Talsystem med olika baser

positionssystem

Vårt talsystem kommer ursprungligen från Indien. Det har använts i Europa i ungefär 1 000 år. Detta talsystem är ett *positionssystem*. Det betyder att varje position (plats) har ett värde.

I tiosystemet, som vi använder, har man 10 siffror (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 och 9). Positionernas värde är alltid en potens med basen 10.

Vi studerar talet 4 143

4 1 4 3

$10^0 = 1$ (Ental)
$10^1 = 10$ (Tiotal)
$10^2 = 100$ (Hundratal)
$10^3 = 1\,000$ (Tusental)

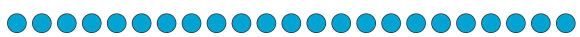
Positionernas värde

Siffrorna i talet anger antalet av varje talsort.
$4\,143 = 4 \cdot 1\,000 + 1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 1$

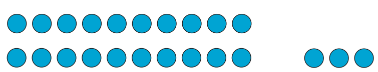
talbas

I andra kulturer har man använt talsystem med andra *talbaser* än 10. Det babyloniska talsystemet hade 60 som bas och mayafolkets talsystem hade 20 som bas.
Låt oss se vad det innebär att räkna med olika baser.

Exempel 1 Anta att vi ska räkna kulorna nedan på olika sätt.

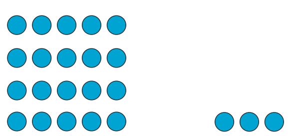


Vi börjar med basen 10 och ordnar kulorna i grupper om tio i varje.



2 tiogrupper + 3 ental = 23_{tio}

Om vi väljer basen fem ordnar vi kulorna i grupper med fem i varje.



4 femgrupper + 3 ental = 43_{fem}

Basen skrivs med små bokstäver eller siffror efter talet.

43_{fem} utläses "fyra tre med basen fem".

Exempel 2 Om man väljer talet 5 som bas kan man bara använda siffrorna 0, 1, 2, 3 och 4. Positionernas värde i ett sådant talsystem är istället en potens med basen 5.

Hur översätter man talet $4\,143_{fem}$ till ett tal med basen 10?

$4\;1\;4\;3_{fem}$

$5^0 = 1$ (Ental)
$5^1 = 5$ (Femtal)
$5^2 = 25$ (Tjugofemtal)
$5^3 = 125$ (Hundratjugofemtal)

Positionernas värde

4	1	4	3_{fem}
125	25	5	3
125		5	3
125		5	3
125		5	

$4\,143_{fem} = 4 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 548_{tio}$

$4\,143_{fem} = 4 \cdot 125 + 1 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 548_{tio}$

Exempel 3 Hur skriver man 44_{tio} med basen 5?

I femsystemet finns bara siffrorna 0, 1, 2, 3 och 4, vi kan därför inte använda mer än 4 av någon talsort.

Vi använder 25:or, 5:or och 1:or för att skriva 44.

$5^3 = 125$	$5^2 = 25$	$5^1 = 5$	$5^0 = 1$
	25	5	1
		5	1
		5	1
			1

Talet 44 räcker inte till något hundratjugofemtal.
Nästa position är tjugofemtal.
44 räcker till 1 tjugofemtal, men inte till 2.
Nu har vi 44 – 25 = 19 kvar.
Nästa position är femtal. 19 räcker till 3 femtal.
Nu har vi 19 – 3 · 5 = 19 – 15 = 4 ental kvar.

$44_{tio} = 1 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 134_{fem}$

binära tal Ett talsystem med två som bas kallas *binärt*. I tvåsystemet behövs bara siffrorna 0 och 1. Datorer översätter alla tal till binär form. Där kan 0 motsvaras av ”ström av” och 1 av ”ström på”.

I det binära talsystemet beräknar vi positionernas värde med potenser av 2.

$2^7 = 128$	$2^6 = 64$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$

Positionernas värde är från höger, ental, tvåtal, fyrtal, åttatal, sextontal o.s.v.

$111\,101_{två} = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 61_{tio}$

eller

$111\,101_{två} = 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 61_{tio}$

1364 Skriv med basen 10

a) 154_{sju} b) $1\,201_{tre}$ c) $10\,101_{två}$

a) Vi skriver positionernas värde med basen 7.

$7^2 = 49$	$7^1 = 7$	$7^0 = 1$

$154_{sju} = 1 \cdot 49 + 5 \cdot 7 + 4 \cdot 1 = 88_{tio}$

b) Vi skriver positionernas värde med basen 3.

$3^3 = 27$	$3^2 = 9$	$3^1 = 3$	$3^0 = 1$

$1\,201_{tre} = 1 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 46_{tio}$

c) Vi skriver positionernas värde med basen 2.

$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$

$10\,101_{två} = 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 21_{tio}$

1365 Hur skriver man 23_{tio} i det binära talsystemet?

I basen två har vi bara siffrorna 0 och 1.
Vi kan alltså inte använda mer än 1 av varje talsort.

Positionernas värde i basen 2.

$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
16		4	2	1

$23_{tio} = 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 10\,111_{två}$

1

1366 Skriv med basen 10

a) 132_{fem} c) 321_{fem}
b) 24_{fem} d) $1\,101_{\text{fem}}$

1367 Skriv med basen 10

a) $101_{\text{två}}$ c) $111_{\text{två}}$
b) $1\,101_{\text{två}}$ d) $110\,011_{\text{två}}$

1368 ♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

Skriv antalet hjärtan med basen

a) två c) sju
b) fem d) tolv

1369 Skriv med basen 10

a) 100_{fyra} c) 13_{fyra}
b) 201_{fyra} d) $1\,203_{\text{fyra}}$

1370 Vilka siffror får du använda när du arbetar med

a) basen 7 b) basen tre?

