitala verktyg

13 En träningsgrupp i fotboll består av 20 utespelare och en målvakt.

På hur många sätt kan ett 11-mannalag väljas ut om man inte tar hänsyn till att de tio utespelarna helst vill spela på vissa positioner?

14 Beräkna och beskriv vad du beräknat.

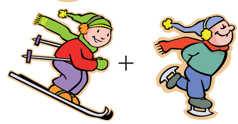
a) $\binom{19}{6}$ b) $P(19, 6)$ c) $C(19, 6)$

15 En undersökning inför en friluftsdag, i årskurs 4, visar elevernas val.

65 % vill åka skidor

55 % vill åka skridskor

25 % vill åka både skidor och skridskor.



a) Rita ett Venndiagram som presenterar undersökningen.

b) Hur många procent av eleverna vill varken åka skidor eller skridskor?

16 a) Visa att $\binom{9}{3} = \binom{9}{6}$

b) Beskriv en vardaglig situation där $\binom{9}{3}$ och $\binom{9}{6}$ är lika.

17 Utveckla

a) $(3x^2 - y^3)^2$ c) $(x - y)^4$

b) $(a + 2b)^3$ d) $(z^2 + 3u)^5$

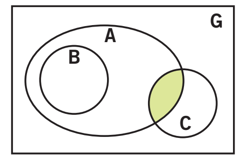
18 Utveckla och förenkla uttrycket.

$$\frac{(x+h)^6 - x^6}{h}$$

19 Joel ska lyssna på fem ljudböcker. Det finns 35 böcker som han är intresserad av.

Han påstår att det finns nästan 39 miljoner sätt att välja ut fem böcker. Stämmer det?

20 **G** = {alla trianglar}
A = {likbenta trianglar}



a) Var bör de liksidiga trianglarna finnas?

b) Var bör de rätvinkliga trianglarna finnas?

c) Vilka trianglar är det färgade området?

Motivera dina svar.

2

21 Människans DNA består av en 1,5 m lång spiral med miljarder baspar (”stegpinnar”) med beteckningarna AT, TA, CG och GC. Bokstäverna A, T, C och G står för adenin, tymin, cytosin och guanin. I DNA-spiralen finns ca 30 000 gener insprängda.

Ordningen mellan basparen, tagna i grupper om tre, talar om vilket protein som ska byggas. Så ger t.ex. sekvensen TAC TTG TTT CAC ett visst protein.

a) Hur många”ord” med tre bokstäver kan skrivas med det genetiska alfabetet A, T, C och G?

b) Hur många av orden med tre bokstäver innehåller exakt ett A?

c) En gen som beskriver hur ett visst protein ska byggas innehåller 200 ord med tre bokstäver. På hur många sätt kan en sådan gen vara uppbyggd?

22 En familj på fem personer cyklar efter varandra på en smal landsväg.

a) På hur många sätt kan familjemedlemmarna placera sig?

b) På hur många sätt kan de placera sig om det yngsta barnet ska cykla näst först eller i mitten?

23 I en matematik 5-grupp finns 13 TE-elever och 15 NA-elever.

a) På hur många sätt kan två TE-elever och två NA-elever väljas ut till en tävling?

b) Hur stor är sannolikheten att det blir just två TE-elever och två NA-elever om fyra elever slumpmässigt väljs ut ur gruppen?

24 Skriv talen 1, 2, 3, 4, 5 och 6 på lappar och välj fyra av lapparna.

Visa att minst ett par av dessa lappar ger summan 7.

25 De 29 eleverna i en gymnasieklass fick efter sommarlovet ange om de jobbat, pluggat respektive rest utomlands på lovet.

13 elever hade jobbat, 11 hade varit utomlands och 9 hade pluggat. 3 hade rest och pluggat, 4 hade jobbat och pluggat och 5 hade jobbat och rest. En elev hade gjort alla tre sakerna.

Hur många av eleverna hade varken jobbat, pluggat eller rest?

