4.5 Bevis och bevismetoder*

Inledning

Vi börjar med en repetition av några begrepp från tidigare kurser.

definition En *definition* av ett matematiskt begrepp är en beskrivning av begreppet. En bra definition är entydig och utgår från enklare begrepp.

påstående Ett matematiskt *påstående* kan vara sant eller falskt. Påståendet handlar ofta om vilka egenskaper ett matematiskt begrepp, eller uttryck, har eller inte har.

bevis Ett matematiskt *bevis* är en logisk argumentation för att ett påstående är sant.

axiom Grundläggande påståenden som accepteras utan bevis kallas *axiom*.

sats En matematisk *sats* är ett viktigt påstående som kan bevisas med axiom och redan bevisade satser. Ofta kallas ett viktigt resultat i en matematisk teori för en sats, t.ex. Pythagoras sats.

Nedan visar vi tre påståenden och bevis för dessa.

Exempel 1 *Påstående*:
Talet 51 är delbart med 3.

Bevis:
Vi använder definitionen för begreppet delbarhet.
51 är delbart med 3 om det finns ett heltal k sådant att $51 = k \cdot 3$.
$51 = 17 \cdot 3$
V.S.B.

Exempel 2 *Påstående*:
Om $x = 2$ så är $x^4 < x^3 + 5x$

Bevis:
$x^4 < x^3 + 5x$ och $x = 2$ ger
$\text{VL} = 2^4 = 16$
$\text{HL} = 2^3 + 5 \cdot 2 = 8 + 10 = 18$
$\text{VL} < \text{HL}$
V.S.B.

Exempel 3 *Påstående*:
Det finns positiva heltal a och b sådana att $2ab = a^2$

Bevis:
Det räcker som bevis att hitta ett enda exempel.
Vi väljer $a = 6$ vilket insatt i ekvationen $2ab = a^2$ ger
$2 \cdot 6 \cdot b = 36$
$b = 3$
T.ex. $a = 6$ och $b = 3$ är positiva heltal sådana att $2ab = a^2$
V.S.B.

* Ingår i kursen t.o.m. 2021-06-30.

4501 Bevisa följande påstående:

Om basen i en rektangel ökar med 10 % och höjden minskar med 10 %, så minskar arean.

Bevis:

Anta att den ursprungliga rektangeln har basen b och höjden h.
Arean $A_1 = bh$
Efter ändringarna har rektangeln basen $1{,}1b$ och höjden $0{,}9h$.
Arean $A_2 = 1{,}1b \cdot 0{,}9h = 0{,}99bh$ vilket är mindre än arean $A_1 = bh$.
V.S.B.

1

4502 Anta att alternativen **A**–**C** är ett påstående, en definition och ett bevis som hör ihop.

A Ett heltal a är delbart med heltalen b och c om $a = b \cdot c$.

B $20 = 4 \cdot 5$

C 20 är delbart med 5.

Vilket av alternativen är

a) påståendet

b) definitionen

c) beviset?

Bevisa följande påståenden.

4503 Talet 42 är delbart med 14.

4504 Ekvationen $5x - 1 = 3x + 7$ har roten $x = 4$.

4505 Om sidan i en kvadrat fördubblas, så blir arean fyra gånger så stor.

4506 Det finns heltal a, b och c sådana att $a^2 + b^2 = c^2$

4507 a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

4508 Avgör om följande är:

- ett sant påstående
- ett falskt påstående
- inget påstående.

a) Alla jämna tal är delbara med 2.

b) $3 + 8$

c) $(1 + a)^2 > 0$ för alla reella tal a.

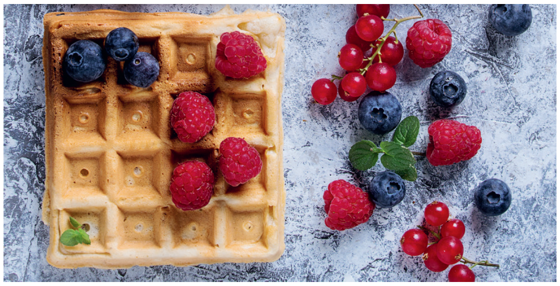
d) $2 \cdot 12 = 26$

2

4509 Visa att om täljaren ökar med 20 % och nämnaren minskar med 20 %, så ökar kvoten med 50 %.

4510 *Definition*: Ett kvadrattal är ett tal som är kvadraten på ett heltal.