1371 En siffra har slocknat i det binära talet. Vilken?

a) $\boxed{1}\ \boxed{}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{1} = 29_{\text{tio}}$

b) $\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{}\ \boxed{1} = 25_{\text{tio}}$

2

1372 I det binära talsystemet skrivs talen ett, två och tre:

1, 10 och 11

Fortsätt att skriva talen fyra till tjugo.

1373 Skriv 40_{tio} med basen

a) två c) sju
b) fem d) tolv

$\boxed{\textbf{1374}}$ Eftersom det bara finns ettor och nollor i det binära talsystemet blir talen långa.

Beräkna hur många siffror som krävs i det binära talsystemet för att skriva

a) 500_{tio} b) $2\,000_{\text{tio}}$

1375 Basen sexton används ibland i datorsammanhang. Talen 10, 11, 12, 13, 14 och 15 representeras då av ”siffrorna” A, B, C, D, E och F.

a) Skriv 25_{sexton} med basen tio.
b) Skriv $2B_{\text{sexton}}$ med basen tio.
c) Skriv 17_{tio} med basen sexton.
d) Skriv 31_{tio} med basen sexton.

1376 Vilken är basen *b*? Pröva dig fram.

a) $73_{\text{tio}} = 201_b$
b) $330_{\text{tio}} = 406_b$

3

1377 a) Skriv 31_{fyra} med basen sju.
b) Skriv 31_{sju} med basen fyra.

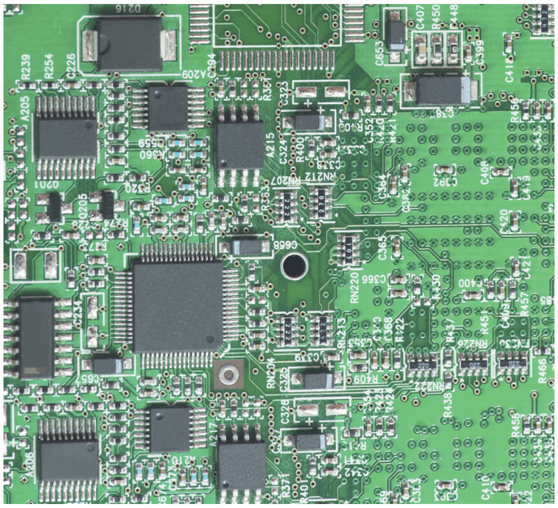
1378 Visa att $32_{\text{fyra}} + 23_{\text{fyra}}$ blir ett tresiffrigt tal om det skrivs med basen fyra.

1379 Undersök om det finns några talbaser x och y sådana att $101_x = 11\,010_y$

$\boxed{\textbf{1380}}$ Talen nedan är skrivna med basen 10.

Skriv dem med basen 2, avrunda till 5 decimaler där det behövs.

a) 0,5 b) 0,25 c) 0,1



Historik

RELEVANS

Tre historiska talsystem

Det egyptiska talsystemet

För ca 5 000 år sedan användes i Egypten ett talsystem med talet 10 som bas.

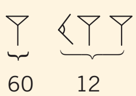
Symbol	Beskrivning	Tal
I	Streck	1
∩	Åsnehov	10
9	Hårlock	100
𓆼	Lotusblomma	1 000

Detta talsystem var inget positionssystem. Talet 327 kunde skrivas 999∩∩IIIIIII eller IIIIIII∩∩999.

Det babyloniska talsystemet

Det babyloniska talsystemet är ca 4 000 år gammalt. Det är delvis ett positionssystem med basen 60.

Symbol	Värde vid olika placering
𒁹	1, 60, 3 600 o.s.v. (60^0, 60^1, 60^2 o.s.v.)
𒌋	10, 600, 36 000 o.s.v. ($10 \cdot 60^0$, $10 \cdot 60^1$, $10 \cdot 60^2$ o.s.v.)

Talet 72 skrevs 

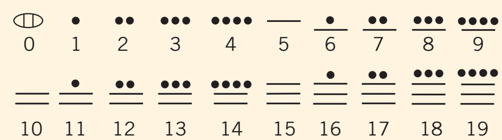
Att 1 h = 60 min = 3 600 s och 1 varv = 360° är rester från det babyloniska talsystemet.

Mayafolkets talsystem

Mayafolket i Mellanamerika använde för ca 2 000 år sedan ett positionssystem med basen 20.

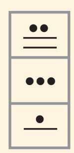
De räknade i ental (20^0), tjugotal (20^1), fyrahundratal (20^2) o.s.v.

Tal mindre än 20 skrevs med hjälp av punkter och streck. Talet noll hade en särskild symbol.



Tal större än 20 skrevs genom att symbolerna placerades i grupper ovanpå varandra.

Exempel:



→ 12 fyrahundratal $12 \cdot 400 = 4800$

→ 3 tjugotal $3 \cdot 20 = 60$

→ 6 ental $6 \cdot 1 = 6$

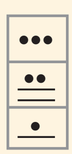
4866

---

1 Vilket tal i vårt talsystem svarar mot de egyptiska symbolerna?

a) ∩II b) 99∩IIIII

2 Vilket tal i vårt talsystem svarar mot Mayafolkets symboler?

a)  b) 

3 Skriv talet både med egyptiska symboler och med Mayasymboler.

a) 26 b) 108 c) 1 950

4 Skriv vårt tal 133 med talsystemet från

a) Mayafolket b) Babylonien.

5 Nollan är en symbol för ”tom plats”. Varför är det svårt att utan nolla veta vad t.ex. det babyloniska 𒌋 𒁹 betyder?