26 I den förenklade utvecklingen av $(x + 2y)^{13}$ finns en term $k \cdot x^2 y^{11}$

Bestäm talet k.

27 Faktorisera

a) $n! - (n - 1)!$

b) $(n + 2)! - 2 \cdot n!$

28 Rita mängderna **A**, **B** och **C** i ett Venndiagram så att de uppfyller

$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \emptyset, \ \mathbf{B} \setminus \mathbf{A} = \emptyset$ och $\emptyset \subset (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$

3

29 Bridge spelas med en vanlig kortlek, 52 kort. En bridgehand har 13 kort.

a) Hur många bridgehänder finns det?

b) Hur många bridgehänder har fördelningen $4-3-3-3$, dvs. 4 av en färg och 3 av de övriga?

c) Hur många bridgehänder innehåller minst ett hjärterkort?

30 Visa med ett Venndiagram att

a) $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$

b) $\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$

31 Tolv länder är inbjudna till en konferens. Varje land representeras av tre personer.

Första dagen hälsar alla, utom de från samma land, på varandra en gång med att ta i hand.

Hur många handhälsningar görs denna dag?

32 Visa att i en decimalutveckling av ett bråk, t.ex. $\frac{5}{7} = 0{,}714\,285\,714\,285\ \ldots$ kommer en grupp av decimaler att upprepas.

33 Varje lördag säljer Ogbus bageri nybakade rågbullar, sesambullar, tekakor, gifflar och surdegsbullar.

På hur många sätt kan man köpa ett dussin (12 st) av det nybakade brödet?

34 Till en golftävling kommer 18 personer. Första dagen ska de spela tillsammans tre och tre.

a) På hur många sätt kan grupperna (3-bollarna) arrangeras?

b) Den största sponsorn kräver att de 4 bäst rankade spelarna inte ska spela tillsammans. På hur många sätt kan grupperna arrangeras om man tar hänsyn till detta?

Blandade övningar 1–2

1 Utan digitala verktyg

1 Skriv talet

a) $1101_{\text{två}}$ med basen 10

b) 45_{tio} med basen 5.

2 Låt $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbf{B} = \{4, 5, 6\}$ och $\mathbf{C} = \{5, 6, 7\}$.

a) Bestäm $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}$

b) Bestäm $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}$

3 Är det sant att om du drar 12 kort från en vanlig kortlek så måste minst 2 av korten ha samma valör? Motivera ditt svar.

4 En talföljd är definierad rekursivt på följande sätt

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n \cdot n + 3 \end{cases}$$

a) Bestäm a_4 b) Beräkna $\sum_{k=1}^{4} a_n$

5 Bestäm den andra och den fjärde termen i utvecklingen av $(2a + 3b)^5$.

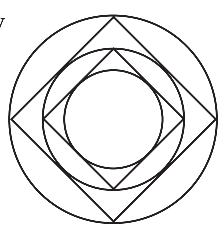
6 Beräkna

a) $\dfrac{8!}{6!}$ b) $\dfrac{201!}{199!}$

2

7 Visa att om både a och b är delbara med k, så är även $(xa + yb)$ delbart med k, då x och y är heltal.

8 Figuren visar en följd av cirklar och kvadrater (inskrivna i varandra). Den yttersta cirkeln, med radien r, har omkretsen $O_1 = 2\pi r$.



Bestäm

a) O_3 b) O_n

9 a) Rita ett Venndiagram med tre mängder **A**, **B** och **C**, där alla mängderna har några gemensamma element.

Följande gäller för mängderna:

$|\mathbf{A} \cup \mathbf{C}| = 61$ $|\mathbf{A} \cap \mathbf{C}| = 8$

$|(\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}) \cap \mathbf{C}| = 3$ $|(\mathbf{C} \setminus \mathbf{B}) \cap \mathbf{A}| = 1$

$|\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| = 23$ $|\mathbf{C} \setminus \mathbf{A}| = 10$

b) Beräkna antalet element i delmängderna $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \setminus \mathbf{C}$ respektive $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$.

c) Beskriv med symboler den delmängd där antalet element inte är känt.