Bevisa att det finns tvåsiffriga heltal, x, sådana att $4x + 12$ är ett kvadrattal.



Direkta bevis

Vi har i kurs 1–4 bevisat ett stort antal matematiska satser, t.ex. Pythagoras sats, yttervinkelsatsen, topptriangelsatsen, additionsformeln för sinus och satser om delbarhet och faktorisering.

direkt bevis

Den vanligaste formen av bevis kallas ett *direkt bevis*. Där utgår man från ett antagande och via ett logiskt resonemang, i ett eller flera steg, kommer man fram till en slutsats.

motexempel

För att visa att ett antagande eller ett påstående är falskt räcker det att man hittar ett *motexempel*, alltså ett exempel då det inte stämmer.

Ett påstående kan innehålla de logiska symbolerna $\Rightarrow$ och $\Leftrightarrow$.

implikationspil

Den enkelriktade pilen $\Rightarrow$ är en *implikationspil*.
$P \Rightarrow Q$ utläses ”P medför Q” eller ”Om P gäller, så gäller Q”.

ekvivalenspil

Den dubbelriktade pilen $\Leftrightarrow$ är en ekvivalenspil.
$P \Leftrightarrow Q$ utläses ”P är ekvivalent med Q” eller ”P om och endast om Q”.
En ekvivalens innebär att P medför Q och Q medför P.

Exempel 1

Är påståendet $x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$ sant?
Om $x = 3$, så gäller att $x^2 - 3x = 0$.
Omvändningen gäller inte eftersom ekvationen $x^2 - 3x = 0$ har två rötter, $x = 3$ och $x = 0$.
Påståendet är alltså inte sant.

Följande gäller:
$x = 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$ (implikation)
$x = 0, x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$ (ekvivalens)

Exempel 2

Vi bevisar följande påstående:
”Kvadraten på ett jämnt tal är delbar med 4.”

Bevis:
Ett jämnt tal kan skrivas $x = 2n$ där n är ett heltal.
Kvadraten på talet: $(2n)^2 = 4n^2$
$4n^2$ är delbart med 4 eftersom det innehåller faktorn 4.

V.S.B.

Exempel 3

Vi visar med ett direkt bevis att om $a < b < c$ är tre på varandra följande heltal, så är $ac = b^2 - 1$

Bevis:
Vi kan skriva $a = b - 1$ och $c = b + 1$
$ac = (b - 1)(b + 1) = b^2 - 1$

V.S.B.

* Ingår i kursen t.o.m. 2021-06-30.

4511 Följande påståenden är ekvivalenser eller implikationer. Placera rätt pil, $\Leftrightarrow$ eller $\Rightarrow$, i rutan.

a) $x = 4$ ☐ $x^2 = 16$

b) $2x + 3 = 9$ ☐ $x = 3$

a) $x = 4 \Rightarrow x^2 = 16$

Motivering:
$x = 4$ medför att $x^2 = 16$ men omvändningen gäller inte eftersom $x^2 = 16$ medför att $x = 4$ och $x = -4$.

b) $2x + 3 = 9 \Leftrightarrow x = 3$

Motivering:
$2x + 3 = 9$ medför att $x = 3$ och
$x = 3$ medför att $2x + 3 = 9$.

4512 Påstående: Produkten av ett jämnt och ett udda tal är ett jämnt tal.

a) Bevisa påståendet med ett direkt bevis.

b) Gäller omvändning till påståendet?

a) *Bevis*:
Ett jämnt tal kan skrivas $2m$, där m är ett heltal.
Ett udda tal kan skrivas $2n + 1$, där n är ett heltal.
Produkten $2m \cdot (2n + 1)$ är ett jämnt tal eftersom den innehåller faktorn 2.

V.S.B.

b) Omvändningen till påståendet är:
Om produkten av två tal är jämn, så är en faktor jämn och en udda.

För att visa att detta inte gäller räcker det att hitta ett motexempel, t.ex. $8 = 2 \cdot 4$.

Nej, omvändningen till påståendet gäller inte. Vi har inte en ekvivalens.