10 Visa att om $a \equiv b \pmod 6$ och $c \equiv d \pmod 6$ så är

a) $a + c \equiv b + d \pmod 6$

b) $ac \equiv bd \pmod 6$

3

11 Bevisa med ett induktionsbevis att formeln

$$\sum_{k=1}^{n} 4 \cdot 5^{k-1} = 5^n - 1$$ gäller.

12 Visa att $\dbinom{n+1}{k} = \dbinom{n}{k-1} + \dbinom{n}{k}$ där $1 \le k \le n$.

1 Med digitala verktyg

13 Disa ska välja ut några tävlingar att delta i. Hon väljer bland sju olika halvmaratonlopp och bland maraton i New York, London, Paris, Berlin eller Stockholm. Ingen av tävlingarna äger rum på samma dag.

På hur många sätt kan hon välja

a) 5 tävlingar att delta i

b) 2 maraton och 3 halvmaratontävlingar att delta i?

14 Frank påstår att $\dbinom{500}{200} = \dbinom{500}{300}$

Stämmer det? Motivera.

15 I en geometrisk talföljd är det andra talet $a_2 = 6$ och det femte talet $a_5 = 162$.
Beräkna summan av de tio första talen i talföljden.

16 En patient får, var sjätte timme, medicin i form av en tablett på 200 mg. När 6 timmar har gått återstår det 20 % av den tidigare medicinen i kroppen.
Hur stor mängd medicin har patienten i kroppen efter

a) 5 tabletter   b) 50 tabletter?

17 Till en teaterfestival kommer både barn och vuxna. Några har rest till festivalen och andra bor i närheten.

Händelse **A**:
En slumpvis vald person är ett barn.

Händelse **B**:
En slumpvis vald person bor i närheten av festivalen.

Beräkna och tolka

a) $P(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ om
$P(\mathbf{A}) = 0{,}5 \quad P(\mathbf{B}) = 0{,}8$ och
$P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 0{,}6$

b) $P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$ om
$P(\mathbf{A}) = 0{,}6 \quad P(\mathbf{B}) = 0{,}7$ och
$P(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = 0{,}9$

18 Två lag, **A** och **B**, har vardera 11 spelare. Ett kombinerat lag på 11 spelare ska utses från dessa båda lag.
På hur många sätt kan detta ske om båda lagen ska vara representerade?

19 För länge sedan genomförde en liga i USA ett bankrån. Efter rånet delade de bytet exakt lika mellan sig.
Bytet bestod av 220 endollarsedlar, 165 femdollarsedlar och 253 tiodollarsedlar.

a) Hur många personer ingick i ligan?

b) Vilket belopp fick varje person?

20 När Robin fyller år bjuder han några av sina arbetskamrater. Vilka som kommer utgör en delmängd av vilka som är bjudna.

a) Han bjuder Alva (**A**), Bengt (**B**) och Carro (**C**). Skriv upp alla möjliga delmängder.

b) Hur många delmängder finns det om han bjuder fem personer?

c) Förklara varför antalet delmängder fördubblas om han bjuder sex i stället för fem personer.

d) Hur många personer måste han bjuda för att antalet delmängder ska överstiga 100 000?

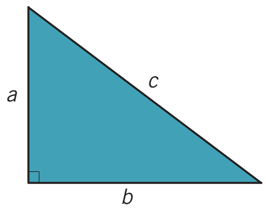
21 Antalet möjliga placeringslistor efter en tävling ökar med antalet deltagare. Vi förutsätter att det inte finns några delade placeringar.

a) Hur många olika placeringslistor kan bildas om antalet tävlande är 4 respektive 5?

b) Ange en rekursiv definition av antalet placeringslistor beroende på antalet deltagare a_n.