1

4513 Följande påståenden är ekvivalenser eller implikationer. Placera rätt pil, $\Leftrightarrow$ eller $\Rightarrow$, i rutan.
Motivera ditt svar.

a) $x > 0$ ☐ $x^2 > 0$

b) n är udda ☐ $n = 2k + 1$, k är heltal

c) $y = x + 2$ ☐ $y' = 1$

d) $\lg x = 2$ ☐ $x = 100$

4514 P: $3x + 7 = x + 1$
Q: $x = -3$

a) Bevisa att $P \Rightarrow Q$

b) Bevisa att $Q \Rightarrow P$

c) Gäller ekvivalensen $P \Leftrightarrow Q$?

* Ingår i kursen t.o.m. 2021-06-30.

4515 Bevisa att

a) summan av ett udda tal och ett jämnt tal är udda

b) produkten av två udda heltal är udda.

4516 Avgör om påståendet är sant och bevisa ditt svar.

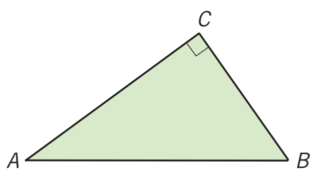
Tre på varandra följande heltal har en summa som är delbar med

a) 3 b) 6.

4517 Sant eller falskt?

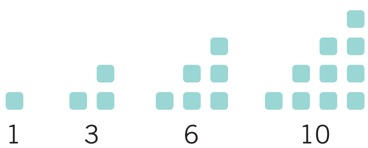
Om $P \Rightarrow Q$ och $Q \Rightarrow R$ så innebär det att $P \Rightarrow R$.

4518 Visa att $\sin(A + B) = 1$

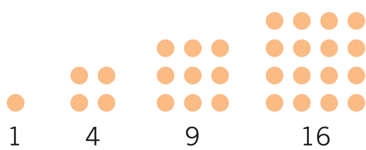


2

4519 Triangeltalen är 1, 3, 6, 10, 15, …



Kvadrattalen är 1, 4, 9, 16, 25, …



a) Skriv ett uttryck för det n:te triangeltalet och ett för det n:te kvadrattalet.

b) Undersök summan av två på varandra följande triangeltal. Formulera en slutsats.

c) Bevisa din slutsats.

4520 Lili påstår att $n^2 + 7n + 12$ är ett jämnt tal för alla heltal n.

Bevisa att hon har rätt eller visa med ett motexempel att hon har fel.

4521 Pythagoras sats lyder:

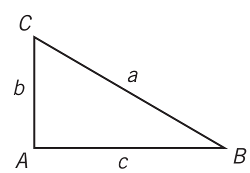
”Om en triangel är rätvinklig, så är summan av kateternas kvadrater lika med hypotenusans kvadrat.”

Låt A vara den räta vinkeln och bevisa med hjälp av cosinussatsen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

a) Pythagoras sats

b) omvändningen till Pythagoras sats.



4522 Bevisa att två på varandra följande jämna tal har en produkt som är delbar med 8.

3

4523 Nedan följer ett ”bevis” för att $4 = 3$.

Kan du hitta felet?

Anta att $a + b = c$.
Detta ger:
$4a - 3a + 4b - 3b = 4c - 3c$
$4a + 4b - 4c = 3a + 3b - 3c$
$4(a + b - c) = 3(a + b - c)$

$4 = 3$

4524 Bevisa att $n^3 - n$ är delbart med 3 för alla positiva heltal n.

* Ingår i kursen t.o.m. 2021-06-30.

Motsägelsebevis och indirekta bevis

Ibland kan ett direkt bevis vara svårt att genomföra. Därför kan vi också behöva andra bevismetoder, t.ex. motsägelsebevis och indirekta bevis.

motsägelsebevis När vi med ett *motsägelsebevis* ska bevisa att ett påstående är sant så antar vi i stället att påståendet är falskt. Sedan visar vi att detta leder till en motsägelse.

Exempel 1 Ett primtal är ett naturligt tal större än 1 som bara är delbart med 1 och sig själv. De tio första primtalen är 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 och 29. För över 2 000 år sedan bevisade den grekiske matematikern Euklides, med ett motsägelsebevis, att antalet primtal är oändligt många.

Påstående:
Antal primtal är oändligt många.

Bevis:
Anta att påståendet är falskt. Detta innebär att antalet primtal inte är oändligt, utan ändligt många: $p_1, p_2, \dots p_n$

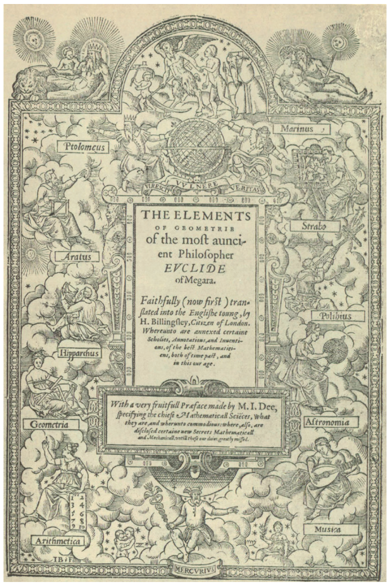
Bilda talet $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$

Om N divideras med $p_1, p_2 \dots p_n$ är resten alltid 1. Detta innebär att N inte är delbart med något av primtalen $p_1, p_2, \dots p_n$.

Antingen måste då N vara ytterligare ett primtal eller så finns det primtal som är delare i N och som inte är bland $p_1, p_2, \dots p_n$

Detta motsäger antagande att $p_1, p_2, \dots p_n$ är alla primtal.

Antagandet måste vara falskt, vilket innebär att påståendet är sant.
Antal primtal är oändligt många.
V.S.B.



indirekt bevis När vi ska bevisa påståendet $P \Rightarrow Q$ med ett *indirekt bevis*, så visar vi i stället att motsatsen till Q medför motsatsen till P.

Om vi kallar motsatsen till ett påstående P som (inte P), så kan man med grundläggande logiska regler visa att
$P \Rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad (\text{inte } Q) \Rightarrow (\text{inte } P)$

Exempel 2 P: $2x = 6$
Q: $x = 3$
Vi ser att påståendet $P \Rightarrow Q$ är sant.

(inte Q): $x \neq 3$
(inte P): $2x \neq 6$
Vi ser att (inte Q) $\Rightarrow$ (inte P) är sant.

Om (inte Q) $\Rightarrow$ (inte P) är sant, så är $P \Rightarrow Q$ sant.
Den första implikationen kan ibland vara enklare att visa.

* Ingår i kursen t.o.m. 2021-06-30.

Sammanfattning

Direkt bevis:
Bevisa direkt att antagandet P ger slutsatsen Q, d.v.s. $P \Rightarrow Q$.

Motsägelsebevis:
Bevisa att P är sant genom att först anta att P är falskt.
Visa att detta leder till en motsägelse.

Indirekt bevis:
Bevisa $P \Rightarrow Q$ genom att i stället visa (inte Q) $\Rightarrow$ (inte P).

4525 a, b och c är tre reella tal sådana att $abc = -10$.

Påstående: Minst ett av talen måste vara negativt.

Visa med ett motsägelsebevis att påståendet är sant.

Bevis:
Vi antar att påståendet är falskt, vilket innebär att inget av talen är negativt, d.v.s. alla talen är positiva.

Detta ger att $abc \geq 0$ vilket motsäger att $abc = -10$.

Vårt antagande att påståendet är falskt, leder till en motsägelse.

Detta innebär att påståendet är sant.
Minst ett av talen måste vara negativt.

V.S.B.

4526 Bevisa med ett indirekt bevis påståendet:
”Om n^2 är ett jämnt tal, så är n ett jämnt tal.”

P: n^2 är ett jämnt tal
Q: n är ett jämnt tal

Vi bevisar $P \Rightarrow Q$ genom att visa (inte Q) $\Rightarrow$ (inte P)
d.v.s. n är udda $\Rightarrow$ n^2 är udda

Bevis:
n udda ger: $n = 2n + 1$ (n heltal)
$n^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2m + 1$ (m heltal)
n^2 är alltså ett udda tal

n udda $\Rightarrow$ n^2 är udda
Detta ger: n^2 är jämnt $\Rightarrow$ n är jämnt

V.S.B.