2

22 En pythagoreisk trippel är tre positiva heltal som uppfyller villkoret
$a^2 + b^2 = c^2$



Talen 3, 4 och 5 är ett exempel på en pythagoreisk trippel eftersom
$3^2 + 4^2 = 5^2$

Det finns oändligt många pythagoreiska tripplar.

a) Visa att påståendet
"Det finns inga pythagoreiska tripplar med enbart jämna tal" är falskt.

b) Visa att påståendet
"Det finns inga pythagoreiska tripplar med enbart udda tal" är sant.

23 I en skål ligger 17 hallonbåtar och 12 lakritsbåtar.

Utan att titta tar du sex godisbåtar.

Hur stor är sannolikheten att du får

a) tre av varje sort

b) två hallon och fyra lakritsbåtar?

24 Edvin kastar tre vanliga tärningar.

a) Hur många utfall finns det?

b) Hur många utfall ger summan 8?

25 I ett flyktingläger bor 3 000 kvinnor, män, flickor och pojkar. Antalet flickor och kvinnor tillsammans är detsamma som antalet pojkar och män tillsammans.

Antalet vuxna är 50 % fler än antalet barn och 2/5 av barnen är flickor.

Hur många kvinnor och barn bor det sammanlagt i lägret?

26 Bestäm heltalet x om

a) $x \equiv 2 \pmod 3$ $\quad x \equiv 4 \pmod 5$ och $0 \leq x < 15$

b) $x \equiv 14 \pmod{15}$ $\quad x \equiv 5 \pmod 8$ och $0 \leq x < 120$.

27 Tre pojkar och fyra flickor ska sitta på sju numrerade platser på en biograf.

På hur många sätt kan detta ske om

a) de får sitta hur de vill

b) flickorna ska sitta till höger och pojkarna till vänster

c) de ska sitta flicka – pojke – flicka osv.

d) den längste pojken ska sitta i mitten

e) två av flickorna tvunget ska sitta bredvid varandra?

28 Visa med ett induktionsbevis att $n(n^2 + 2)$ är delbart med 3 för alla positiva heltalsvärden på n.

3

29 Beräkna C_5 om

$(n + 2)C_{n+1} = (4n + 2)C_n \qquad C_0 = 1$

30 En konstnärinna har sju olika färger på sin palett. Hon ska måla en tavla med ett geometriskt mönster och funderar på hur många av sina sju färger hon ska använda.

På hur många sätt kan hon välja färg till tavlan?

31 Talet $1/x$ där $x \neq 0$ kallas det inverterade talet till x. Talen i den geometriska talföljden 8, 12, 18, 27, ... och i den aritmetiska talföljden 8, 12, 16, 20, ... inverteras.

a) Undersök om den inverterade talföljden fortfarande är geometrisk respektive aritmetisk.

b) Välj en egen geometrisk och en aritmetisk talföljd, som du inverterar.
Vad upptäcker du?

c) Visa vad som gäller om man inverterar en godtycklig geometrisk respektive aritmetisk talföljd.

32 Förhållandet mellan sidornas längder, a och b, för ett rektangulärt pappersark i A-serien är $1 : \sqrt{2}$

- Formatet A0, som är det största formatet, har arean 1 m^2.
- A1-formatets långsida är lika lång som A0-formatets kortsida.
- A2-formatets långsida är lika lång som A1-formatets kortsida osv.

a) Beräkna sidornas längder för formaten A0, A1, A2, A3 och A4.

b) Utgå från A0-formatet och formulera en rekursiv definition av sidornas längder, a och b för A$_n$-formatet.

33 Två olika talföljder innehåller båda talen a och b.

Talföljden ..., –1, a , b, x, ... är aritmetisk.

Talföljden ..., y, a , b; 12,5; ... är geometrisk.

Bestäm talen x och y.

34 Visa att $2^n(5^{2n} - 2^{2n})$ är delbart med 7 för alla positiva n.