04_Kurs 4_Kap 4_200713.indd 261 2021-01-19 11:18

1

4527 Vad är motsatsen, (inte P), till

a) P: n är jämnt

b) P: $x + y \geq 4$

c) P: $x = 2$

d) P: minst ett barn är en flicka

e) P: alla kor kan flyga?

4528 Antagande P: $0{,}5x + 2 \leq 6$
Slutsats Q: $x \leq 8$

a) Formulera med matematiska symboler (inte Q) $\Rightarrow$ (inte P).

b) Bevisa indirekt $P \Rightarrow Q$ genom att visa (inte Q) $\Rightarrow$ (inte P).

4529 P: Det är sommar.
Q: Vi spelar fotboll.

Formulera med ord:

a) $P \Rightarrow Q$

b) (inte Q) $\Rightarrow$ (inte P)

4530 Visa med ett indirekt bevis att om x är ett heltal, så kan inte uttrycket $2x - 5$ ha värdet 6.

4531 Bevisa med ett direkt bevis att

a) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

b) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

4532 Bevisa att följande påstående är falskt:

Om n är ett udda tal, så ger uttrycket $4n - 1$ ett primtal.

4533 Bevisa att följande påstående är sant:

”Det finns tredjegradsekvationer som har tre negativa heltalsrötter.”

4534 Bevisa med ett indirekt bevis att om $3n + 2$ är udda så är n udda.

4535 Förklara vad som menas med ett motsägelsebevis.

* Ingår i kursen t.o.m. 2021-06-30.

4536 Beskriv skillnaden mellan ett direkt och ett indirekt bevis.

2

4537 *Påstående*:
”Om produkten av två positiva reella tal är större än 100 medför det att minst en av faktorerna är större än 10.”

a) Formulera med ord:
(inte Q) $\Rightarrow$ (inte P)

b) Formulera med matematiska symboler:
(inte Q) och (inte P).

c) Bevisa med ett indirekt bevis att $P \Rightarrow Q$.

4538 Bevisa med ett indirekt bevis att om

a) $ab < 0$ så är a eller b negativ

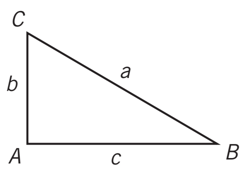
b) $x^2 = x$ så är $x \geq 0$.

4539 Bevisa att om

a) $7a + 1$ är ett jämnt tal, så är a ett udda tal

b) $a^2 - 2a + 7$ är ett jämnt tal, så är a ett udda tal.

4540 Pythagoras sats lyder:
”Om en triangel är rätvinklig så är summan av kateternas kvadrater lika med hypotenusans kvadrat.”



Låt A vara den räta vinkeln och använd cosinussatsen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

för att bevisa Pythagoras sats med ett indirekt bevis.

4541 Bevisa med hjälp av additionssatsen för sinus att $\sin 2v = 2 \sin v \cos v$.

4542 Bevisa att om ekvationen $x^2 - 2x + a = 0$ har komplexa rötter, så är $a > 1$.

4543 Visa med indirekt bevis att om x är lösning till ekvationen

$x^3 + 3x^2 + 7x + 2 = 0$ så är $x < 0$.

3

4544 Talet 87 har siffersumman 15 eftersom $8 + 7 = 15$.

Både 87 och 15 är delbart med 3 eftersom $15 = 3 \cdot 5$ och $87 = 3 \cdot 29$.

Påstående:
Ett heltal är delbart med 3 om dess siffersumma är delbar med 3.

Bevisa att påståendet är sant för tvåsiffriga heltal.

4545 $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal, d.v.s. kan inte skrivas som ett rationellt tal $\frac{a}{b}$ (a, b heltal, $b \neq 0$).

Beviset av detta är ett klassiskt motsägelsebevis:

Anta att $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ där a och b är heltal och $\frac{a}{b}$ är förkortat så långt det går.

Kvadrering av uttrycket ger: $2 = \frac{a^2}{b^2}$

vilket ger $2b^2 = a^2$ d.v.s. a^2 och a är delbara med 2.

Sätter vi $a = 2k$ ger det $2b^2 = 4k^2$ vilket kan skrivas $b^2 = 2k^2$, d.v.s. även b måste vara delbart med 2.

Vi får en motsägelse mot vårt antagande, $\sqrt{2}$ måste vara irrationellt.

a) Förklara varför både a^2 och a är delbart med 2 om $2b^2 = a^2$ (a, b heltal).

b) Varför får vi en motsägelse?

4546 a och b är heltal. Bevisa att $a^2 - 4b \neq 2$.

4547 Bevisa att om den ena faktorn ökar med lika många procent som den andra faktorn minskar, så minskar produkten.

* Ingår i kursen t.o.m. 2021-06-30.

Historik

RELEVANS

Från Thales till Gödel

Grekerna införde beviset i matematiken

Thales från Miletos (ca 600 f.v.t.) är en av de första matematikerna i historien som vi vet namnet på. Han inte bara noterade matematiska fakta, som att basvinklarna i en likbent triangel är lika stora, han bevisade det också. Thales metoder utvecklades av Euklides på 300-talet f.v.t.

Euklides berömda bok, Elementa, sammanfattade sin tids matematiska vetande. Med några självklara grundsatser (axiom) som utgångspunkt, ger Euklides bevis för ett stort antal satser, bl.a. Pythagoras sats och att antalet primtal är oändligt.

Euklides axiom gällande parallella linjer har genom historien varit omdiskuterat och väckt nyfikenhet. Genom att byta ut parallellaxiomet skapade man på 1800-talet nya geometriska system med andra regler. Ett av dessa visade sig lite oväntat bilda ramen för Einsteins relativitetsteori i början av 1900-talet.

Logikens gränser

Euklides metod, med några få axiom och en handfull logiska regler som alla satser kan härledas från, är tilltalande enkel. Metoden har i årtusenden varit en modell för matematiker inom olika områden.

Kurt Gödel (1906–1978) var en av 1900-talets stora matematiker.

Kan *all* matematik härledas från en samling axiom?

Det kom som en chock när den 25-årige österrikiske matematikern Kurt Gödel 1931 visade att svaret är nej. Han visade att varje axiomsystem är ofullständigt, d.v.s. innehåller påståenden vars sanningshalt inte går att avgöra inom systemet. För det krävs en mänsklig hjärna som kan gå utanför systemet och välja nya utgångspunkter.

1 Om vi ändrar på förutsättningarna så förändras också satserna. Gör följande tankeexperiment:

Gå från en punkt på ekvatorn rakt norrut till nordpolen. På nordpolen vrider du dig 90° och går rakt ner till ekvatorn och sedan rakt tillbaka till den punkt där du startade.

a) Vilken figur beskriver din vandring?

b) Vilken vinkelsumma har din figur?

Sant eller falskt?

Avgör om påståendena är sanna eller falska. Syftet är att utveckla förmågan att föra ett matematiskt resonemang. Motivera därför svaren med beräkningar och förklaringar.

Arbeta gärna i par eller grupp.

RESONEMANG

1 Det gäller att $i^5 = i$.

2 Alla reella tal är också komplexa tal.

3 Det komplexa talet $-3-2i$ ligger i fjärde kvadranten i det komplexa talplanet.

4 $1-2i$ är konjugatet till $-1+2i$.

5 Geometriskt kan z och $\bar{z}$ tolkas som en spegling i reella axeln.

6 Absolutbeloppet till $z = 3-i$ är lika med $\sqrt{10}$.

7 De komplexa tal som beskrivs av $|z+3i| = 2$ kan, i ett komplext talplan, ritas som en cirkel med radien 2 l.e. och medelpunkten $(0, 3i)$.

8 Vid multiplikation av komplexa tal i polär form multiplicerar man argumenten.

9 $\sqrt{3}+i$ och $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ är två olika representationer av samma komplexa tal.

10 $e^{\frac{\pi}{3}\cdot i}$ och $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$ är två olika representationer av samma komplexa tal.

11 Om den ena roten till en given andragradsekvation är $z_1 = 2-i$, så är den andra roten $z_2 = -2+i$.

12 En andragradsekvation kan ha en reell rot och en icke-reell rot.

13 Ett sjundegradspolynom dividerat med ett andragradspolynom är alltid ett femtegradspolynom.

14 $x^n + 1$ är alltid delbart med $x+1$.

04_Kurs 4_Kap 4_200710.indd 265 2020-07-10 13:20